УДК 517.956

Г. М. АЙРАПЕТЯН

КОРРЕКТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ L^1

Пусть G — произвольная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная кривой Γ типа Ляпунова. Рассмотрим уравнение

$$A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad z \in G, \quad (1)$$

где A_0, A_1, A_2 — комплексные постоянные, $u(z), z \in G$ — искомая функция, а

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Будем предполагать, что уравнение (1) неправильно-эллиптическое, то есть корни μ_1 и μ_2 характеристического уравнения

$$A_0 + 2A_1\mu + A_2\mu^2 = 0$$

удовлетворяют условиям $|\mu_1| < 1, |\mu_2| < 1$, при этом будем предполагать также, что $\mu_1 \neq \mu_2$.

Задачи Дирихле и Неймана, а также общие граничные задачи для правильно-эллиптических уравнений и систем подробно исследованы в работах И. Н. Векуа [1], А. Б. Бицадзе [2], Н. Е. Товмасына [3], Я. Б. Лопатинского [4], А. И. Волперта [5] и других.

Краевые задачи для равномерно-эллиптических уравнений второго порядка в случае, когда граничные условия следует понимать в среднем квадратичном смысле, рассмотрена в работе В. П. Михайлова [6]. Аналогичные задачи для правильно-эллиптических уравнений и систем, когда граничные условия понимаются в смысле L^1 и C рассмотрены в работах Э. П. Меликсетяна [7], Р. А. Аликханяна [8], Т. Ш. Мадатяна [9] и автора [10].

Краевые задачи для неправильно-эллиптических уравнений и системы своим характером и методом решения существенно отличаются от краевых задач для правильно-эллиптических уравнений и систем. Например, однородные задачи Дирихле и Неймана для неправильно-эллиптических уравнений (1) в полуплоскости имеют бесконечно много линейно независимых решений (см. [2], [11]).

В работе И. А. Бикчантаева [12] установлено, что если для неправильно-эллиптического уравнения n -ого порядка граничные условия в определенном смысле будут соответствовать корням характеристического уравнения, то такая задача в полуплоскости в классе ограни-

ченных функций будет корректна. Аналогичные задачи в классе функций полиномиального роста исследованы в работе В. В. Асатрянна [13].

В работах М. А. Зироян [14], А. А. Закарян [15], [16] исследованы краевые задачи типа Римана—Гильберта для неправильно-эллиптического уравнения второго и высшего порядков в классах Гельдера в ограниченных областях.

В данной статье исследуется следующая граничная задача типа Римана—Гильберта:

Найти решение уравнения (1) такое, чтобы выполнялись граничные условия

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \operatorname{Re} a_1(t) \frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial s} - f_1(\omega(t)) \right| |dt| = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \operatorname{Re} a_2(t) \frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial n} - f_2(\omega(t)) \right| |dt| = 0,$$

где T — единичная окружность, $\partial/\partial s$ — производная по касательному направлению на T , $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали окружности T , $\omega(z)$ — функция, конформно отображающая единичный круг D^+ на G , $a_1(t)$, $a_2(t)$ — функции из класса Гельдера, $f_1(t)$, $f_2(t)$ — действительные функции из класса $L^1(T)$.

В работе доказывается нетеровость задачи (1)–(2), вычисляется ее индекс.

§ 1. Предварительные леммы и теоремы

1. Образы области G , при отображениях $z + \mu_1 \bar{z}$ и $z + \mu_2 \bar{z}$ обозначим через Δ_1 и Δ_2 соответственно.

Хорошо известно (см. [2]), что если $u(z)$ — произвольное решение уравнения (1), то его можно представить в виде

$$u(z) = \varphi_1(z + \mu_1 z) + \varphi_2(z + \mu_2 z), \quad \varphi_1(0) = 0, \quad (3)$$

где φ_1 и φ_2 — голоморфные функции в областях Δ_1 и Δ_2 соответственно и определяются через функцию $u(z)$ единственным образом.

Положив $\lambda_1(z) = \omega(z) + \mu_1 \overline{\omega(z)}$, $\lambda_2(z) = \omega(z) + \mu_2 \overline{\omega(z)}$, для любого r , $0 < r < 1$, будем иметь

$$u(\omega(rt)) = \varphi_1(\lambda_1(rt)) + \varphi_2(\lambda_2(rt)),$$

$$\frac{\partial \lambda_j(rt)}{\partial s} = tr(\omega'(rt)t - \mu_j \overline{\omega'(rt)\bar{t}}) \quad (j=1, 2),$$

$$\frac{\partial \lambda_j(rt)}{\partial n} = \omega'(rt)t + \mu_j \overline{\omega'(rt)\bar{t}} \quad (j=1, 2),$$

$$\frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial s} = \frac{\partial \lambda_1(rt)}{\partial s} \varphi_1'(\lambda_1(rt)) + \frac{\partial \lambda_2(rt)}{\partial s} \varphi_2'(\lambda_2(rt)), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(\omega(rt))}{\partial n} = \frac{\partial \lambda_1(rt)}{\partial n} \varphi_1'(\lambda_1(rt)) + \frac{\partial \lambda_2(rt)}{\partial n} \varphi_2'(\lambda_2(rt)).$$

Далее, обозначив

$$a_{1j}(r, t) = a_1(t) \frac{\partial \lambda_j(rt)}{\partial s}, \quad a_{2j}(r, t) = a_2(t) \frac{\partial \lambda_j(rt)}{\partial n}, \quad j=1, 2, \quad (5)$$

условия (2) можно представить в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{ij}(r, t) \bar{\varphi}_j(\lambda_j(rt)) - g_i(t) \right\| = 0 \quad (i=1, 2), \quad (6)$$

где $\bar{\varphi}_j(z) = \varphi_j'(z)$ ($j=1, 2$), $g_i(t) = f_i(\omega(t))$ ($i=1, 2$).

Через $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ обозначим функции, конформно отображающие единичный круг D^+ на области Δ_1 и Δ_2 соответственно. Далее положив $\psi_1(z) = \tilde{\varphi}_1(\omega_1(z))$, $\psi_2(z) = \tilde{\varphi}_2(\omega_2(z))$, $\alpha_1(z) = \omega_1^{-1}(\lambda_1(z))$, $\alpha_2(z) = \omega_2^{-1}(\lambda_2(z))$, условия (6) представим в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{ij}(r, t) \bar{\psi}_j(\alpha_j(rt)) - g_i(t) \right\| = 0, \quad (i=1, 2). \quad (7)$$

Лемма 1. Функция $\alpha_i(z)$ ($i=1, 2$) обладает следующими свойствами;

- а) взаимно однозначно отображает $\bar{D}^+$ на себя, сохраняя направление на T ;
- б) якобиан отображения отличен от нуля;
- г) $\alpha_i'(t)$ ($t \in T$) принадлежит классу Гельдера, $H(\cdot)$;
- д) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $r_0 < 1$ такое, что, если $r_0 < r \leq 1$, то

$$\|\alpha_i'(rt) - \alpha_i'(t)\|_{H(\lambda)} < \varepsilon$$

для некоторого $\lambda > 0$ ($\|\cdot\|_{H(\lambda)}$ — норма в пространстве $H(\lambda)$).

