ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 4, 1991 Математика

УДК 517.956

Р. Г. АЙРАПЕТЯН

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С НЕСТРОГО ВОГНУТОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО БИХАРАКТЕРИСТИК ГРАНИЦЕЙ

В работе [1] Ф. Фридлендером описано фундаментальное решение смешанной задачи в четверти пространства $\{t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\}$ для модельного строго гиперболического оператора $(1+x)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-$ $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{\partial^2}{\partial y_j^2}$. Важность этой работы обусловлена тем, что найдено фундаментальное решение смешанной задачи в ситуации, когда часть бихарактеристик уравнения касается границы $\{x=0\}$. Это фундаментальное решение выражено через функцию Эйри, что дало возможность исследовать распространение особенностей решения этой смешанной задачи, используя асимптотические свойства функции Эйри. Работа [1] породила цикл работ (см., например, [2—8]), в которых на языке операторов Фурье—Эйри построены параметриксы для широкого класса смешанных задач, допускающих касание границы области бихарактеристиками. В основе соответствующих построений лежит анализ асимптотических свойств функции Эйри. Во всех этих работах накладывается очень существенное требование либо строгой вогнутости, либо строгой выпуклости границы области, что, в конечном счете, дает возможность в дифрактивной зоне свести каноническими преобразованиями исходную задачу к уравнению Эйри.

В предлагаемой работе рассмотрена модельная смешанная задача с нестрого вогнутой границей. Для этой задачи найдено фундаментальное решение, выраженное с помощью вырожденной гипергеометрической функции Уиттекера $W_{k,\,1/4}(z)$. Ситуация здесь представляется значительно более сложной. Дело в том, что известные асимптотические свойства функции Уиттекера (см., например, [9]) получены либо при фиксированном k при $z\to\infty$, либо при фиксированном z при $k\to\infty$. В то же время, для целей данной работы требуются асимптотические свойства функции $W_{k,\,1/4}(z)$ при независимом стремлении переменных k и z к бесконечности, т. е., другими словами, требуются „равномерные асимптотические оценки. Оценки такого типа получены в §§ 2, 3 настоящей работы. В § 4 с их помощью доказана теорема, описывающая фундаментальное решение задачи.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассматривается следующая задача:

$$(1+x^2)\,u_{tt}-u_{xx}-\sum_{j=1}^{n-1}u_{y_jy_j}=0 \tag{1.1}$$

при $t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}$,

$$u=g,\ \text{при}\ x=0,\ t>0,\ y\in R^{n-1}, \tag{1.2}$$

$$u=0,\ \text{при}\ t<0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}. \tag{1.3}$$

Пусть ξ, η_0, η' — переменные, двойственные к x, t, y и $\eta=(\eta_0,\eta')$ Главный символ уравнения (1.1) записывается следующим образом:

$$q(x,\xi,\eta)=-\xi^2+\mu(x,\eta), \tag{1.4}$$

где

$$\mu(x,\eta)=(1+x^2)\,\eta_0^2-|\eta'|^2.$$

Для задачи (1.1)—(1.3) нарушено условие строгой вогнутости границы*. Напомним, что граница $\{x=0\}$ для уравнения, главный символ которого есть $-\xi^2+\mu(x,t,y,\eta)$, называется строго вогнутой, если

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}(0,t,y,\eta)>0\ \text{на}\ N_0=\{(t,y,\eta)\in R^1\times R^{n-1}\times(R^{n-1}\setminus 0);$$

$$\mu(0,t,y,\eta)=0\}.$$

Соответственно, назовем границу нестрого вогнутой, если для некоторого натурального числа $m\geqslant 2$ имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial^j\mu}{\partial x^j}(0,t,y,\eta)=0\ \text{на}\ N_0\ \text{при}\ j=0,1,\cdots,m-1,$$

$$\frac{\partial^m\mu}{\partial x^m}(0,t,y,\eta)>0\ \text{на}\ N_0.$$

Заметим, что в рассматриваемой нами ситуации $m=2$.

