ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Д. Т. БАГДАСАРЯН

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ B_α М. М. ДЖРБАШЯНА

1. На пути развития общей теории факторизации мероморфных в круге $D=\{z:|z|<1\}$ функций М. М. Джрбашян [1] ввел в рассмотрение произведения типа Бляшке $B_\alpha(z, z_n)$, зависящие от непрерывного параметра $\alpha\in(-1, +\infty)$, сходимость которых в круге D имеет место при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\alpha+1}<+\infty, \tag{1}$$

наложенном па последовательность нулей $\{z_n\}_1^\infty\subset D$. Эти произведения, совпадающие при $\alpha=0$ с классическим произведением Бляшке, определяются следующим образом:

$$B_\alpha(z, z_n)=\prod_{n=1}^{\infty}A_\alpha(z, z_n), \tag{2}$$

где

$$A_\alpha(z,\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_\alpha(z,\zeta)\}, \tag{3}$$

$$W_\alpha(z,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^{\alpha-1}x^{k-1}\,dx-\zeta^{-k}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}z^k.$$

Пусть $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность чисел из круга D, пронумерованных в порядке возрастания их модулей: $0<|z_n|<|z_{n+1}|$ $(n\geqslant 1)$. Как известно, показатель сходимости μ последовательности $\{|z_n|\}_1^\infty$ определяется следующим образом:

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)<+\infty$, то полагают, что $\mu=0$.

2. Если $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)=+\infty$ и существует число $\mu>0$ такое, что при любом $\varepsilon>0$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\mu+1-\varepsilon}=+\infty$, но также

$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\mu+1+\varepsilon}<+\infty$, то показатель сходимости последовательности $\{|z_n|\}_1^{\infty}$ полагают равным μ.

2. В работе [2] была установлена следующая

Теорема 1. *Если $\mu>0$ — показатель сходимости последовательности модулей нулей $\{z_n\}_1^{\infty}$ функции $B_\alpha(z, z_n)$ и $\mu<\alpha<\mu+1$, то*

$$\rho\equiv\limsup_{r\to1^-}\frac{\log m(r, B_\alpha)}{-\log(1-r)}=\mu. \tag{4}$$

Целью же настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\mu>0$ — показатель сходимости последовательности $\{|z_n|\}_1^{\infty}$, $\exp\{g(z)\}$ — аналитическая в круге D функция порядка меньше, чем ρ, $\alpha\in(\mu, \mu+1)$ и*

$$f(z)=B_\alpha(z, z_n)\exp\{g(z)\}.$$

Тогда:

1°. *Порядки роста функций $f(z)$ и $N(z, B_\alpha^{-1})$ совпадают.*

2°. *Существует постоянная $C>0$, зависящая от ρ и произведения $B_\alpha(z, z_n)$, такая, что*

$$\limsup_{r\to1^-}\frac{N(r, f^{-1})}{T(r, f)}\geqslant C.$$

Для доказательства теоремы 2 будут использованы следующие две леммы. Первая из них установлена в [2], а доказательство второй дано в [3].

Лемма 1. *Пусть $-1<\alpha<+\infty$, $0<\varepsilon\leqslant1$ и $\alpha+\varepsilon>0$. Тогда имеет место оценка*

$$|A_\alpha^0(z,\zeta)|\leqslant\exp\left\{\text{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\right\},\ |z|,\ |\zeta|<1. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть функции $\Phi(t)\geqslant0$, $\Psi(t)\geqslant0$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0, 1)$ $(0<t_0<1)$, причем функция $\Psi(t)$ неубывающая. Далее, пусть*

$$\lim_{r\to1^-}\Phi(r)=+\infty, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to1^-}\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}=0. \tag{7}$$

Тогда существует $r\in(t_0, 1)$, достаточно близкое к 1 такое, что одновременно имеют место неравенства

$$\Phi(t)\leqslant\Phi(r)\ (t_0\leqslant t<r), \tag{8}$$

$$\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\leqslant\frac{\Phi(r)}{\Psi(r)}(r\leqslant t<1). \tag{9}$$

3. Доказательство теоремы 2. Заметим сначала, что для любой функции требуемого вида $T(r, f) = T(r, B_\alpha)[1+O(1)]$. Поэтому очевидно теорему достаточно доказать лишь для случая $f(z) = B_\alpha(z, z_n)$.