Доказательство. Утверждение а) непосредственно следует из свойств функций $\omega_i(z)$ ($i=1, 2$) и из определения функции $\alpha_i(z)$. Якобиан отображения $z \mapsto \alpha_i z$ равен $1 - |\alpha_i|^2$, поэтому отличен от нуля. Учитывая, что функции $\omega'(z)$, $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ непрерывны на $\bar{D}^+$ и не обращаются в нуль, получаем доказательство утверждения б). Утверждения г) и д) также следуют из свойств отображающих функций $\omega(z)$, $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ (см. [17]).

2. Для произвольного $t \in T$ и $z \in D^+$ положим

$$\bar{K}_i(t, z) = \frac{\alpha_i'(t)}{\alpha_i(t) - \alpha_i(z)} - \frac{1}{t - z} \quad (i=1, 2). \quad (8)$$

Имеет место

Лемма 2. Пусть $t \in T$, $z \in D^+$. Существуют постоянные C_i ($i=1, 2$) такие, что

$$|\bar{K}_i(t, z)| < C_i \left(\frac{1 - |z|^2}{|t - z|^2} + \frac{1}{|t - z|^\delta} \right) \quad (i=1, 2), \quad (9)$$

где $\delta < 1$.

Доказательство. Из (8) имеем

$$\bar{K}_l(t, z) = \frac{a'_l(t)(t-z) - a_l(t) + z(z)}{(a_l(t) - a_l(z))(t-z)}.$$

Полагая $z = r\tau$, где $|\tau| = 1$, числитель этого выражения представим в следующем виде:

$$a'_l(t)(t-\tau) + a'_l(t)(\tau-r\tau) + a_l(\tau) - a_l(t) + a_l(r\tau) - a_l(\tau).$$

Так как

$$a'_l(t)(t-\tau) = - \int_t^{\tau} a'_l(u) du, \quad a_l(\tau) - a_l(t) = \int_t^{\tau} a'_l(u) du,$$

то

$$a'_l(t)(t-z) - a_l(t) + a_l(z) = a'_l(t)(\tau-r\tau) + a_l(r\tau) - a_l(\tau) + \int_t^{\tau} (a'_l(u) - a'_l(t)) du. \quad (10)$$

В силу леммы 1 для некоторого $\delta_i > 0$ имеет место

$$|a'_l(u) - a'_l(t)| < C_i |u-t|^{\delta_i} \quad (C_i = \text{const}),$$

поэтому

$$\left| \int_t^{\tau} a'_l(u) - a'_l(t) du \right| < \int_t^{\tau} |a'_l(u) - a'_l(t)| |du| < C_i \int_t^{\tau} |u-t|^{\delta_i} ds < \\ < C_i |\tau-t|^{1+\delta_i} \leq C_i (1-r)^{1+\delta_i} + |t-r\tau|^{1+\delta_i},$$

где $C_i (i = 2, 3, 4)$ — некоторые постоянные. Учитывая, что

$$|a'_l(t)(\tau-r\tau)| < \text{const} (1-r), \quad |a_l(r\tau) - a_l(\tau)| < \text{const} (1-r),$$

из (10) получим

$$|a'_l(t)(t-z) - a_l(t) + a_l(z)| < \text{const} (1-|z| + |t-z|^{1+\delta_i}). \quad (11)$$

Так как согласно лемме 1 якобиан отображения $\alpha(z)$ отличен от нуля, то

$$|a_l(t) - a_l(z)| > \text{const} |t-z|. \quad (12)$$

Теперь из (11) и (12) следует оценка (9). Лемма доказана.

3. Введем в рассмотрение операторы

$$(T_l g)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_r^1 \bar{K}_l(\tau, z) g(\tau) d\tau \quad (l=1, 2), \quad g(\tau) \in L^1(T).$$

Имеет место

Лемма 3. Для любого $g \in L^1(T)$ функция $(T_l g)(z)$ удовлетворяет условиям:

$$a) \quad \|(T_l g)(r\tau)\|_1 \leq C \|g\|_1 \quad (0 < r \leq 1),$$

где C — постоянная, не зависящая от g и r ;

б) если $(T_l^n g)(t) = (T_l (T_l^{n-1} g))(t)$, $t \in T$, то для некоторого целого n функция $(T^n g)(t)$ принадлежит классу Гельдера.

$$\gamma) \lim_{r \rightarrow 1-0} \|(T_r g)(rt) - (T_r g)(t)\|_1 = 0.$$

Доказательство. Утверждение а) леммы следует из оценки (9). Так как $\alpha(t)$ принадлежит классу Гельдера, то (см. [18])

$$\left| \frac{\alpha'_t(\tau)}{\alpha_t(\tau) - \alpha_t(t)} - \frac{1}{\tau - t} \right| \leq \frac{C}{|\tau - t|^\beta} \quad (\beta < 1),$$

где C не зависит от t и τ . Из этой оценки следует доказательство утверждения б). Для доказательства утверждения г) рассмотрим последовательность функций $g_n(t)$ из класса Гельдера такую, что $\|g_n - g\|_1 \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$. Из определения функции $(T_r g)(z)$ будем иметь

$$\|(T_r g)(rt) - (T_r g)(t)\|_1 \leq \|(T_r(g_n - g))(rt)\|_1 + \|(T_r g_n)(rt) - (T_r g_n)(t)\|_1.$$

Из утверждения а) этой леммы следует, что

$$\|(T_r(g_n - g))(rt)\|_1 \leq \text{const} \|g_n - g\|_1.$$

Так как функции $g_n(t)$ из класса Гельдера, то функции $(T_r g_n)(z)$ также из класса Гельдера на $\bar{D}^+$. Поэтому, применяя формулы Сохоцкого—Племеля легко убедиться, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|(T_r g_n)(rt) - (T_r g_n)(t)\|_1 = 0.$$

Утверждение д) леммы доказано.

4. Пусть $A(r, t)$, $0 < r \leq 1$, $t \in T$, матрица с элементами $a_{ij}(r, t)$ ($i = 1, 2, j = 1, 2$). Так как $\det A(r, t) = 2ir(\mu_2 - \mu_1)|\omega'(rt)|^2$, то $\det A(r, t) \neq 0$, для любого r ($0 < r \leq 1$). Положим $\Delta = \det A(1, t)$, $b_{ij}(t) = A_{ij}(t)\Delta^{-1}$, где $A_{ij}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}(1, t)$ в матрице $A(1, t)$. Далее обозначим

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_j(z) = \psi_j(g_1, g_2, z) = & \frac{1}{\pi i} \int_r \frac{b_{1j}(\beta_j(\tau))g_1(\beta_j(\tau))}{\tau - z} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_r \frac{b_{2j}(\beta_j(\tau))g_2(\beta_j(\tau))}{\tau - z} d\tau, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\beta_j(t)$ — функция, обратная к $z_j(t)$ ($j = 1, 2$).

