

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА

Из хорошо известного принципа максимума следует, что если $u(z)$ — субгармоническая в ограниченном открытом множестве Ω функция и

$$\lim_{z \in \Omega, z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad (1)$$

для любой граничной точки $\zeta \in \partial\Omega$, то $u(z) \leq 0$ всюду в Ω .

В данной статье обсуждается следующий вопрос: можно ли, при дополнительных ограничениях на рост функции $u(z)$ вблизи границы Ω , ослабить условие (1) во всех граничных точках так, чтобы принцип максимума оставался верным?

Теорема 1. Пусть $u(z)$ — гармоническая в единичном круге функция, удовлетворяющая условию

$$u(z) \leq \exp \left\{ \exp \left\{ \frac{A}{(1-|z|)^a} \right\} \right\}, \quad |z| < 1, \quad (2)$$

где a , $0 < a < 1$ — некоторое число. Если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой граничной точки ζ , $|\zeta| = 1$, имеет место неравенство

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \max \{ u(r\xi); |\xi| = 1, |\zeta - \xi| \leq \varepsilon \} \leq 0,$$

то всюду в единичном круге $u(z) \leq 0$.

Доказательство. Пусть $r = re^{i\varphi}$ — некоторая точка единичного круга и $r < \rho < 1$. Тогда имеет место представление

$$u(z) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{|re^{i\varphi} - \rho e^{it}|^2} u^-(\rho e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{it} - re^{i\varphi}|^2} u^+(\rho e^{it}) dt.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} 0 \leq u(z) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{it} - re^{i\varphi}|^2} u^-(\rho e^{it}) dt &\leq u(z) + \frac{\rho + r}{\rho - r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^-(\rho e^{it}) dt = \\ &= u(z) + \frac{\rho + r}{\rho - r} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^-(\rho e^{it}) dt - u(0) \right) \leq u(z) + \\ &+ \frac{\rho + r}{\rho - r} \left(\exp \left\{ \exp \left\{ \frac{A}{(1-\rho)^a} \right\} \right\} - u(0) \right). \end{aligned}$$

Выбирая $\rho = \frac{1+r}{2}$ получаем оценку типа (2) снизу для $u(z)$. Окончательно приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$|u(z)| \leq \exp \left\{ \exp \left\{ \frac{A_1}{(1-|z|)^2} \right\} \right\}, \quad |z| < 1.$$

Гармоническую функцию $u(z)$ можно представить в виде ряда

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}, \quad z = re^{ix},$$

где коэффициенты a_n допускают оценку

$$|a_n| \leq r^{-|n|} \max_{0 \leq x < 2\pi} |u(re^{ix})|, \quad 0 < r < 1.$$

Следовательно

$$\log |a_n| < |n| (1-r) + \exp \left\{ \frac{A_1}{(1-r)^2} \right\}.$$

Выбирая число r равным

$$1 - \left(\frac{1}{A_1} \log \frac{|n|}{\log^{1/2} |n|} \right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

получаем оценку

$$\log |a_n| \leq B \frac{|n|}{\log^{1/\alpha} |n|}, \quad |n| > 2.$$

Фиксируем некоторое число $\delta > 0$. Пусть $\varphi_\delta(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$ — неотрицательная, бесконечно дифференцируемая функция с носителем в интервале $[-\delta, \delta]$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_\delta(x) dx = 1$$

и ее коэффициенты Фурье $\widehat{\varphi}_{\delta, n}$ допускают оценку

$$|\widehat{\varphi}_{\delta, n}| \leq C \exp \left\{ -2B \frac{|n|}{\log^{1/\alpha} |n|} \right\}, \quad |n| > 1.$$

Такая функция существует, так как $0 < \alpha < 1$, см. [1]. Заметим, что для любого $\delta > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| |\widehat{\varphi}_{\delta, n}| < \infty.$$

Введем функцию

$$g_\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(ze^{-ir}) \varphi_\delta(x) dx.$$

Эта функция гармоническая в единичном круге и допускает непрерывное продолжение вплоть до границы единичного круга. Из условия теоремы и в силу принципа максимума, при достаточно малом $\delta > 0$ имеет место неравенство $g_\delta(z) \leq 0$, $z \in D$. Устремляя δ к нулю, получаем $u(z) \leq 0$, при $z \in D$.