1°. По аналогии с [3] обозначим

$$S_1 = \{n/|z_n| \leqslant r\}, \quad S_2 = \{n/|z_n| > r\}.$$

Тогда

$$T(r, B_\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |B_\alpha(re^{i\theta}, z_n)|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n\in S_1} + \sum_{n\in S_2}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |A_\alpha(re^{i\theta}, z_n)|\, d\theta \equiv J_1 + J_2. \qquad (10)$$

Для оценки J_1 выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы $1 < \alpha + \varepsilon_1 < \mu + 1$. Тогда, в силу (5)

$$J_1 \leqslant \frac{\text{const}}{2\pi}\sum_{|z_n|<r}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-|z_n|}{|1-re^{i\theta}|}\right)^{\alpha+\varepsilon_1} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}}\sum_{|z_n|<r}(1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_1}. \qquad (11)$$

При этом мы будем иметь

$$\sum_{|z_n|<r}(1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_1} = \int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1}\, dn(t) = (1-r)^{\alpha+\varepsilon_1} n(r) +$$

$$+(\alpha+\varepsilon_1)\int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-1}\, t\, dN(t) = (1-r)^{\alpha+\varepsilon_1} n(r) + (\alpha+\varepsilon_1)(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1} \times$$

$$\times rN(r) + (\alpha+\varepsilon_1)^2\int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_1}\right) dt. \qquad (12)$$

Теперь заметим, что

$$n(r)\frac{1-r}{2} \leqslant \int_r^{(1+r)/2} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant N\left(\frac{1+r}{2}\right).$$

Тем самым, $n(r)(1-r) \leqslant 2N\left(\frac{1+r}{2}\right)$, и из (11) и (12) получим

$$J_1 < \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}}\left\{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}\, 2N\left(\frac{1+r}{2}\right) +\right.$$

$$\left.+ (\alpha+\varepsilon_1)(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1} rN(r) + (\alpha+\varepsilon_1)^2\int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_1}\right) dt. \right. \qquad (13)$$

Чтобы оценить J_2, выберем $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы $\alpha + \varepsilon_2 > \mu + 1$. Тогда в силу (5) очевидно

$$J_2 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} \sum_{|z_n|>r} (1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_2}. \tag{14}$$

При этом

$$\sum_{|z_n|>r} (1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_2} = \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2}\, dn(t) =$$

$$= (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2} n(t)\Big|_r^1 + (\alpha+\varepsilon_2)(1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-1}\, tN(t)\Big|_r^1 +$$

$$+ (\alpha+\varepsilon_2)^2 \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_2}\right) dt. \tag{15}$$

Так как $\alpha + \varepsilon_2 > \mu + 1$, то ясно, что $n(t)(1-t)^{\alpha+\varepsilon_2} \to 0$ и $N(t)$ $(1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-1} \to 0$ при $t \to 1^-$. Поэтому

$$\sum_{|z_n|>r} (1-|z_n|)^{\alpha+\varepsilon_2} \leqslant (\alpha+\varepsilon_2)^2 \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_2}\right) dt,$$

и следовательно

$$J_2 \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} (\alpha+\varepsilon_2)^2 \int_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2} N(t)\left(t - \frac{1}{\alpha+\varepsilon_2}\right) dt. \tag{16}$$

Предположим теперь, что

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{\log N(r)}{-\log(1-r)} = \lambda < \mu.$$