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $g_1(t), g_2(t) \in L^1(T)$. Тогда функции $\psi_j(z)$ ($j = 1, 2$) из (14) удовлетворяют граничным условиям

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left| \text{Re} \sum_{j=1}^2 a_{lj}(r, t) \psi_j(a_j(rt)) - (g_l(t) - (g_l^{(1)}(t))) \right| = 0 \quad (l=1, 2); \quad (15)$$

где функция $g_l^{(1)}(t)$ ($l = 1, 2$) определяется формулой

$$\begin{aligned} g_l^{(1)}(t) = G_l(g_1, g_2, t) = & \text{Re} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_r \frac{a_{lj}(1, \tau) - a_{lj}(1, t)}{a_j(\tau) - a_j(t)} b_{kj}(\tau) g_k(\tau) d\tau + \\ & + \text{Re} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_r k_j(t, \tau) g_l(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_r \frac{g_l(\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство. Из свойств функции $w'(z)$ (см. [17]) следует, что для некоторого $\delta_0 > 0$ имеет место оценка

$$|a_{lj}(r, t) - a_{lj}(1, t)| < \text{const} (1 - r)^{\delta_0}.$$

Так как

$$\|\psi_j(z_j(rt))\|_1 \leq \text{const} \ln(1 - r)^{-1},$$

то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|(a_{lj}(r, t) - a_{lj}(1, t)) \psi_j(z_j(rt))\|_1 = 0.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \text{Re} \sum_{j=1}^2 a_{lj}(1, t) \psi_j(z_j(rt)) - (g_l(t) - g_l^{(1)}(t)) \right\|_1 = 0.$$

Из определения функции $\psi_j(z)$ имеем

$$\begin{aligned} \text{Re} \sum_{j=1}^2 a_{lj}(1, t) \psi_j(z_j(rt)) &= \text{Re} \sum_{j=1}^2 a_{lj}(1, t) \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{b_{kj}(\tau) g_k(\tau) a'_j(\tau)}{a_j(\tau) - a_j(rt)} d\tau = \\ &= \text{Re} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{lj}(1, t) - a_{lj}(1, \tau)}{a_j(\tau) - a_j(rt)} b_{kj}(\tau) g_k(\tau) d\tau + \\ &+ \text{Re} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{lj}(1, \tau) b_{kj}(\tau) g_k(\tau) a'_j(\tau)}{a_j(\tau) - a_j(rt)} d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как

$$\sum_{j=1}^2 a_{lj}(1, \tau) b_{kj}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } l = k, \\ 0, & \text{при } l \neq k. \end{cases}$$

то из (17) следует

$$\begin{aligned} \text{Re} \sum_{j=1}^2 a_{lj}(1, t) \psi_j(z_j(rt)) &= \text{Re} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{lj}(1, t) - a_{lj}(1, \tau)}{a_j(\tau) - a_j(rt)} \times \\ &\times b_{kj}(\tau) g_k(\tau) d\tau - \text{Re} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{lj}(1, \tau) b_{kj}(\tau) g_k(\tau) a'_j(\tau)}{a_j(\tau) - a_j(rt)} d\tau = \\ &= J_1(r, t) - J_2(r, t) + \text{Re} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{g_l(\tau)}{\tau - rt} d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая оценку

$$|a_{lj}(1, \tau) - a_{lj}(1, t)| < \text{const} |\tau - t|^{\delta_0} \quad (\delta_0 > 0),$$

для любого r , $0 < r < 1$ будем иметь

$$\left| \frac{a_{lj}(1, t) - a_{lj}(1, \tau)}{a_j(\tau) - a_j(t)} \right| \leq \text{const} \frac{1}{|\tau - rt|^{\delta_0}}.$$

Используя формулы Сохоцкого—Племеля и учитывая, что функции $J_1(r, t)$ ($t \in T$, $0 < r \leq 1$) равномерно ограничено в $L^p(T)$ для некоторого $p > 1$, получим

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| J_1(r, t) - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{a_{kj}(1, t) - a_{kj}(1, \tau)}{a_j(\tau) - a_j(t)} b_{kj}(\tau) g_k(\tau) d\tau \right\|_1 = 0.$$

Из леммы 3 также имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| J_2(r, t) - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_T k_j(\tau, t) g_l(\tau) d\tau \right\|_1 = 0.$$

Теперь, учитывая, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{g_l(\tau)}{\tau - rt} d\tau - g_l(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{g_l(\tau)}{\tau} d\tau \right\|_1 = 0,$$

завершаем доказательство теоремы.

5. Пусть $g_1(t), g_2(t) \in L^1(T)$ и функции $g_1^{(1)}(t), g_2^{(1)}(t)$ определяются формулой (16) $g_i^{(1)} = G_i(g_1, g_2, t)$ ($i = 1, 2$). Аналогично можно определить функции $g_i^{(2)}(t) = G_i(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}(t))$ ($i = 1, 2$) и т. д. Через $g_i^{(n)}(t)$ ($i = 1, 2$) обозначим функции, полученные на n -ом шагу. Положим $\psi_j^{(k+1)}(z) = \psi_j(g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, z)$. Согласно теореме 1

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{ij}(r, t) \psi_j^{(k)}(a_j(rt)) - (g_i^{(k)}(t) - g_i^{(k+1)}(t)) \right\|_1 = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (19)$$

Применяя оценку (18) и лемму 3 легко установить, что для некоторого целого числа n_0 функции $g_i^{(n_0+1)}(t)$ ($i = 1, 2$) принадлежат классу Гельдера. Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_j(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{b_{1j}(\beta_j(\tau)) \tilde{g}_1(\beta_j(\tau))}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{b_{2j}(\beta_j(\tau)) \tilde{g}_2(\beta_j(\tau))}{\tau - z} d\tau \quad (l = 1, 2), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\tilde{g}_i(t) = g_i(t) + g_i^{(1)}(t) + \dots + g_i^{(n_0)}(t) \quad (i = 1, 2). \quad (21)$$

Из теоремы 1 и из (20) непосредственно следует

Теорема 2. Функция $\tilde{\Psi}_j(z)$ ($j = 1, 2$) из (20) удовлетворяют граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{ij}(r, t) \tilde{\Psi}_j(a_j(rt)) - (g_i(t) - g_i^{(n_0+1)}(t)) \right\|_1 = 0 \quad (i = 1, 2),$$

т.д. $g_i^{(n_0+1)}(t) = G_i(g_1^{(n_0)}, g_2^{(n_0)}, t)$ ($i = 1, 2$) принадлежат классу Гельдера.

§ 2. Задача (1)–(2) с граничными функциями
из класса Гельдера

1. Для произвольного r ($0 < r \leq 1$) через Γ_{kr} обозначим замкнутую кривую в единичном круге D^+ , определяемую параметрическим соотношением $\bar{z} = a_k(rt)$, где t — комплексный параметр, $t \in T$. Функцию, конформно отображающую внутренность кривой Γ_{kr} ($k = 1, 2$) на единичный круг, обозначим через $\omega_{kr}(z)$. $\omega_{kr}(0) = 0$, $\omega'_{kr}(0) > 0$. Положим

$$\bar{a}_k(r, t) = \omega_{kr}(a(rt)) \quad (k = 1, 2), \quad (22)$$

$$\bar{\beta}_k(r, t) = \bar{a}_k^{-1}(r, t) \quad (k = 1, 2),$$

$$h_k(r, t, \tau) = \frac{\bar{a}_k(r, \tau)}{\bar{a}_k(r, \tau) - \bar{a}_k(r, t)} - \frac{1}{\tau - t}, \quad t \in T, \tau \in T.$$

Учитывая лемму 1 будем иметь (см. [19])

$$|h_k(r, t, \tau)| < C_1 |t - \tau|^{-\mu} \quad (\mu < 1),$$

$$h_k(r, t, \tau) - h_k(1, t, \tau) = \tilde{h}_k(r, t, \tau) |t - \tau|^{-\mu} \quad (\mu < 1), \quad (23)$$

где

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|\tilde{h}_k(r, t, \tau)\|_{H(\mu_1)} = 0$$

по обоим переменным $t, \tau \in T$ для некоторого $\mu_1 > 0$.

2. Докажем теорему.

Теорема 3. Пусть функции $\Phi_j(z)$ ($j = 1, 2$) удовлетворяют граничному условию (7). Если функции $g_k(t)$ ($k = 1, 2$) из класса Гельдера на T , то функции $\Phi_j(z)$ — из класса Гельдера на $D^+ \cup T$.