Естественно возникает вопрос: можно ли ослабить условие (2) в теореме 1? Ответ на этот вопрос содержится в теореме 2.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Существует аналитическая в правой полуплоскости функция $f(z)$, которая допускает оценку

$$|f(z)| \leq \exp \left\{ \exp \left\{ \frac{A}{(\operatorname{Re} z)^{1+\varepsilon}} \right\} \right\}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

и для любого y , $-\infty < y < \infty$, имеет место неравенство

$$\lim_{x \rightarrow +0} \max_{|t| < \frac{1}{x}} |f(x + i(t + y))| \leq 1,$$

однако $f(z)$ — неограниченная функция.

Доказательство. Обозначим через Ω область

$$\Omega = \left\{ z; 0 < \operatorname{Re} z < 1, \left| \operatorname{Im} z - \sin \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^\sigma} \right| < \delta \right\},$$

где $0 < \sigma$, $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Пусть $\varphi(z)$ конформно и однолистно отображает область Ω на полуполосу

$$\left\{ z; 1 < \operatorname{Re} z, |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \right\},$$

причем часть границы $\partial\Omega \cap \{z; \operatorname{Re} z = 1\}$ области Ω переходит в отрезок $\left\{ 1 + iy, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

В силу теоремы Варшавского, см. [2], стр. 233, имеем

$$\operatorname{Re} \varphi(x + iy) = C + \frac{\pi}{2\delta} \int_x^1 \left(1 + \sigma^2 \frac{\cos^2(x^{-\sigma})}{x^{2+2\sigma}} \right) dx + o(1), \quad x \rightarrow +0.$$

Следовательно

$$\frac{C_1}{x^{1+2\sigma}} \leq \operatorname{Re} \varphi(x + iy) < \frac{C_2}{x^{1+2\sigma}}, \quad x \rightarrow +0.$$

Введем функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega \cap \{z; \operatorname{Re} z > 0\}} \frac{e^{e^{\varphi(\zeta)}}}{(\zeta - z)\varphi^2(\zeta)} d\zeta,$$

где $z \notin \overline{\Omega}$ и $\operatorname{Re} z > 0$. Заметим, что для любого $0 < x_0 < 1$ функцию $f(z)$ вне области $\overline{\Omega}$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_{x_0} \cap \{z; \operatorname{Re} z > 0\}} \frac{e^{e^{\varphi(\zeta)}}}{(\zeta - z)\varphi^2(\zeta)} d\zeta, \quad (3)$$

где $\Omega_{x_0} = \{z; z \in \Omega, 0 < \operatorname{Re} z < x_0\}$. Следовательно, $f(z)$ — аналитическая функция в правой полуплоскости. Выбирая $2x_0 = \operatorname{Re} z$ в формуле (3), получим

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{R_0} \cap \{z; 0 < \operatorname{Re} z < x_0\}} \frac{|e^{e^{-\varphi(\zeta)}}|}{|\zeta - z| |\varphi(\zeta)|^2} |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_{R_0} \cap \{z; \operatorname{Re} z = x_0\}} \frac{e^{e^{\operatorname{Re} \varphi(\zeta)}}}{|\zeta - z| |\varphi(\zeta)|^2} |d\zeta| \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi \operatorname{Re} z} \int_{\partial D_{R_0} \cap \{z; 0 < \operatorname{Re} z < x_0\}} \frac{|d\zeta|}{|\varphi(\zeta)|^2} + \frac{2\delta}{c_1 \pi} (\operatorname{Re} z)^{1+2\sigma} e^{\frac{c}{(\operatorname{Re} z)^{1+2\sigma}}} \leq \\
&\leq \exp \left\{ \exp \left\{ \frac{A}{(\operatorname{Re} z)^{1+2\sigma}} \right\} \right\},
\end{aligned}$$

где $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Теперь оценим $f(z)$ на множестве

$$\Omega_0 = \left\{ z; \operatorname{Re} z > 0, \left| \operatorname{Im} z - \sin \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^2} \right| \geq 2\delta \right\}.$$