Напомним определения некоторых классов распределениезначных функций, данные в работе [2]. Будем говорить, что распределение $u\in D'(R^{n+1})$ принадлежит классу $K(R\times R^n)$, если существует функция $u_x\in C^\infty(R,D'(R^n))$ такая, что для $\forall\varphi(x)\in C_0^\infty(R)$ и $\forall\psi(y)\in$ $\in C_0^\infty(R^n)$ имеет место равенство

$$\langle u,\varphi(x)\otimes\psi(y)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle u_x,\psi\rangle\,\varphi(x)\,dx. \tag{1.5}$$

При этом, как показано в [2], отображение $\tau:u\to u_x$ есть биекция $\tau:K(R\times R^n)\to C^\infty(R,D'(R^n))$.

---

* Согласно используемой Л. Хёрмандером терминологии (см. [13]), точки $(0,t,y,0,\pm|\eta'|,\eta')$ принадлежат множеству G^∞.

Аналогично определяются класс $K(R_+ \times R^n)$ и биекция

$$\tau : K(R^+ \times R^n) \to C^\infty(R^+, D'(R^n)),$$

с той лишь разницей, что $\varphi(x)$ берется из $C_0^\infty(R^+)$.

Класс $\overline{K}(\overline{R}^+ \times R^n) \subset K(R^+ \times R^n)$ определяется как $\tau^{-1} C^\infty(\overline{R}^+, D'(R^n))$, где $C^\infty(\overline{R}^+, D'(R^n))$ состоит из распределениезначных функций из $C^\infty(R^+, D'(R^n))$, являющихся ограничениями на R^+ функций из $C^\infty(R, D'(R^n))$. И, наконец, классы $K^+(R, D'(R^n))$, $K^+(R^+, D'(R^n))$ и $K^+(\overline{R}^+, D'(R^n))$ определяются как подклассы классов $K(R, D'(R^n))$, $K(R^+, D'(R^n))$ и $K(\overline{R}^+, D'(R^n))$, состоящие из элементов, обращающихся в нуль при $y_0 < 0$, для $y = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$.

Фундаментальным решением задачи (1.1)—(1.3) назовем распределение $E \in K^+(\overline{R}^+, D'(R^n))$, удовлетворяющее условиям

$$(1 + x^2)\frac{\partial^2 E}{\partial y_0^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 E}{\partial y_j^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0. \tag{1.6}$$

$$\tau E|_{x=0} = \delta(y). \tag{1.7}$$

Пусть $E_x = \tau E \in C^\infty(\overline{R}^+, S'(R^n))$. Применим к (1.6) и (1.7) преобразование Фурье по y и обозначим через $\widetilde{E}_x(\eta)$ образ E_x при этом преобразовании. Так как E_x обращается в ноль при $y_0 < 0$, функция $\widetilde{E}_x(\eta)$ может быть продолжена до функции, определенной на $\{(x, \eta); x \in \overline{R^+}$ $\eta_0 \in C$, $\operatorname{Im} \eta_0 < 0$, $\eta' \in R^{n-1}\}$ и аналитичной по η_0. Получим следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметра η,

$$\frac{d^2 \widetilde{E}_x(\eta)}{dx^2} + \mu(x, \eta)\widetilde{E}_x(\eta) = 0, \text{ при } x > 0, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{E}_0(\eta) = 1. \tag{1.9}$$

Как известно (см. [10]), подстановкой $\widetilde{E}_x(\eta) = x^{-1/2} v(i\eta_0 x^2, \eta)$ и заменой переменной $z = i\eta_0 x^2$ это уравнение сводится к уравнению Уиттекера:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - m^2}{z^2}\right) v = 0, \tag{1.10}$$

с $m = 1/4$ и $k = -i\dfrac{\eta_0^2 - |\eta'|^2}{4\eta_0}$.

Уравнение Уиттекера (см. [9]) имеет две пары линейно независимых решений, являющихся вырожденными гипергеометрическими функциями Уиттекера:

$$\{M_{k,m}(z);\ M_{k,-m}(z)\} \text{ и } \{W_{k,m}(z);\ W_{-k,m}(-z)\}.$$

В случае, когда $2m$ не есть целое число и $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$, эти функции связаны следующими соотношениями (см. [9]):

$$W_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(1/2-m-k)}M_{k,m}(z)+\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}M_{k,-m}(z). \quad (1.11)$$