Доказательство. В предположении, что функции $\Phi_j(z)$ ($j = 1, 2$) удовлетворяют условию $|\Phi_j(rt)|(1-r)| \rightarrow 0$, $t \in T$ равномерно при $r \rightarrow 1-0$ (эта теорема доказана в работе [9]), положив $\Phi_{jr}(z) = \Phi_j(\omega_{jr}^{-1}(z))$, условия (7) представим в виде

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{kj}(r, t) \Phi_{jr}(\bar{a}_j(r, t)) - g_k(t) \right|_1 = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (24)$$

где $\bar{a}_j(r, t)$ ($j = 1, 2$) определяются по формуле (22). Обозначив

$$R_k(r, t) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{kj}(r, t) \Phi_{jr}(\bar{a}_j(r, t)) - g_k(t) \quad (k = 1, 2),$$

получим

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|R_k(r, t)\|_1 = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 a_{kj}(r, t) \Phi_{jr}(\bar{a}_j(r, t)) + \sum_{j=1}^2 \frac{a_{kj}(r, t)}{\bar{a}_j(r, t) - \bar{a}_j(r, t)} \Phi_{jr}(\bar{a}_j(r, t)) = \\ = 2g_k(t) + 2R_k(r, t) \quad (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Далее пусть $\Phi_{jr}^+(z) = \Phi_{jr}(z)$, $z \in D^+$ и $\Phi_{jr}^-(z) = \overline{\Phi_{jr}(z^{-1})}$, $|z| > 1$. Тогда предыдущие равенства примут вид

$$\Phi_k^+(\tilde{a}_k(r, t)) = \sum_{j=1}^2 m_{kj}^{(0)}(r, t) \Phi_{jr}^-(\tilde{a}(r, t)) + g_k^{(1)}(r, t) + R_k^{(1)}(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (26)$$

где $m_{kj}^{(0)}(r, t)$ — элементы матрицы $M(r, t) = -(A(r, t))^{-1} \overline{A(r, t)}$, а

$$g_k^{(1)}(r, t) = 2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{kj}^*(r, t) g_j(t), \quad R_k^{(1)}(r, t) = 2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{kj}^*(r, t) R_j(r, t), \quad (27)$$

причем $\alpha_{kj}^*(r, t)$ — элементы матрицы $(A(r, t))^{-1}$.

В дальнейшем, если $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ — некоторые функции на D^+ и D^- ($D^- = \{z; |z| > 1\}$), то под $\varphi(z)$ будем понимать функцию

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi^+(z), & z \in D^+, \\ \varphi^-(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

Если же $\varphi(z)$ определена на $D^+ \cup D^-$, то через $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ будем понимать сужения этой функции на D^+ и D^- соответственно.

Пусть теперь

$$\psi_k^+(\tilde{a}_k(r, t)) = \sum_{j=1}^2 \tilde{m}_{kj}^{(0)}(r, t) \psi_j^-(\tilde{a}_j(r, t)) \quad (k=1, 2, 0 < r \leq 1), \quad (28)$$

где $\tilde{m}_{kj}^{(0)}(r, t)$ — элементы матрицы $(M(r, t))^{-1}$, сопутствующей однородной задаче (26). Наряду с задачей (28) для любого целого $n > 0$ будем рассматривать также задачи

$$\psi_k^+(\tilde{a}_k(r, t)) = \sum_{j=1}^2 \tilde{m}_{kj}^{(n)}(r, t) \psi_j^-(\tilde{a}_j(r, t)) \quad (k=1, 2), \quad (29)$$

где $\tilde{m}_{kj}^{(n)}(r, t) = \tilde{m}_{kj}^{(0)}(r, t) (\tilde{a}_j(r, t))^{-n}$ ($0 < r < 1$) — элементы матрицы $\tilde{M}^{(n)}(r, t)$ ($n \geq 1$).

Докажем, что если $r = 1$, то для некоторого целого $n_0 \geq 0$ задача (29) нетривиальных решений в классе функций обращающихся в нуль на бесконечности не имеет. Задача (28) при $r = 1$ в указанном классе имеет конечное число линейно независимых решений (см. [20]). Пусть $\Phi^{(k)}(z) = (\Phi_1^{(k)}(z), \Phi_2^{(k)}(z))$ ($k=1, 2, \dots, m$) — эти решения. Через n_k ($k=1, 2, \dots, m$) обозначим порядок нуля вектор-функции $\Phi^{(k)}(z)$ на бесконечности. Возьмем целое число n_0 так, чтобы имело место $n_0 > \max\{n_k, k=1, 2, \dots, m\}$. Теперь, если задача (29) при $r = 1$ имеет отличное от нуля решение $\tilde{\Phi}(z)$ ($\tilde{\Phi}(\infty) = 0$), то вектор-функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(z), & z \in D^+, \\ z^{-n_0} \tilde{\Phi}(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

будет решением задачи (28) при $r = 1$, что противоречит выбору числа n_0 .

Далее положим

$$\Phi_{n,jr}(z) = \begin{cases} z^{-n} \Phi_{jr}^+(z) - P_{n,jr} \left(\frac{1}{z} \right), & z \in D^+, \\ \Phi_{jr}^-(z) & z \in D^-, \end{cases}$$

где $P_{n,jr}(z^{-1})$ — главная часть функции $z^{-n} \Phi_{jr}^+(z)$ в точке $z=0$. Ясно, что функции $\Phi_{n,jr}(z)$ ($j=1, 2$) удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{n,k,r}^+(\bar{a}_k(r, t)) = & \sum_{j=1}^2 m_{kj}^{(n)}(r, t) \bar{\Phi}_{n,jr}^-(\bar{a}_j(r, t)) + g_k^{(2)}(r, t) + \\ & + R_k^{(2)}(r, t) \quad (k=1, 2), \end{aligned} \quad (30)$$

где $m_{kj}^{(n)}(r, t)$ — элементы матрицы $M^{(n)}(r, t) = (\bar{M}^{(n)}(r, t))^{-1}$:

$$M^{(n)}(r, t) = \begin{pmatrix} (\bar{a}_1(r, t))^n & 0 \\ 0 & (\bar{a}_2(r, t))^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11}^{(0)}(r, t) & m_{12}^{(0)}(r, t) \\ m_{21}^{(0)}(r, t) & m_{22}^{(0)}(r, t) \end{pmatrix},$$

$$g_k^{(2)}(r, t) = g_k^{(1)}(r, t) (\bar{a}_k(r, t))^{-n} + P_{r,k,r}(\bar{a}_k^{-1}(r, t)),$$

$$R_k^{(2)}(r, t) = R_k^{(1)}(r, t) (\bar{a}_k(r, t))^{-n}. \quad (31)$$

Так как функция $\bar{\Phi}_{n,jr}^-(z)$ ($j=1, 2$) ограничена на бесконечности и $\bar{\Phi}_{n,jr}^-(\infty) = \Phi_j(0)$, то обозначив

$$\rho_k(r, t) = \bar{\Phi}_{n,k,r}^-(t) - \Phi_k(0) \quad (k=1, 2), \quad (32)$$

