ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

УДК 517.55

А. О. КАРАПЕТЯН

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТИПА КОШИ

1. Пусть $n \geqslant 1$ и $|a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$ — произвольная совокупность комплексных чисел, упорядоченная двойной нумерацией при помощи индексов $i, j = 1, \cdots, n$. Договоримся обозначать через

$$\det |a_{ij}|_{i,j=1}^{n} \tag{1}$$

определитель той матрицы A размеров $n \times n$, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца находится число a_{ij} $(1 \leqslant i, \; j \leqslant n)$. Напомним далее, что определителем Коши называется определитель

$$(\det (l_i + m_j)^{-1}|_{i,j=1}^{n}, \tag{2}$$

где $l_1, \cdots, l_n$ и $m_1, \cdots, m_n$ — независимые комплексные переменные (таким образом, здесь $a_{ij} = (l_i + m_j)^{-1}$, $1 \leqslant i, \; j \leqslant n$). Известны различные способы вычисления этого определителя (см. [1, отд. VII, задача 3] или [2, теорема 1.1.3]). Окончательный же результат, известный как лемма Коши, гласит:

$$\det \left| (l_i + m_j)^{-1} \right|_{i,j=1}^{n} = \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (l_r - l_s) \cdot \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (m_r - m_s) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (l_i + m_j)^{-1}. \tag{3}$$

Полагая в (3) $m_j = j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, мы получаем

$$\det |(l_i + j)^{-1}|_{i,j=1}^{n} = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (n-1)! \times$$

$$\times \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (l_r - l_s) \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (l_i + j)^{-1}. \tag{4}$$

Нашей целью является обобщение формулы (4), а точнее — вычисление определителя

$$\det |B(l_i + j, \; t + 1)|_{i,j=1}^{n}, \tag{5}$$

где $l_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ и t — независимые комплексные переменные, а B — функция Эйлера. Заметим, что при $t = 0$

$$B(l_i + j, \; t+1) = \frac{\Gamma(l_i + j) \cdot \Gamma(t+1)}{\Gamma(l_i + j + t + 1)} = \frac{\Gamma(l_i + j)}{\Gamma(l_i + j + 1)} = \frac{1}{l_i + j}$$

$$(1 \leqslant i, \; j \leqslant n), \tag{6}$$

так что вычисление определителя (5) в действительности будет существенным обобщением соотношения (4). Отметим также, что опрэделитель (5) возник весьма естественным образом при решении автором одной задачи многомерного комплексного анализа.

2. Прежде всего введем некоторые обозначения. Пусть $\mathrm{D}=\{\zeta\in\mathbf{C}: |\zeta|<1\}$ суть единичный круг в комплексной плоскости. Далее, при произвольном $n\geqslant 1$ положим (см. монографию [2, стр. 19]):

$$D(z_1,\cdots,z_n)\overset{\mathrm{def}}{=}\prod_{1\leqslant r<s\leqslant n}(z_r-z_s),\quad z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n. \tag{7}$$

Кроме того

$$\Delta_n\overset{\mathrm{def}}{=}\{z\in\mathbf{C}^n:\ D(z)=0\}. \tag{8}$$

Очевидно Δ_n нигде не плотно в $\mathbf{C}^n$; более того, для произвольного открытого множества $U\subset\mathbf{C}^n$ множество $U\cap\Delta_n$ нигде не плотно в U.

Далее, пусть множество $\Omega\subset\mathbf{C}$ открыто и функции $\{f_j(\omega)\}_{j=1}^n$, $\omega\in\Omega$, голоморфны. Тогда очевидно, что функция

$$F(z)\equiv F(z_1,\cdots,z_n)=\det\|f_j(z_i)\|_{i,j=1}^n \tag{9}$$

являются голоморфной функцией n комплексных переменных $z_1,\cdots,z_n$ в $\Omega\times\cdots\times\Omega=\Omega^n\subset\mathbf{C}^n$. Изучение свойств этой функции мы расчленим на ряд последовательных шагов.