Общее решение уравнения (1.8) может быть записано двояко, с использованием обеих пар линейно независимых решений:

$$\widetilde{E}_x(\eta)=x^{-1/2}[A_1(\eta)\,W_{k,1/4}(i\eta_0x^2)+A_2(\eta)\,W_{-k,1/4}(i\eta_0x^2)] \quad (1.12)$$

и

$$\widetilde{E}_x(\eta)=x^{-1/2}[B_1(\eta)\,M_{k,1/4}(i\eta_0x^2)+B_2(\eta)\,M_{k,-\frac{1}{4}}(i\eta_0x^2)]. \quad (1.13)$$

Значения коэффициентов $A_1(\eta)$ и $A_2(\eta)$ устанавливает сформулированная ниже теорема. Воспользовавшись соотношением (1.11) получаем также и значения коэффициентов $B_1(\eta)$ и $B_2(\eta)$.

Теорема. *Единственное решение граничной задачи* (1.6)—(1.7) *есть обратное преобразование Фурье—Лапласа от функции*

$$\widetilde{E}_x(\eta)=x^{-1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\sqrt{\pi}\,(i\eta_0)^{1/4}}\,W_{k,1/4}(i\eta_0x^2), \quad (1.14)$$

определенной на множестве

$$\{(x,\eta);\ x>0,\ \eta_0\in C,\ \operatorname{Im}\eta_0<0,\ \eta'\in R^{n-1}\},$$

где

$$k=\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{4i\eta_0}.$$

§ 2. Равномерные оценки функции Уиттекера

Целью этого параграфа является вывод оценок функции Уиттекера $W_{k,m}(z)$, использованных в доказательстве теоремы (§ 4). Вообще говоря, оценки для функций Уиттекера известны (см., например, [9]), однако они получены либо при фиксированных значениях параметров k и m, либо при фиксированных значениях параметра m и аргумента z. Другими словами, постоянные, фигурирующие в этих оценках, зависят либо от k и m, либо от m и z. Однако для целей настоящей работы таких оценок недостаточно. При доказательстве теоремы (§ 4) требуется оценивать функции $W_{k,m}(z)$ при независимом возрастании модулей параметра k и переменной z. Ясно, что требование „равномерности" оценок существенно усложняет их вывод. Далее, несмотря на то, что функция Уиттекера используется при $m=\frac{1}{4}$, в этом параграфе мы не ограничиваемся только этим значением m, что, впрочем, не приводит к сколько-нибудь серьезному усложнению вывода оценок. Естественно, что оценки получены при определенных ограничениях на m, k и z. Мы начнем с самой „грубой" из оценок, но полученной при более слабых ограничениях.

Лемма 1. *Пусть* $\operatorname{Re} m > 0$, $\operatorname{Re}\left(k + m - \frac{1}{2}\right) < 0$, $z \neq 0$ *и* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$|W_{k,m}(z)| \leqslant \frac{\Gamma(2\operatorname{Re} m)}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - k\right)\right|} |z|^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re} m} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} k \cdot \arg z - \frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(k+m)\right. \cdot \tag{2.1}$$

$$\left. \cdot \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z \cdot \theta\left(-\operatorname{Im}(k+m)\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z\right)\right\}.$$

Примечание. $\theta(t)$ — функция Хевисайда, т. е. $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$.

Доказательство леммы 1. Поскольку из условий леммы следует, что $\operatorname{Re}\left(k - \frac{1}{2} - m\right) < 0$ и $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, можно воспользоваться следующим интегральным представлением функции Уиттекера (см. [9]):

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}} z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t}\, dt.$$

Отсюда

$$|W_{k,m}(z)| \leqslant \frac{e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Re} z} |z|^{\operatorname{Re} k} e^{-\operatorname{Im} k \cdot \arg z}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)\right|} I, \tag{2.2}$$

где

$$I = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2} - \operatorname{Re} k + \operatorname{Re} m} \left|1 + \frac{t}{z}\right|^{\operatorname{Re}(k+m) - \frac{1}{2}} dt. \tag{2.3}$$

Так как $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, имеют место оценки

$$\left|1 + \frac{t}{z}\right| \geqslant \frac{t}{|z|}$$

и

$$0 \leqslant \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z \cdot \arg\left(1 + \frac{t}{z}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.4}$$