из (30) получим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{n,k,r}^+(z) = & \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{m_{kj}^{(n)}(r, \bar{\beta}_k(r, \tau)) \rho_j(r, \gamma_{jk}(r, \tau))}{\tau - z} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_k^{(2)}(r, \bar{\beta}_k(r, \tau))}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_k^{(2)}(r, \bar{\beta}_2(r, \tau))}{\tau - z} d\tau, \end{aligned}$$

$$\bar{\Phi}_{n,k,r}^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho_k(r, \tau)}{\tau - z} d\tau + \Phi_k(0) \quad (k=1, 2), \quad (33)$$

где $\gamma_{jk}(r, \tau) = \bar{a}_j(r, \bar{\beta}_k(r, \tau))$. Применяя формулы Сохоцкого—Племеля можно установить (см. [20]), что функции $\rho_k(r, t)$ ($k=1, 2$) удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A_{kj}(r, t, \tau) \rho_j(r, \bar{a}_j(r, \tau))}{\tau - t} d\tau = g_k^{(3)}(r, t) + R_k^{(3)}(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (34)$$

где

$$A_{kj}(r, t, \tau) = (\tau - t) \left(\frac{m_{kj}^{(n)}(r, \tau) \bar{a}_k(r, \tau)}{\bar{a}_k(r, \tau) - \bar{a}_k(r, t)} + \frac{m_{kj}^{(n)}(r, t) \bar{a}_j(r, \tau)}{\bar{a}_j(r, \tau) - \bar{a}_j(r, t)} \right),$$

$$g_k^{(3)}(r, t) = \sum_{j=1}^2 \Phi_j(0) m_{kj}^{(n)}(r, t) + g_k^{(2)}(r, t) - \frac{1}{\pi i} \int_T^{\tau} \frac{g_k^{(2)}(r, \tau) \tilde{a}_k(r, t)}{\tilde{a}_k(r, \tau) - \bar{a}_k(r, t)} d\tau, \quad (35)$$

$$R_k^{(3)}(r, t) = R_k^{(2)}(r, t) - \frac{1}{\pi i} \int_T^{\tau} \frac{R_k^{(2)}(r, \tau) \tilde{a}'_k(r, \tau)}{\tilde{a}_k(r, \tau) - \bar{a}_k(r, t)} d\tau.$$

Обозначим

$$M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau) = m_{kj}^{(n)}(r, \tau) \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\tilde{a}'_k(r, \tau)}{\tilde{a}_k(r, \tau) - \bar{a}_k(r, t)} \right) + m_{kj}^{(n)}(r, t) \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\tilde{a}'_j(r, \tau)}{\tilde{a}_j(r, \tau) - \bar{a}_j(r, t)} \right) + \frac{m_{kj}^{(n)}(r, t) - m_{kj}^{(n)}(r, \tau)}{\tau - t}.$$

Систему (34) представим в виде

$$\sum_{j=1}^2 \frac{m_{kj}^{(n)}(r, t)}{\pi i} \int_T^{\tau} \frac{\rho_j(r, \bar{a}_j(r, \tau))}{\tau - t} d\tau - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_T^{\tau} M_{kj}^{(1)}(r, t, \tau) \rho_j(r, \tilde{a}_j(r, \tau)) d\tau = g_k^{(3)}(r, t) + R_k^{(3)}(r, t) \quad (k=1, 2).$$

Умножим последнюю систему на матрицу $\tilde{M}^{(n)}(r, t)$. Получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_T^{\tau} \frac{\rho_k(\tau, \tilde{a}_k(r, \tau))}{\tau - t} d\tau - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_T^{\tau} M_{kj}^{(n)}(r, t, \tau) \rho_j(r, \tilde{a}_j(r, \tau)) d\tau = \sum_{j=1}^2 \tilde{m}_{kj}^{(n)}(r, t) g_j^{(3)}(r, t) + \sum_{j=1}^2 \tilde{m}_{kj}^{(n)}(r, t) R_j^{(3)}(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (36)$$

где $M_{kj}^{(2)}(r, t, \tau)$ и $\tilde{m}_{kj}^{(n)}(r, t)$ — элементы матриц $\tilde{M}^{(n)}(r, t) \cdot M^{(1)}(r, t, \tau)$ и $\tilde{M}^{(n)}(r, t)$ соответственно.

Умножив теперь (36) на $(\pi i (t - u))^{-1}$ и интегрируя в смысле главного значения Коши, будем иметь

$$\rho_k(r, \tilde{a}_k(r, u)) - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_T^{\tau} M_{kj}^{(3)}(r, u, \tau) \rho_j(r, \tilde{a}_j(r, \tau)) d\tau = g_k^{(4)}(r, u) + R_k^{(4)}(r, u), \quad (37)$$

где

$$M_{kj}^{(3)}(r, u, \tau) = \frac{1}{\pi i} \int_T^{\tau} \frac{M_{kj}^{(2)}(r, t, \tau)}{t - u} dt,$$

$$g_k^{(4)}(r, u) = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{m}_{kj}^{(3)}(r, t) g_j^{(3)}(r, t)}{r-u} dt,$$

$$R_k^{(4)}(r, u) = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{m}_{kj}^{(3)}(r, t) R_j^{(3)}(r, t)}{t-u} dt. \quad (38)$$

После применения интегрального преобразования с ядром $M^{(3)}(r, t, \tau)$ в системе (37) конечное число раз получим

$$\rho_k(r, \bar{a}_k(r, t)) - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau) \rho_j(r, \bar{a}_j(r, \tau)) d\tau =$$

$$= g_k^{(4)}(r, t) + R_k^{(4)}(r, t) + \bar{f}_k(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (39)$$

где функции $M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau)$ принадлежат классу Гельдера по обоим переменным и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} [\bar{f}_k(r, t)]_p = 0 \quad (40)$$

для некоторого $p > 1$. Далее, из (39) имеем

$$\rho_k(r, \bar{a}_k(r, t)) - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau) \rho_j(r, \bar{a}_j(r, \tau)) d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau) - M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau)) \rho_j(r, \bar{a}_j(r, \tau)) d\tau +$$

$$+ g_k^{(4)}(r, t) + R_k^{(4)}(r, t) + \bar{f}_k(r, t) \quad (k=1, 2). \quad (41)$$

Пусть теперь $\varphi_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$), $\varphi_k(t) \in H(a)$, $t \in T$ — полная ортонормированная система. Для любого $\varepsilon > 0$ матрицу $M^{(4)}(1, t, \tau)$ можно представить в виде

$$M^{(4)}(1, t, \tau) = \sum_{p=1}^N \varphi_p(t) G_p(\tau) + \bar{M}^{(4)}(1, t, \tau), \quad (42)$$

где $G_p(\tau)$ ($p=1, 2, \dots, N$) — матрицы второго порядка с элементами из класса Гельдера на T , а матрица $\bar{M}^{(4)}(1, t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k, j=1}^2 |M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau)| < \varepsilon. \quad (43)$$

Учитывая (42), систему (41) можно представить в виде

$$\rho_k(r, \bar{a}_k(r, t)) - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \bar{M}_{kj}^{(4)}(1, t, \tau) \rho_j(r, \bar{a}_j(r, \tau)) d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^2 c_{kj}(r) \varphi_j(t) + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (M_{kj}^{(4)}(r, t, \tau) -$$

$$-M_{kj}^{(4)}(1, t, \tau)) \rho_j(r, \tilde{a}(r, \tau)) d\tau + g_k^{(4)}(r, t) + R_k^{(4)}(r, t) + \tilde{f}_k(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (44)$$

где вектор $c_p(r) = (c_{p1}(r), c_{p2}(r))$ определяется по формуле

$$c_p(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G_p(r) \rho(r, \tilde{a}(r, \tau)) d\tau, \quad p=1, 2, \dots, N, \quad 0 < r < 1 \quad (45)$$