Лемма 1. *Пусть множество $\Omega\subset\mathbf{C}$ открыто и функция φ голоморфна в Ω. Тогда существует голоморфная функция $\psi(z,w)$, $(z,w)\in\Omega\times\Omega\subset\mathbf{C}^2$, такая, что*

$$\varphi(z)-\varphi(w)\equiv(z-w)\cdot\psi(z,w),\quad z,w\in\Omega. \tag{10}$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, ибо искомая функция ψ задается формулой

$$\psi(z,w)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(z)-\varphi(w)}{z-w}, & z,w\in\Omega,\ z\neq w,\\ \varphi'(z), & z=w\in\Omega.\end{cases} \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть функция $H(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ голоморфна в единичном поликруге $\mathrm{D}^n\subset\mathbf{C}^n$ и при произвольном фиксированном $(z_2,\cdots,z_n)\in\mathrm{D}^{n-1}$ таком, что $z_i\neq z_j$ при $2\leqslant i<j\leqslant n$, имеем*

$$H(\omega,z_2,\cdots,z_n)=0,\quad \omega=z_k\ (2\leqslant k\leqslant n). \tag{12}$$

Тогда существует голоморфная в D^n функция G, для которой справедливо равенство

$$H(z_1,z_2,\cdots,z_n)\equiv\prod_{k=2}^n(z_1-z_k)\cdot G(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathrm{D}^n. \tag{13}$$

Доказательство. При $\rho\in(0,1)$ положим

$$\mathrm{D}_\rho^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:|z_k|<\rho\ (1\leqslant k\leqslant n)\}. \tag{14}$$

Очевидно, если $0<\rho_1<\rho_2<1$, то $D^n_{\rho_1}\subset D^n_{\rho_2}$, причем области D^n_ρ $(0<\rho<<1)$ в объединении дают D^n. Теперь зафиксируем $\rho\in(0, 1)$ и определим в D^n_ρ функцию

$$G_\rho(z_1, z_2, \cdots, z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\frac{H(\zeta, z_2, \cdots, z_n)}{(\zeta-z_1)\cdot(\zeta-z_2)\cdot\ldots\cdot(\zeta-z_n)}\,d\zeta,$$

$$(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in D^n_\rho, \tag{15}$$

которая, очевидно, голоморфна. Пусть далее $(z_2, \cdots, z_n)\in D^{n-1}_\rho$ и $z_i\neq z_j$ при $2\leqslant i<j\leqslant n$. Тогда в силу условия (12) функция

$$\frac{H(\zeta, z_2, \cdots, z_n)}{(\zeta-z_2)\cdot\ldots\cdot(\zeta-z_n)},\ \zeta\in D, \tag{16}$$

голоморфна в D. Следовательно, по интегральной формуле Коши из (15) получаем

$$G_\rho(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{H(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{(z_1-z_2)\cdot\ldots\cdot(z_1-z_n)},$$

$$|z_1|<\rho,\ z_1\neq z_k\ (2\leqslant k\leqslant n). \tag{17}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$H(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \prod_{k=2}^{n}(z_1-z_k)\cdot G_\rho(z_1, z_2, \cdots, z_n), \tag{18}$$

если $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in D^n_\rho$ и $z_i\neq z_j$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

Учитывая непрерывность соответствующих функций, заключаем, что равенство (18) справедливо при всех $z\in D^n_\rho$. И, наконец, существование голоморфной функции $G(z)$, $z\in D^n$, удовлетворяющей (13), вытекает из того факта, что при $0<\rho_1<\rho_2<1$ функция $G_{\rho_2}(z)$, $z\in D^n_{\rho_2}$, является голоморфным продолжением функции $G_{\rho_1}(z)$, $z\in D^n_{\rho_1}$.

Лемма 3. *Пусть $\Omega\subset C$ — некоторая область, бианалитически эквивалентная единичному кругу D, и функции $\{f_j(\omega)\}_{j=1}^n$, $\omega\in\Omega$, голоморфны. Тогда существует голоморфная в $\Omega^n\subset C^n$ функция G такая, что*

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \det\|f_j(z_i)\|^n_{i,j=1} \equiv D(z)\cdot G(z),\ z=(z_1, \cdots, z_n)\in\Omega^n, \tag{19}$$

где $D(z)$ определено по формуле (7).