Имеем, при $\operatorname{Im} z > 0$, неравенство

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{27}{2\pi} \int_{\partial D \cap \{z; \operatorname{Re} z > 0\}} \frac{1}{|\zeta - z| |\varphi(\zeta)|^2} |d\zeta| \leq \\
&\leq A \int_0^1 \frac{x^{1+\sigma} dx}{[(\operatorname{Re} z - x)^2 + (\operatorname{Im} z - \delta - \sin(x^{-2}))^2]^{1/2}} \leq \\
&\leq A \int_0^1 \frac{x^{1+\sigma}}{|\operatorname{Re} z - x| + (\operatorname{Re} z)^{1+\sigma}} dx \leq M < \infty, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1.
\end{aligned}$$

Пусть Δ — некоторая дуга, лежащая на единичной окружности ∂D . Обозначим через Δ^* новую дугу, которая получается из Δ в результате присоединения к ней с обеих сторон дуг, длины которых равны длине дуги Δ .

Лемма. Пусть Δ_k , $k = 1, 2, \dots$ — дуги, покрывающие единичную окружность ∂D , причем кратность покрытия не превосходит 2. Тогда существуют функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \dots$, удовлетворяющие условиям

1. для любого $z \in \partial D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \equiv 1;$$

2. $\varphi_k(z)$ — неотрицательные, кусочно гладкие, непрерывные функции;

3. для всех $z \in \partial D$, кроме конечного числа точек, имеет место оценка

$$|\varphi'_k(z)| < \frac{65}{|\Delta_k|},$$

где $|\Delta_k|$ — длина дуги Δ_k ;

4. $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq \Delta_k^*$.

Доказательство. Не теряя общности можно предположить, что

$$|\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots$$

в качестве $\tau_1(e^{ix})$ выбираем функцию, которая непрерывна на ∂D , равна единице на Δ_1 , вне интервала Δ_1 тождественно обращается в нуль, а в двух смежных с Δ_1 интервалах, лежащих в Δ_1^* , она линейная по x .

Предположим, что уже построены функции $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z)$, удовлетворяющие условиям:

1. для любого $z \in \bigcup_{k=1}^{n-1} \Delta_k$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(z) = 1;$$

2. $\varphi_k(z)$ — неотрицательная, кусочно гладкая, непрерывная функция и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z) \leq 1,$$

при $z \in \partial D$.

3. для всех $z \in \partial D$, кроме конечного числа точек, имеет место оценка

$$|\varphi'_k(z)| \leq \frac{65}{|\Delta_k|};$$

4. $\text{supp } \varphi_k \subseteq \Delta_k^*$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Пусть $z \in \partial D \setminus \Delta_n$. Обозначим через $\Delta_n(z)$ дугу ∂D , которая лежит между точкой z и интервалом Δ_n , причем имеет наименьшую длину. Сначала определим вспомогательную функцию $\psi_n(z)$. На дуге Δ_n положим

$$\psi_n(z) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(z), \quad z \in \Delta_n.$$

Вне интервала Δ_n она определяется формулой

$$\psi_n(z) = \max \left\{ c; c + \frac{|z-\zeta|}{|\Delta_n|} \leq 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k(\zeta), \text{ при } \zeta \in \Delta_n(z) \right\},$$

где $z \in \partial D \setminus \Delta_n$. Наконец, положим

$$\varphi_n(z) = \max \{0, \psi_n(z)\}.$$

Заметим, что семейство функций $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z)$ удовлетворяет условиям 1—4, с заменой $n-1$ на n . Действительно, первый и второй пункты этих условий непосредственно следует из определения функции $\varphi_n(z)$. Четвертый пункт следует из того, что производные функций $\psi_n(e^{ix})$ на каждом из смежных с Δ_n интервалах сохраняют знак и по модулю не меньше, чем $\frac{1}{|\Delta_n|}$.