$(\rho(r, \tilde{a}(r, \tau)) = (\rho_1(r, \tilde{a}_1(r, \tau)), \rho_2(r, \tilde{a}_2(r, \tau)))$ Пусть $\Omega(t, \tau) = \{\Omega_{kj}(t, \tau), k=1, 2, j=1, 2\}$ — матрица резольвенты уравнения (44). Если $\varepsilon > 0$ достаточно малая величина, то из (43) следует что (44) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho_k(r, \tilde{a}_k(r, t)) &= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} M_{kj}^{(5)}(r, t, \tau) \rho_j(r, \tilde{a}_j(r, \tau)) d\tau = \\ &= \sum_{p=1}^N c_{pk}(r) \varphi_{pk}(t) + g_k^{(5)}(r, t) + R_k^{(5)}(r, t) + \tilde{f}_k^{(1)}(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (46) \end{aligned}$$

где

$$\varphi_{pk}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\Omega_{k1}(t, \tau) + \Omega_{k2}(t, \tau)) \varphi_p(\tau) d\tau + \varphi_p(t) \quad (k=1, 2),$$

$$M^{(5)}(r, t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega(t, u) (M^{(4)}(r, u, \tau) - M^{(4)}(1, u, \tau)) du,$$

$$\begin{aligned} g^{(5)}(r, t) &= g^{(4)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega(t, u) g^{(4)}(r, u) du, \quad \tilde{f}^{(1)}(r, t) = \tilde{f}(r, t) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega(t, u) \tilde{f}(r, u) du, \quad R^{(5)}(r, t) = R^{(4)}(r, t) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega(t, u) R^{(4)}(r, u) du. \quad (47) \end{aligned}$$

При этом функции $\varphi_{pk}(t)$ ($p=1, 2, \dots, N$) линейно независимы при фиксированном k ($k=1, 2$). Наконец, если $\Omega(r, t, \tau) = \{\Omega_{kj}(r, t, \tau), k=1, 2, j=1, 2\}$ — матрица резольвенты системы (44), то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \rho_k(r, \tilde{a}_k(r, t)) &= \sum_{p=1}^N c_{pk} \varphi_{pk}(r, t) + g_k^{(6)}(r, t) + R_k^{(6)}(r, t) + \\ &+ \tilde{f}^{(2)}(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (48) \end{aligned}$$

где

$$\varphi_{pk}(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_{k1}(r, t, \tau) \varphi_{p1}(\tau) + \Omega_{k2}(r, t, \tau) \varphi_{p2}(\tau) d\tau + \varphi_{pk}(t),$$

$$g^{(6)}(r, t) = g^{(5)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega(r, t, u) g^{(5)}(r, u) du,$$

$$\begin{aligned} \bar{f}^{(2)}(r, t) &= \bar{f}^{(1)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_T \Omega(r, t, u) \bar{f}^{(1)}(r, u) du, \\ R^{(6)}(r, t) &= R^{(5)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_T \Omega(r, t, u) R^{(5)}(r, u) du. \end{aligned} \quad (49)$$

Для $\varphi_{\rho k}(r, t)$ равномерно на T

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \varphi_{\rho k}(r, t) = \varphi_{\rho k}(t). \quad (50)$$

Из (48) получим

$$\begin{aligned} \rho_k(r, t) &= \sum_{p=1}^N c_{\rho k}(r) \varphi_{\rho k}(r, \bar{\beta}_k(r, t)) + g_k^{(6)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) + \\ &+ R_k^{(6)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) + \bar{f}_k^{(2)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) \quad (k=1, 2). \end{aligned} \quad (51)$$

Так как согласно (22)

$$\left| \frac{\bar{\beta}_k(r, \tau) - \tilde{\beta}_k(r, \tau)}{\tilde{\beta}_k(r, \tau) - \tilde{\beta}_k(r, t)} - \frac{1}{\tau - t} \right| < \frac{\text{const}}{|\tau - t|} \quad (\lambda < 1, k=1, 2, 0 < r \leq 1),$$

то учитывая свойства [матрицы $\Omega(t, u)$, $\Omega(r, t, u)$, функцию $R_k^{(6)}(r, t)$ можно представить в виде

$$R_k^{(6)}(r, \tilde{\beta}_k(r, t)) = R_k^{(7)}(r, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{R_k^{(7)}(r, \tau)}{\tau - t} d\tau + R_k^{(8)}(r, t) \quad (k=1, 2), \quad (52)$$

где функции $R_k^{(7)}(r, t)$ и $R_k^{(8)}(r, t)$ можно явно выписать и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|R_k^{(7)}(r, t)\|_1 = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|R_k^{(8)}(r, t)\|_p = 0 \quad (53)$$

для некоторого $p > 1$. Что касается вектор-функций $g^{(6)}(r, \tilde{\beta}(r, t))$, то учитывая соотношение (23), легко установить, что существует вектор-функция $g^{(6)}(t)$ из класса Гельдера на T такая, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|g^{(6)}(r, \tilde{\beta}(r, t)) - g^{(6)}(t)\|_{H(\lambda)} = 0 \quad (\lambda > 0). \quad (54)$$

Из (40) и (49) для некоторого $p > 1$ также имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|f(r, \tilde{\beta}(r, t))\|_p = 0. \quad (55)$$

Докажем, что множество чисел $c_{\rho k}(r)$ ($p=1, 2, \dots, N, k=1, 2, 0 < r < 1$) (определенных формулами (45)) ограничено. Действительно, предполагая что эти числа не ограничены, обозначим

$$\lambda(r) = \max |c_{\rho k}(r)| \quad (p=1, 2, \dots, N; k=1, 2).$$

Подставляя $\rho(r, t)$ из (51) в выражение (43) для функции $\Phi_{\rho, r}(z)$ и разделив полученное равенство на $\lambda(r)$ с учетом (52) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(r)} \Phi_{n_k r}^-(z) = & - \sum_{p=1}^N \frac{\sigma_{pk}(r)}{\lambda(r)} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{pk}(r, \bar{\beta}_k(r, \tau))}{\tau - z} d\tau - \\ & - \frac{1}{\lambda(r)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_k^{(6)}(r, \tilde{\beta}_k(r, \tau)) d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_k^{(7)}(r, \tau)}{\tau - z} d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_k^{(8)}(r, \tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{f}_k^{(9)}(r, \bar{\beta}_k(r, \tau))}{\tau - z} d\tau + \Phi_k(0) \right). \quad (56) \end{aligned}$$

Выберем последовательность r_k , $r_k \rightarrow 1$ так, чтобы имели

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(r_k) = \infty.$$

Не теряя общности, можно предполагать, что сходятся также последовательности $c_{pk}(r_k(\lambda(r_k)))^{-1}$ ($p=1, 2, \dots, N$, $k=1, 2$) и

$$\lim_{r_k \rightarrow 1} \frac{c_{pk}(r_k)}{\lambda(r_k)} = \lambda_{pk}.$$

Переходя к пределу в (56) при $r_k \rightarrow 1$ и учитывая (53), (54), (55), получим

$$\int_{\Gamma} \sum_{p=1}^N \lambda_{pk} \varphi_{pk}(\tilde{\beta}_k(t, \tau)) \frac{d\tau}{\tau - z} = 0, \quad z \in D^-, \quad k=1, 2. \quad (57)$$

Обозначим

$$\varphi_k^+(t) = \sum_{p=1}^N \lambda_{pk} \varphi_{pk}(\tilde{\beta}_k(1, \tau)) \quad (k=1, 2). \quad (58)$$

Из (57) следует, что функции $\varphi_k^+(t)$ ($k=1, 2$) аналитичны в D^+ . Так как среди чисел λ_{pk} есть числа, равные по модулю единице и функции $\varphi_{pk}(t)$ ($p=1, 2, \dots, N$), для любого k ($k=1, 2$) линейно независимы, то вектор-функция $\varphi^+(t) = (\varphi_1^+(t), \varphi_2^+(t))$ отлична от нуля.