Доказательство. Прежде всего отметим, что голоморфная функция G, удовлетворяющая (19), единственна, поскольку множество $\Omega^n\cap\Delta_n$ нигде не плотно в Ω^n. Поэтому сосредоточимся на вопросе существования такой функции. Легко видеть, что на основании леммы 1 нам достаточно ограничиться рассмотрением случая $\Omega=D$, и тогда мы будем иметь голоморфные в единичном круге D функции $\{f_j(\omega)\}_{j=1}^n$, $\omega\in D$.

Доказательство проведем индукцией по $n\geqslant 1$. При $n=1$ утверждение леммы тривиально. Допустив его справедливость при

$n-1$, рассмотрим случай произвольного n. Положив при $z=(z_1,\cdots, z_n)\in D^n$

$$F(z)\equiv\det|f_j(z_i)|_{i,j=1}^n=\begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_1)\cdots f_n(z_1)\\ f_1(z_2) & f_2(z_2)\cdots f_n(z_2)\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ f_1(z_n) & f_2(z_n)\cdots f_n(z_n)\end{vmatrix}, \tag{20}$$

обозначим через $F_k(1\leqslant k\leqslant n)$ алгебраическое дополнение элемента $f_k(z_1)$ в определителе (20). Тогда по теореме Лапласа имеем

$$F(z)\equiv\sum_{k=1}^n f_k(z_1)\cdot F_k,\quad z=(z_1,\cdots, z_n)\in D^n. \tag{21}$$

Заметим далее, что функции $F_k(1\leqslant k\leqslant n)$ голоморфны и зависят лишь от $(z_2,\cdots, z_n)\in D^{n-1}$; более того, в силу индуктивного предположения справедливы равенства $(1\leqslant k\leqslant n)$:

$$F_k(z_2,\cdots, z_n)\equiv\prod_{2\leqslant r<s\leqslant n}(z_r-z_s)\cdot G_k(z_2,\cdots z_n),$$

$$(z_2,\cdots, z_n)\in D^{n-1}, \tag{22}$$

где функции $G_k(1\leqslant k\leqslant n)$ голоморфны в D^{n-1}.

Комбинируя (21) и (22), приходим к соотношению

$$F(z_1,\cdots, z_n)\equiv\prod_{2\leqslant r<s\leqslant n}(z_r-z_s)\cdot H(z_1,\cdots, z_n) \tag{23}$$

с некоторой голоморфной в D^n функцией H, которую даже можно выписать в явном виде. Из (20), (23) следует, что если $(z_2,\cdots, z_n)\in D^{n-1}$ и $z_r\neq z_s$ при $2\leqslant r<s\leqslant n$, то

$$H(z_1, z_2,\cdots, z_n)=0,\ z_1=z_k\ (2\leqslant k\leqslant n). \tag{24}$$

Следовательно, в силу леммы 2 справедливо представление

$$H(z_1, z_2,\cdots, z_n)\equiv\prod_{k=2}^n(z_1-z_k)\cdot G(z_1, z_2,\cdots, z_n), \tag{25}$$

где функция G голоморфна в D^n и, что важнее всего, является искомой, как это следует из (23) и (25). Итак, лемма полностью доказана.

Замечание 1. Очевидно утверждение леммы 3 справедливо для более широкого класса областей $\Omega\subset C$. Например, для таких Ω, которые представимы в виде объединения возрастающей последовательности областей $\{\Omega_m\}_{m=1}^\infty$, каждая из которых биголоморфно эквивалентна единичному кругу D (в частности, для $\Omega=C$).

Замечание 2. Утверждение леммы 3 интересно сопоставить с теоремой 1.2.4 монографии Хуа Ло-кена [2], которая дает точное значение предела

$$\lim\frac{\det|f_j(z_i)|_{i,j=1}^n}{D(z_1, z_2,\cdots, z_n)} \tag{26}$$

при $z_1\to z,\ z_2\to z,\cdots,\ z_n\to z$.