Отсюда, используя условие $\operatorname{Re}\left(k - \frac{1}{2} + m\right) \leqslant 0$, получаем

$$I \leqslant \int_0^\infty t^{2\operatorname{Re} m - 1} |z|^{\frac{1}{2} - \operatorname{Re}(k+m)} \exp\left\{-\operatorname{Im}(k+m) \cdot \arg\left(1 + \frac{t}{z}\right) - t\right\} dt. \tag{2.5}$$

Из (2.4) следуют неравенства:

$$-\operatorname{Im}(k+m)\cdot\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)\leqslant 0 \text{ при } \operatorname{Im}(k+m)\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z\geqslant 0,$$

и

$$-\operatorname{Im}(k+m)\cdot\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)\leqslant -\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(k+m)\operatorname{sng}\operatorname{Im} z \text{ при}$$

$$\operatorname{Im}(k+m)\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z<0.$$

Воспользовавшись последними неравенствами и оценкой (2.5) получаем, что

$$I\leqslant|z|^{\frac{1}{2}-\operatorname{Re}(k+m)}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(k+m)\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\theta(-\operatorname{Im}(k+m)\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im} z)\cdot\right\}\int\limits_{0}^{\infty}t^{2\operatorname{Re} m-1}e^{-t}\,dt.$$

Отсюда и из (2.2) следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Re} k=0$, $\operatorname{Im} k\cdot\operatorname{Im} z<0$, $\operatorname{Im} m=0$, $0<|m|<1/2$ *и* $\dfrac{|z|}{|k|}\geqslant 2.$

Тогда имеет место оценка

$$|W_{k,m}(z)|\leqslant C(m)\left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right|\cdot|z|^{\frac{1}{2}+m}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\pi|k|}+|k|^{-2m}e^{\frac{\pi|k|}{2}}\right). \tag{2.6}$$

Доказательство. В силу условий леммы имеет место следующее интегральное представление функции Уиттекера (см. [9]):

$$W_{k,m}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{z}{2}}z^{k}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt, \tag{2.7}$$

где интегрирование ведется по контуру, который идет из бесконечности по вещественной оси, обходит начало координат в положительном направлении и затем уходит на бесконечность по вещественной оси, причем точка $t=-z$ лежит вне контура. Предполагается, что $\arg z$ имеет свое главное значение $|\arg(-t)|\leqslant\pi$ и $\arg\left(1+\dfrac{t}{z}\right)\to 0$ при $t\to 0$ по пути, лежащему внутри контура. Совершив в (2.7) замену переменной $t\to|z|\,t$, получаем

$$W_{k,m}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{z}{2}}z^{k}|z|^{\frac{1}{2}+m-k}I, \tag{2.8}$$

где

$$I = \int\limits_{\infty}^{(0+)} (-t)^{-k-\frac{1}{2}+m} (1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-|z| t}\, dt.$$

Обозначим

$$f(t) = (-t)^{-\frac{1}{2}+m} (1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z)^{-\frac{1}{2}+m}, \tag{2.9}$$

$$S(t) = -\frac{k}{|k|} \ln(-t) + \frac{k}{|k|} \ln(1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z) - \frac{|z|}{|k|} t, \tag{2.10}$$

приходим к следующему представлению

$$I = \int\limits_{\infty}^{(0+)} f(t) \exp(|k|\, S(t))\, dt. \tag{2.11}$$

Особыми точками функций $S(t)$ и $f(t)$ являются точки 0, $-i \operatorname{sign} \operatorname{Im} z$, ∞.

Ограничимся рассмотрением случая $\operatorname{Im} z > 0$, поскольку оценка (2.6) для $\operatorname{Im} z < 0$ получается переходом к сопряженному в (2.11).