Теперь перейдем к оценке производной функции $\varphi_n(e^{ix})$. Из вышеприведенной конструкции следует, что в каждой точке $z \in \partial D$ функция $\varphi_n(z)$ или равна

$$1 - \sum_{k=1}^{n-1} \bar{z}_k(z)$$

или ее производная по модулю равна $\frac{1}{|\Delta_n|}$ или 0. Пусть $z \in \Delta_n$. Для любого $\delta > 0$ количество тех интервалов Δ_j , длины которых удовлетворяют неравенствам $\delta \leq |\Delta_j| \leq 2\delta$ и $z \in \Delta_j$, не превосходит 16, так как кратность покрытия ∂D семейством $|\Delta_k|_{k=1}^{\infty}$ не превосходит 2. Обозначим через $|\Delta_n| \leq |\Delta_{n_1}| \leq \dots \leq |\Delta_{n_m}|$ те интервалы, для которых $z \in \Delta_{n_k}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\varphi_n(e^{ix})}{dx} \right| &\leq \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{d\varphi_k(e^{ix})}{dx} \right| \leq \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{|\Delta_{n_k}|} < \\ &< \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{2^j |\Delta_n| < |\Delta_{n_k}| < 2^{j+1} |\Delta_n|} \frac{k}{|\Delta_{n_k}|} \right) \leq \frac{1}{|\Delta_n|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{16j}{2 |\Delta_n|} \leq \frac{65}{|\Delta_n|}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $u(z)$ — гармоническая в единичном круге функция и сходится интеграл

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})| (1-r)^{-\alpha} dr dx < \infty,$$

где $0 < \alpha < 1$. Предположим, что $C(r)$, $0 \leq r < 1$ — положительная и монотонно возрастающая, стремится к бесконечности при $r \rightarrow 1-0$.

Если для любой граничной точки $\zeta \in \partial D$ имеет место неравенство

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \max \{u(re^{ix}); |e^{ix} - \zeta| \leq C(r)(1-r)^{\alpha/2}\} \leq 0,$$

то $u(z) \leq 0$ всюду в D .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $0 < r_0 < 1$ — некоторые числа. Для любой граничной точки $\zeta \in \partial D$ существует число $r = r(\zeta, \varepsilon)$, $r_0 < r < 1$ такое, что $u(re^{ix}) \leq \varepsilon$, при $e^{ix} \in \Delta_\zeta$, где

$$\Delta_\zeta = \left\{ e^{ix}; |e^{ix} - \zeta| \leq \frac{C(r)}{3} (1-r)^{1/2} \right\}.$$

В силу леммы Л. Альфорса, см. [3], можно выделить интервалы

$$\Delta_{\zeta_1}, \Delta_{\zeta_2}, \dots \quad (4)$$

которые покрывают ∂D , причем кратность покрытия не превосходит двух. Пусть

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$$

— функции, соответствующие свойству (4), существование которых установлено в лемме.

Пусть z_0 — некоторая фиксированная точка в единичном круге. Введем функции

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{ix} - z|^2} \left(\frac{1 - |z_0|^2}{|e^{ix} - z_0|^2} \varphi_n(e^{ix}) \right) dx, \quad |z| < 1.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} u(re^{it}) dt = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(re^{it}) - u(rr_k e^{it})] \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} \varphi_k(e^{it}) dt + \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(rr_k e^{it}) \varphi_k(e^{it}) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} dt = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(re^{it}) - u(rr_k e^{it})] \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} \varphi_k(e^{it}) dt + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_k e^{it}) \varphi_k(e^{it}) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} dt, \end{aligned}$$

где $r_k = r(\zeta_k, e)$. Мы знаем, что $u(r_k e^{ix}) \leq \varepsilon$, при $e^{ix} \in \Delta_{\zeta_k}^*$ и $\text{supp } \varphi_k \leq \Delta_{\zeta_k}^*$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_k e^{ix}) \varphi_k(e^{ix}) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{ix} - z_0|^2} dx &\leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{ix} - z_0|^2} \varphi_k(e^{ix}) dx \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь оценим интеграл