Подставляя теперь функцию $\rho_k(r, t)$ ($k=1, 2$) из (51) в выражение (33) для функции $\Phi_{n_k r}^+(z)$ и учитывая, что равномерно при $r \rightarrow 1 - 0$ $m_k^{(n_k)}(r, \bar{\beta}_k(r, \tau)) \rightarrow m_k^{(n_k)}(1, \tilde{\beta}_k(1, \tau))$, аналогично получим

$$\sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} m_k^{(n_k)}(1, \tilde{\beta}_k(1, \tau)) \varphi_j^+(\gamma_{jk}(1, \tau)) \frac{d\tau}{\tau - z} = 0, \quad z \in D^+. \quad (59)$$

Из равенства (58) следует, что функции

$$\psi_k^-(\tau) = \sum_{j=1}^2 m_k^{(n_k)}(1, \tilde{\beta}_k(1, \tau)) \varphi_j^+(\gamma_{jk}(1, \tau)) \quad (k=1, 2) \quad (60)$$

аналитичны в D^- и $\psi_k^-(0) = 0$. Из (59) также следует, что

$$\varphi_k^+(\alpha_k(1, t)) = \sum_{j=1}^2 \tilde{m}_k^{(n_k)}(1, t) \psi_j^-(\alpha_j(1, t)), \quad k=1, 2.$$

Тем самым задача (29) при $n = n_0$, $r = 1$ имеет отличное от нуля решение, равное нулю на бесконечности. Это противоречие доказывает наше предположение о коэффициентах $c_{pk}(r)$ ($p = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2$, $0 < r < 1$).

Теперь выберем последовательность r_l ($l = 1, 2, \dots$), $r_l < 1$, так, чтобы последовательности $c_{pk}(r_l)$ имели пределы для любого $p = 1, 2, \dots, N$ и $k = 1, 2$ при $r_l \rightarrow 1$. Пусть

$$\lim_{r_l \rightarrow 1} c_{pk}(r_l) = c_{pk} \quad (p = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2).$$

Подставляя функцию $\rho_k(r, t)$ из (51) в формулу (33), получим

$$\begin{aligned} \Phi_{n_0, r_l}^+(z) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^N \frac{c_{pk}(r_l)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau)) \varphi_{pj}(r_l, \gamma_{jk}(r_l, \tau))}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau)) g_j^{(6)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau)) R_j^{(6)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{m_{kj}^{(n_0)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau)) \tilde{f}_j^{(2)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g_k^{(n_0)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R_k^{(2)}(r_l, \tilde{\beta}_k(r_l, \tau))}{\tau - z} d\tau. \end{aligned} \quad (61)$$

Так как равномерно при $z \in D^+$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \omega_{jr}(z) = z,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \Phi_{n_0, r}(z) = z^{-n_0} \Phi_k(z) - P_{n_0, k} \left(\frac{1}{z} \right), \quad z \in D^+,$$

где $P_{n_0, k}(z^{-1})$ — главная часть функции $z^{-n_0} \Phi_k(z)$ в точке $z = 0$. Теперь, учитывая соотношения (52)–(55) и переходя к пределу в (61), при $r_k \rightarrow 1$, получим

$$\begin{aligned} z^{-n_0} \Phi_k(z) - P_{n_0, k} \left(\frac{1}{z} \right) &= \sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^N \frac{c_{pk}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{m_{kj}^{(n_0)}(1, \tilde{\beta}_k(1, \tau)) \varphi_{pj}(1, \gamma_{jk}(1, \tau))}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{m_{kj}^{(n_0)}(1, \tilde{\beta}_k(1, \tau)) g_j^{(6)}(\tilde{\beta}_k(1, \tau))}{\tau - z} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g_k^{(2)}(1, \tilde{\beta}_k(1, \tau))}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+. \end{aligned}$$

Так как все функции $\varphi_{p,j}(t)$, $g_j^{(6)}(t)$, $g_j^{(7)}(1, t)$ ($p=1, 2, \dots, N$), $k=1, 2$) принадлежат классу Гельдера в T , то функции $\Phi_k(z)$ ($k=1, 2$) принадлежат классу Гельдера в $D^+ \cup T$. Теорема доказана.

§ 3. Исследование задачи (1)–(2)

1. Пусть $\tilde{\psi}_j(z)$ ($j=1, 2$) — функции из (20). Делая замену $\psi_j(z) = \tilde{\psi}_j(z) + \Phi_j(z)$ в (7) относительно новых искомых функций $\Phi_j(z)$ ($j=1, 2$) получим

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{kj}(r, t) \Phi_j(a_j(rt)) - g_k^{(n_0+1)}(t) \right\|_1 = 0 \quad (k=1, 2), \quad (62)$$

где $g_k^{(n_0+1)} = G_k(g_1^{(n_0)}, g_2^{(n_0)}, t)$ ($k=1, 2$) принадлежат классу Гельдера. Из теоремы 3 следует, что функции $\Phi_j(z)$ ($j=1, 2$), удовлетворяющие условиям (62), также принадлежат классу Гельдера на $D^+ \cup \Gamma$. Поэтому условия (62) можно понимать в обычном смысле

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 a_{kj}(1, t) \Phi_j(z_j(t)) = g_k^{(n_0+1)}(t) \quad (k=1, 2), \quad (63)$$

где $a_{kj}(1, t)$ определяются по формулами (5) при $r=1$. Применяя представление Товмаса (см. [21]), можем утверждать, что существует единственная голоморфная в D^+ функция $\tilde{\Phi}_j(z)$; принадлежащая классу Гельдера в $D^+ \cup \Gamma$ такая, что

$$\Phi_j(a_j(t)) = \tilde{\Phi}_j(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda_j(t, \tau) \tilde{\Phi}_j(\tau) d\tau \quad (j=1, 2),$$

где

$$\lambda_j(t, \tau) = \frac{a_j'(\tau)}{a_j(\tau) - a_j(t)} - \frac{1}{\tau - t}.$$

Тогда условия (63) можно представить в виде

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \left[a_{kj}(1, t) \tilde{\Phi}_j(t) + \int_{\Gamma} h_{kj}(t, \tau) \tilde{\Phi}_j(\tau) d\tau \right] = g_k^{(n_0+1)}(t) \quad (k=1, 2), \quad (64)$$

где $h_{kj}(t, \tau) = a_{kj}(1, t) \lambda_j(t, \tau)$.

Граничная задача (63) исследована в монографии [20]. Индекс задачи (64) определяется формулой

$$\kappa = 2 - \frac{1}{\pi} \Delta_{\Gamma} \arg \det A(1, t). \quad (65)$$

Пусть теперь κ_1 и κ_2 — индексы функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ соответственно. Легко проверить что

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{\Gamma} \arg \det (A(1, t)) = 2(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Тем самым индекс задачи (64) равен $2 - 2(\kappa_1 + \kappa_2)$. Доробот известно.