Тогда очевидно, что при любом $\varepsilon_3 > 0$ таком, что $\lambda + \varepsilon_3 < \mu$ и при t и r достаточно близких к 1 имеют место неравенства $N(t) < (1-t)^{-(\lambda+\varepsilon_3)}$, $N\left(1 + \frac{r}{2}\right) < 2^{\lambda+\varepsilon_3}(1-r)^{-(\lambda+\varepsilon_3)}$. Поэтому из (13) и (16) получим

$$J_1 < \frac{\text{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}} \left\{ (1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1} \frac{\text{const}}{(1-r)^{\lambda+\varepsilon_3}} + \right.$$

$$\left. + \text{const} \int_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2-\lambda-\varepsilon_3}\, dt \right\}. \tag{17}$$

$$J_2 < \frac{\text{const}}{(1-r)^{\lambda+\varepsilon_3}}. \tag{18}$$

Из (17) и (18), поскольку $\alpha - 1 + \varepsilon_3 < \mu$, получаем $\rho < \mu$, что противоречит утверждению $\rho = \mu$ теоремы 1. Следовательно, $\lambda = \rho$.

2°. Пусть в лемме 2 $\Phi(t) = N(t)(1-t)^{\mu-\varepsilon'}$ и $\Psi(t) = (1-t)^{-2\varepsilon'}$, где полагаем, что $0 < \varepsilon' < \alpha + \varepsilon_2 - \mu - 1$, $0 < \varepsilon' < \mu + 1 - \alpha$, $\alpha \in (\mu, \mu+1)$, $t \in [r_0, 1)$. Тогда одновременно имеют место неравенства

$$N(t)(1-t)^{\mu-\varepsilon'} \leqslant N(r)(1-r)^{\mu-\varepsilon'} \ (r_0 < t < r),$$

$$N(t)(1-t)^{\mu+\varepsilon'} \leqslant N(r)(1-r)^{\mu+\varepsilon'} \ (r \leqslant t < 1). \quad (19)$$

Отсюда при $t = r + \dfrac{1-r}{2}$ будем иметь

$$N\left(r + \frac{1-r}{2}\right) \leqslant N(r)\, 2^{\mu+\varepsilon'} \ (r_0 < r < 1). \quad (20)$$

Применив это неравенство, из (13) и (16) получим

$$J_1 \leqslant \operatorname{const}\left\{N\left(\frac{1+r}{2}\right) + (\alpha + \varepsilon_1) N(r)\right\} +$$

$$+ \frac{\operatorname{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_1-1}} \int\limits_0^r (1-t)^{\alpha+\varepsilon_1-2-\mu+\varepsilon'} (1-t)^{\mu-\varepsilon'} N(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const} N(r)\,\{2^{\mu+\varepsilon'} + \alpha + \varepsilon_1\} + \frac{\operatorname{const}}{\mu + 1 - \alpha - \varepsilon_1 - \varepsilon'} N(r) \leqslant A_1 N(r), \quad (21)$$

$$J_2 \leqslant \frac{\operatorname{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} \int\limits_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2-\mu-\varepsilon'} (1-t)^{\mu+\varepsilon'} N(t)\,dt \leqslant$$

$$< \frac{\operatorname{const}}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon_2-1}} N(r)(1-r)^{\mu+\varepsilon'} \int\limits_r^1 (1-t)^{\alpha+\varepsilon_2-2-\mu-\varepsilon'} dt =$$

$$= \frac{\operatorname{const}}{\alpha + \varepsilon_2 - \mu - 1 - \varepsilon'} N(r) = A_2 N(r), \quad (22)$$

где постоянные $A_{1,2} > 0$ не зависят от $r \in (r_0, 1)$.

Из (21) и (22) следует, что

$$\limsup_{r \to 1-} \frac{N(r, B_\alpha^{-1})}{T(r, B_\alpha)} \geqslant \frac{1}{A_1 + A_2} > 0,$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что, как можно проверить с применением методов работы [3], результаты, аналогичные вышеприведенным теоремам 1 и 2, справедливы также для произведений $\pi_\alpha(z, z_n)$ М. М. Джрбашана [4] при $\alpha > \mu > 0$.

Ереванский политехнический институт

Поступила 14.II.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, „Наука", М., 1966.
2. *Д. Т. Багдасарян.* О порядке роста произведения М. М. Джрбашяна, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", XXV, № 4, 1990, 401—408.
3. *L. R. Sons.* Value distribution of canonical products in the unit disc, Mathematica Japonica, 22, № 1, 1977.
4. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.