Лемма 4. *Пусть* $\{Q_j(\omega)\}_{j=1}^{n}$ — *произвольные полиномы от* $\omega \in \mathbf{C}$. *Тогда существует полином* $Q = Q(z_1, \cdots, z_n)$ *от переменных* $z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{C}$, *такой, что*

$$\det Q_j(z_l)_{l,\,j=1}^{n} \equiv D(z)\cdot Q(z),\ z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n, \tag{27}$$

где $D(z)$ *определено по формуле* (7). *Если к тому же* $\deg Q_j \leqslant n-1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, *то* $Q(z) \equiv \text{const}$, $z \in \mathbf{C}^n$, *то есть*

$$\det \|Q_j(z_l)\|_{l,\,j=1}^{n} \equiv \text{const}\cdot D(z),\ z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n. \tag{28}$$

Доказательство. Прежде всего, положим $N = \max\{n-1;\ \deg Q_j\,(1 \leqslant j \leqslant n)\}$. Далее, в силу замечания 1 к лемме 3 существует целая функция $Q(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$ такая, что

$$\det\|Q_j(z_l)\|_{l,\,j=1}^{n} \equiv \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (z_r - z_s)\ Q(z_1, \cdots, z_n),$$
$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n. \tag{29}$$

Зафиксируем произвольное $(z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$ такое, что $z_r \neq z_s$ при $2 \leqslant r < s \leqslant n$. Тогда в левой части тождества (29) стоит полином от $z_1 \in \mathbf{C}$ степени $\leqslant N$, а в правой части — произведение полинома от $z_1 \in \mathbf{C}$ степени $n-1$ и целой функции $Q(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $z_1 \in \mathbf{C}$. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial^{N+1-(n-1)}}{\partial z_1^{N+1-(n-1)}} Q(z_1, z_2, \cdots, z_n) \equiv 0,\ z_1 \in \mathbf{C}. \tag{30}$$

Из соображений непрерывности равенство (30) остается в силе для произвольного $(z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{n-1}$ (без ограничения: $z_r \neq z_s$ при $2 \leqslant r < s \leqslant n$). Поскольку вместо координаты z_1 мы могли бы взять любую другую, то окончательно получаем $(1 \leqslant k \leqslant n)$

$$\frac{\partial^{N+1-(n-1)}}{\partial z_k^{N+1-(n-1)}} Q(z_1, \cdots, z_n) \equiv 0,\ (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n. \tag{31}$$

Из (31) следует, что $Q(z_1, \cdots, z_n)$ суть полином от переменных $z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{C}$ степени не выше, чем, например, $n\cdot(N-(n-1))$. Если к тому же $\deg Q_j \leqslant n-1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, то $N = n-1$ и тогда $Q \equiv \text{const}$. Тем самым лемма полностью доказана.

Замечание 3. Из доказательства этой леммы видно, что при условии $\deg Q_j \leqslant n-2$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ $Q \equiv 0$, т. е. $\det\|Q_j(z_l)\|_{l,\,j=1}^{n} \equiv 0$, $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. Однако этот факт нам в дальнейшем не понадобится.

3. Введем в рассмотрение следующие специальные полиномы:

$$P_1(\omega;\, t) = (\omega + t + 2)\cdot(\omega + t + 3)\cdot\cdots\cdot(\omega + t + n),$$
$$P_2(\omega;\, t) = (\omega + 1)\cdot(\omega + t + 3)\cdot\cdots\cdot(\omega + t + n),$$
$$P_3(\omega;\, t) = (\omega + 1)\cdot(\omega + 2)\cdot(\omega + t + 4)\cdot\cdots\cdot(\omega + t + n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n-1}(\omega;\, t) = (\omega + 1)\cdot(\omega + 2)\cdot\cdots\cdot(\omega + n - 2)\cdot(\omega + t + n)$$
$$P_n(\omega;\, t) = (\omega + 1)\cdot(\omega + 2)\cdot\cdots\cdot(\omega + n - 2)\cdot(\omega + n - 1),$$
$$\omega,\ t \in \mathbf{C}.$$