(см. [20]), что необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи (64) в классе Гельдера имеют вид.

$$\int_T g^{(n_0+1)}(t) \nu_k(t) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (66)$$

где $\nu_1(t), \nu_2(t), \dots, \nu_N(t)$ — некоторые действительные 2-мерные вектор-функции из класса Гельдера, являющиеся решениями некоторых систем интегральных уравнений: $g^{(n_0+1)}(t) \nu_k(t)$ — скалярное произведение векторов $g^{(n_0+1)}(t)$ и $\nu_k(t)$. Подставляя в (66) выражение для функции $g_{(t)}^{(n_0+1)}$, получим следующие условия разрешимости неоднородной задачи (7):

$$\int_T g(t) G_k(t) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (67)$$

где $G_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) — вполне определенные вектор-функции из класса Гельдера. Ясно, что условия (7) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (7).

Докажем, что условия (67) эквивалентны условиям

$$\int_T g(t) \nu_k(t) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (68)$$

Действительно, пусть $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in L^1(T)$ и удовлетворяет условиям (68). Тогда существует последовательность вектор-функций $g_n(t)$ из класса Гельдера, сходящаяся к вектор-функции $g(t)$ в смысле $L^1(T)$ и удовлетворяющая условиям (68). Следовательно для $g_n(t)$ задача (7) имеет решение. Поэтому вектор-функции $g_n(t)$ удовлетворяют условиям

$$\int_T g_n(t) G_k(t) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим условия (67). Пусть теперь $g(t) = (g_1(t), g_2(t)) \in L^1(T)$ удовлетворяет условиям (67). Выберем опять последовательность вектор-функций $f_n(t) = f_n^{(1)}(t), f_n^{(2)}(t)$ из класса Гельдера, сходящуюся к вектор-функции $g(t)$ по метрике $L^1(T)$ и удовлетворяющую условиям (67). Тогда задача (7) с граничными функциями $f_n^{(1)}(t), f_n^{(2)}(t)$ будет разрешима. Из теоремы 3 следует, что решения этой задачи также будут принадлежать классу Гельдера в $D^+ \cup T$. Поэтому

$$\int_T f_n(t) \nu_k(t) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим условия (68). Тем самым установлена следующая

Теорема 4. Задача (7) нетерова. Индекс этой задачи равен $2-2(x_1 + x_2)$, где x_1 и x_2 — индексы функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ соответственно. Неоднородная задача (7) разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция $(g_1(t), g_2(t))$ удовлетворяет условиям (67).

2. Общее решение задачи (67) можно представить в виде

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{N_1} d_k \psi_k(z) + \psi_0(z),$$

где числа d_k — произвольные действительные постоянные, $\psi_k(z) = (\psi_{k1}(z), \psi_{k2}(z))$ ($k = 1, 2, \dots, N_1$) — решения однородной задачи (7), а $\psi_0(z) = (\psi_{01}(z), \psi_{02}(z))$ — некоторое частное решение задачи (7). Положим

$$\varphi_{kj}(z) = \int_0^z \psi_{kj}(\omega_j^{-1}(z)) dz, \quad \varphi_{0j}(z) = \int_0^z \psi_{0j}(\omega_j^{-1}(z)) dz \quad (j = 1, 2),$$

функцию $u(z)$ из (3) можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{k=1}^{N_1} d_k \varphi_{k1}(z + \mu_1 \bar{z}) = \sum_{k=1}^{N_1} d_k \varphi_{k2}(z + \mu_2 \bar{z}) + \\ + \varphi_{01}(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_{02}(z + \mu_2 \bar{z}) + d_0, \quad (69)$$

где d_0 — произвольное комплексное число. Из (69) и из теоремы 4 следует

Теорема 5. Задача (1)–(2) нетерова. Индекс этой задачи равен $4-2(x_1 + x_2)$, где x_1 и x_2 — индексы функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ соответственно. Неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция $(f_1(\omega(t)), f_2(\omega(t)))$ удовлетворяет условиям (68).

Ереванский политехнический институт

Поступила 27.IV.1990

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՓԵՏՅԱՆ. Կոստիկ եզրային խնդիրներ ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ եզրային հարցերի L^1 դասերում (ամփոփում)

Հարցման հետազոտում է Ռիման-Հիլբերտի տիպի եզրային խնդրի հաստատուն կոմպակտ գործակիցներով երկրորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարումների համար: Եզրային պայմանները հակասում է L^1 իմաստով: Ապացուցվում է այդ խնդրի նյութերու-թյանը, հաշվվում է ինդեքսը:

H. M. HAIRAPETIAN. Correct boundary value problems for nonregular-elliptic equations in a class L^1 (summary)

In the paper the Riman—Hilbert type problem for nonregular-elliptic equations with constant complex coefficients is considered. Boundary conditions are introduced by L^1 means. It is shown that the problem is noetherian and the index is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. А. Б. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., Наука, 1966.
3. Н. Е. Товмасын. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, Сиб. мат. жур. 1961, 7, № 4, 920—938.
4. Я. Б. Лопатинский. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. мат. жур., 1953, 5, № 2, 123—151.
5. А. И. Вольперт. Общее представление решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Сб. науч. трудов, Львов. Мат. ин-т, 1954, т. 5, № 2, 111—122.
6. В. П. Михайлов. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, Диф. уравн., 1976, т. 12, № 10, 1877—1891.
7. Э. П. Меликсетян. Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в ограниченных областях, Изв. АН АрмССР, 1981, 16, № 4, 253—273.
8. Р. А. Алиханян. Внешняя задача Дирихле с данными из L^1 для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в ограниченных областях, Изв. № 11, 39—48.
9. Т. Ш. Мадатян. Граничная задача Римана—Гильберта со смещением в классах L^1 , C и ее применение к исследованию краевых задач для эллиптических уравнений, Арм. НИИНТИ, № 22, Ар-88, Деп. 1988.
10. Г. М. Айрапетян. Разрывная задача Римана—Привалова со смещением в классе Изв. АН Арм. ССР, сер. матем. XXV, № 1, 1990.
11. Н. Е. Товмасын. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Диф. уравн., 1966, 2, № 1, 3—23; № 2, 163—171.
12. А. В. Бикчантаев. Краевые задачи для однородного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами, Изв. высш. уч. зав., мат., № 6(157), 1975, 3—13.
13. В. В. Асстрын. Краевые задачи для эллиптических уравнений высшего порядка в полурострестве, Арм. НИИНТИ, № 36, Ар-87, Деп., 1987.
14. М. А. Зироян. Эффективные методы решения краевых задач типа Римана для уравнений Бицадзе, Арм. НИИНТИ, № 83, Ар-88, Деп. 1988.
15. А. А. Закарян. Коррективные граничные задачи для уравнения Бицадзе, Арм. НИИНТИ, № 66, Ар-88, Деп. 1988.
16. А. А. Закарян. Задача Римана для неправильно-эллиптического уравнения n -ого порядка в круге, Арм. НИИНТИ, № 83, Ар-88, 1988.
17. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., Наука, 1966.
18. Н. И. Мусхелишвили. Сиггулярные интегральные уравнения, М., Наука, 1968.
19. Г. М. Айрапетян. Об ограниченности некоторых интегральных операторов, ДАН РА, 91, № 2, 1990.
20. Н. П. Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М., Наука, 1970.
21. N. E. Tovmasyan. Integral representations of holomorphic functions by densities and applications, Letuere Notes in mathematics, 796, Analytic Functions, Korubnik, 1979.