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(re^{it}) - u(rr_k e^{it})] \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} \varphi_k(e^{it}) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} \varphi_k(e^{it}) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r_k^2}{|e^{ix} - r_k e^{it}|^2} u(re^{ix}) dx \right) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{it} - z_0|^2} \varphi_k(e^{it}) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{ix} - z_0|^2} u(re^{ix}) \varphi_k(e^{ix}) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r_k^2)(1-|z_0|^2)}{|e^x - r_k e^{it}|^2 |e^{it} - z_0|^2} \varphi_k(e^{it}) dt \right) dx = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) [\psi_k(e^{ix}) - \psi_k(r_k e^{ix})] dx.
 \end{aligned}$$

Мы знаем, что $\sup \varphi_k \subseteq \Delta_k^* = \Delta_{z_k}^*$ и $|\varphi_k(z)| \leq 65 |\Delta_k|^{-1} = \frac{65}{|\Delta_{z_k}|}$. Поэтому.

$$|\text{grad } \psi_k(z)| \leq \frac{c}{|\Delta_k|}, \quad |z| \leq 1.$$

Отсюда получаем

$$|\psi_k(e^{ix}) - \psi_k(r_k e^{ix})| \leq c \frac{1-r_k}{|\Delta_k|}.$$

Тогда функция $g_k(x) = \psi_k(e^{ix}) - \psi_k(r_k e^{ix})$ допускает оценки

$$|g_k(x) - g_k(y)| \leq |\psi_k(e^{ix}) - \psi_k(r_k e^{ix})| + |\psi_k(e^{iy}) - \psi_k(r_k e^{iy})| \leq 2c \frac{1-r_k}{|\Delta_k|}.$$

С другой стороны, имеем

$$|g_k(x) - g_k(y)| \leq |\psi_k(e^{ix}) - \psi_k(e^{iy})| + |\psi_k(r_k e^{ix}) - \psi_k(r_k e^{iy})| \leq 2c \frac{|x-y|}{|\Delta_k|}.$$

Следовательно

$$|g_k(x) - g_k(y)| \leq 2c \min \left\{ \frac{1-r_k}{|\Delta_k|}, \frac{|x-y|}{|\Delta_k|} \right\} \leq 2c \frac{(1-r_k)^\alpha}{|\Delta_k|} |x-y|^{1-\alpha}.$$

Окончательно получаем

$$u(z_0) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) g_k(e^{ix}) dx.$$

Из условия теоремы следует, что число r , $0 < r < 1$, можно выбрать настолько близким к единице, что

$$\sup_x |g_k(x)| + \sup_{x,y} \frac{|g_k(x) - g_k(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}} \leq \varepsilon |\Delta_k|.$$

Поэтому для функции $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ имеем

$$\sup |g(x)| + \sup \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^{1-\alpha}} \leq 4\pi\varepsilon.$$

Введем обозначения

$$u(re^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n r^{|n|} e^{inix}, \quad g(re^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n r^{|n|} e^{inix},$$

где g_k — коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) \frac{\partial g(re^{ix})}{\partial r} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| u_n g_{-n} r^{2|n|-1},$$

Откуда следует

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) \frac{\partial g(re^{ix})}{\partial \rho} d\rho dx = \sum_{n \neq 0} u_n g_{-n} r^{|n|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{ix}) g(e^{ix}) dx - u(0) g_0.$$

Следовательно

$$u(z_0) \leq \varepsilon + 4\pi\varepsilon + 4\pi|u(0)|\varepsilon + 4\pi\varepsilon \int_0^1 \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})| (1-r)^{-\alpha} dr dx.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $u(z_0) \leq 0$.

Институт математики АН
Республики Армения

Поступила 12.XII.1990

Ա. Ա. ՎԱԳԱՐՇԱԿՅԱՆ. Մաքսիմումի սկզբունքի մասին (ամփոփում)

Հաղվածում ապացուցվում են նոր տիպի թևորմաներ, որոնցում ընդհանրացվում է մաքսիմումի սկզբունքը:

A. A. VAGARSHAKIAN. On the principle of maximum (summary)

New theorems generalizing the principle of maximum are proved in the paper.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Мандельброт. Приможающие ряды, регуляризация последовательностей, приложения, ИИЛ, М., 1955.
2. М. А. Егграфов. Аналитические функции, Изд. "Наука", М., 1968.
3. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала, Изд. "Наука", М., 1966.