Поскольку при любом фиксированном $t \in \mathbf{C}$ полиномы $P_j(\omega; t)$, $\omega \in \mathbf{C}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ имеют степень $n-1$, то в силу леммы 4 (см. (28)) получаем

$$\det |P_j(\omega_i; t)|_{i, j=1}^n \equiv D(\omega_1, \cdots, \omega_n) \cdot \mathrm{P}_n(t),$$
$$(\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n, \ t \in \mathbf{C}. \tag{32}$$

Очевидно, что функция $\mathrm{P}_n(t)$, $t \in \mathbf{C}$, в соотношении (32) определен однозначно. Более того, фиксируя произвольное $(\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n$ т ,ое, что $\omega_r \neq \omega_s$ при $1 \leqslant r < s \leqslant n$, мы будем иметь

$$\mathrm{P}_n(t) \equiv [D(\omega_1, \cdots, \omega_n)]^{-1} \cdot \det |P_j(\omega_i; t)|_{i, j=1}^n, \ t \in \mathbf{C}. \tag{33}$$

Следовательно, $P_n(t)$ — некоторый полином от $t \in \mathbf{C}$ степени $\leqslant n(n-1)/2$. Полагая в (33), например, $\omega_i = n - i \ (1 \leqslant i \leqslant n)$, получим

$$\mathrm{P}_n(t) \equiv [1! \cdot 2! \cdot \cdots \cdot (n-1)!]^{-1} \times$$
$$\times \det |(n-i+1) \cdot (n-i+2) \cdot \cdots \cdot (n-i+j-1) \cdot (n-i+t+$$
$$+j+1) \cdot \cdots \cdot (n-i+t+n)|_{i, j=1}^n, \ t \in \mathbf{C}. \tag{34}$$

4. Всюду дальше Γ и B будут обозначать известные функции Эйлера. Далее, для произвольных (изменяющихся) величин a и b запись $a \sim b$ означает, что отношение $|a|/|b|$ ограничено сверху и снизу некоторыми положительными константами. Так, например, мы будем существенно опираться на следующую асимптотическую формулу для Г-функции:

$$|\Gamma(\mu + R \cdot e^{i\varphi})| \sim R^{\mu_1 + R \cos \varphi - 1/2} \cdot e^{-R(\cos \varphi + \varphi \cdot \sin \varphi)} \tag{35}$$

при $R \to +\infty$ равномерно по $|\varphi| \leqslant \pi/2$ (здесь $\mu = \mu_1 + i\mu_2 \in \mathbf{C}$).

Введем затем в рассмотрение функцию

$$\varphi(l_1, \cdots, l_n, t) \overset{\mathrm{def}}{=} \det |B(l_i + j, t+1)|_{i, j=1}^n,$$
$$\operatorname{Re} t > -1, \ \operatorname{Re} l_k > -1 \ (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{36}$$

Тогда оказывается справедливой

Теорема 1. *При* $\operatorname{Re} t > -1$, $\operatorname{Re} l_k > -1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *выполняется тождество*

$$\varphi(l_1, \cdots, l_n, t) \equiv \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(t+1) \cdot \Gamma(l_k+1)}{\Gamma(l_k+n+1+t)} \cdot \prod_{1 \leqslant r < s \leqslant n} (l_r - l_s) \cdot \mathrm{P}_n(t), \tag{37}$$

где полином P_n *определяется из* (33) *или* (34).

Доказательство. Будем рассматривать правую часть (37) как некоторую функцию ψ при $\operatorname{Re} t > -1$, $\operatorname{Re} l_k > -1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Обе функции $\varphi(l_1, \cdots, l_n, t)$ и $\psi(l_1, \cdots, l_n, t)$ при фиксированных l_k с $\operatorname{Re} l_k > -1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Re} t > -1$ и в силу (35) ограничены в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} t \geqslant 0$. Следовательно, согласно хорошо известной теореме единственности для аналитических функций одного комплексного переменного нам достаточно установить равенства

$$\varphi(l_1,\cdots,l_n,N)=\psi(l_1,\cdots,l_n,N),$$
$$\operatorname{Re} l_k>-1\ (1\leqslant k\leqslant n),\ N=0,1,2,\cdots. \tag{38}$$

Привлекая известные правила вычисления определителей, при $\operatorname{Re} l_k>-1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ и $N=0,1,2,\cdots$, будем иметь

$$\varphi(l_1,\cdots,l_n,N)=\det|B(l_i+j,N+1)|_{i,j=1}^n=$$
$$=\det\left|\frac{\Gamma(l_i+j)\cdot\Gamma(N+1)}{\Gamma(l_i+j+N+1)}\right|_{i,j=1}^n=$$
$$=[\Gamma(N+1)]^n\cdot\det\left|\frac{1}{(l_i+j)\cdot(l_i+j+1)\cdot\cdots\cdot(l_i+j+N)}\right|_{i,j=1}^n=$$
$$=[\Gamma(N+1)]^n\cdot\prod_{i=1}^n\frac{1}{(l_i+1)\cdot(l_i+2)\cdot\cdots\cdot(l_i+n+N)}\times$$
$$\times\det|(l_i+1)\cdot(l_i+2)\cdot\cdots\cdot(l_i+j-1)\cdot(l_i+j+1+N)\cdot\cdots\cdot(l_i+n+N)|_{i,j=1}^n=$$
$$=\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma(N+1)\cdot\Gamma(l_i+1)}{\Gamma(l_i+n+1+N)}\cdot\det|P_j(l_i;N)|_{i,j=1}^n=$$
$$=\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma(N+1)\cdot\Gamma(l_i+1)}{\Gamma(l_i+n+1+N)}\times D(l_1,\cdots,l_n)\cdot P_n(N)=\psi(l_1,\cdots,l_n,N).$$

Тем самым соотношения (38) установлены, а это, как отмечалось, доказывает теорему.

Замечание 4. Легко видеть, что при $t=0$ соотношение (37) в точности совпадает с отмеченным выше специальным случаем (4) формулы Коши.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить академика АН Армении М. М. Джрбашяна за ценные замечания и полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

Институт математики
АН Армении

Поступила 20.VI.1991

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Կոշիի տիպի որոշիչների հաշվման մասին (ամփոփում).

Կոշիի որոշիչ է կոչվում $\det|(l_i+m_j)^{-1}|_{i,j=1}^n$ տեսքի որոշիչը, որտեղ l_i-երը $(1\leqslant i\leqslant n)$ և m_j-երը $(1\leqslant j\leqslant n)$ կամայական կոմպլեքս փոփոխականներ են։ Ինչպես հայտնի է, այդ որոշիչը հնարավոր է բացահայտորեն հաշվել (նկատի ունենք այսպես կոչված Կոշիի բանաձևը)։ Ներկայացված աշխատանքում բացահայտորեն հաշվվում է $\det|B(l_i+m_j,t+1)|_{i,j=1}^n$ որոշիչը, որտեղ $\operatorname{Re} l_i>-1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $\operatorname{Re} t>-1$, իսկ B-ն՝ Էյլերի ֆունկցիան է։ Երբ $t=0$, այդ որոշիչը իրենից ներկայացնում է Կոշիի որոշիչը $m_j=j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ դեպքում։

A. H. KARAPETYAN. *On computation of Cauchy type determinants* (summary)

A determinant $\det|(l_i+m_j)^{-1}|_{i,j=1}^n$, where l_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ and m_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ are arbitrary complex variables, is usually called a Cauchy determinant. As it is well known, it can be computed explicitly (so called Cauchy's formula). In present paper

we explicitly compute the determinant det $\left|B\,(l_i+j,\ t+1)\right|_{i,\ j=1}^{n}$, where $\mathrm{Re}\, l_i > -1$, $\mathrm{Re}\, t > -1$ and B is the Euler function. In the case $t=0$ this determinant coincides with Cauchy determinant provided if $m_j = j\ (1 < j < n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Полиа, Г. Сеге*. Задачи и теоремы из анализа, Ч. 2, М., Наука, 1978.
2. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.