Интегрирование будем вести по контуру

$$l = l_1 \cup l_2 \cup l_3,$$

где

$$l_1 = \{t \in C;\ \operatorname{Re} t \geqslant 0,\ \operatorname{Im} t = r\},$$
$$l_2 = \{t \in C;\ |t| = r,\ \operatorname{Re} t \leqslant 0\},$$
$$l_3 = \{t \in C;\ \operatorname{Re} t \geqslant 0,\ \operatorname{Im} t = -r\},$$

где

$$r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{|k|}{|z|} + 1} - 1\right). \tag{2.12}$$

Из условия $\dfrac{|z|}{|k|} > 2$ следует неравенство $r \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Имеем неравенство

$$|I| \leqslant \sum_{j=1}^{3} |I_j|,$$

где

$$I_j = \left| \int\limits_{l_j} f(t) \exp[|k|\, S(t)]\, dt \right|.$$

Оценим вначале I_1. На C_1 $t = s + ir$ и, следовательно,

$$|f(t)| = |s + ir|^{m-\frac{1}{2}} |1 + r - is|^{m-\frac{1}{2}}.$$

Из условия $m - \dfrac{1}{2} < 0$ и последнего равенства следуют оценки

$$|f(t)| \leqslant s^{m-\frac{1}{2}} (1 + r)^{m-\frac{1}{2}} \leqslant s^{m-\frac{1}{2}}, \tag{2.13}$$

$$|f(t)| \leqslant s^{2m-1}. \tag{2.14}$$

Далее

$$\operatorname{Re} S(t) = -\arg(-s - ir) + \arg(1 + r - is) - \frac{|z|}{|k|} s.$$

В соответствии с правилом выбора ветви подынтегральной функции в (2.7) имеем

$$\operatorname{Re} S(t) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{r}{s} - \operatorname{arctg}\frac{s}{1+r} - \frac{|z|}{|k|} s \leqslant$$

$$\leqslant \pi - \frac{|z|}{|k|} s \leqslant \pi - 2s < -s, \tag{2.15}$$

при $s \geqslant \pi$.

С другой стороны

$$\frac{d(\operatorname{Re} S)}{ds}(s+ir) = -\frac{|z|\cdot|k|^{-1}s^2(s^2+|z|\cdot|k|^{-1}(r^2+r+1)+1)}{(r^2+s^2)[(1+r)^2+s^2]} < C.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re} S(s+ir) < \operatorname{Re} S(ir) = \frac{\pi}{2}\cdot \tag{2.16}$$

Из оценок (2.13) и (2.16) получаем

$$\int_0^\pi |f(s+ir)|\, e^{|z|\operatorname{Re} S(s+ir)}\, ds \leqslant e^{\frac{\pi|k|}{2}} \frac{\pi^{m+1/2}}{m+1/2}, \tag{2.17}$$

а из оценок (2.14) и (2.15)

$$\int_\pi^\infty |f(s+ir)|\, e^{|k|\operatorname{Re} S(s+ir)}\, ds < \int_\pi^\infty s^{2m-1} e^{-|k|s}\, ds \leqslant |k|^{-2m}\,\Gamma(2m). \tag{2.18}$$

Объединяя (2.17) и (2.18), получаем

$$I_1 \leqslant \frac{\pi^{m+1/2}}{m+1/2} e^{\frac{\pi|k|}{2}} + \Gamma(2m)\,|k|^{-2m}. \tag{2.19}$$

Для того, чтобы оценить I_3 заметим, что на l_3 $t = s - ir$ и

$$|f(t)| = |s - ir|^{m-1/2}\,|1 - r - is|^{m-1/2} < s^{2m-1}.$$

Далее

$$\operatorname{Re} S(s - ir) = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{r}{s} - \operatorname{arctg}\frac{s}{1-r} -$$

$$-\frac{|z|}{|k|} s \leqslant -\frac{\pi}{2} - \frac{|z|}{|k|} s \leqslant -\frac{\pi}{2} - 2s.$$

Отсюда

$$I_3 \leqslant \int_0^\infty s^{2m-1} e^{-2|k|s} ds = (2|k|)^{-2m}\,\Gamma(2m). \tag{2.20}$$

Нам осталось оценить I_3. На l_3 $t=re^{i\varphi}$, $\varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Отсюда

$$|f(t)|=r^{m-1/2}|1-ire^{i\varphi}|^{m-1/2}\leqslant 2^{1/2-m}\,r^{m-1/2}. \tag{2.21}$$

В соответствии с правилом выбора ветви $\arg(-t)=\varphi-\pi$ и

$$\arg(1-it)=\arg\left(1+re^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=\operatorname{arctg}\frac{r\sin(\varphi-\pi/2)}{1+r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Поэтому на l_3

$$\operatorname{Re}S(t)=\pi-\varphi-\operatorname{arctg}\frac{r\cos\varphi}{1+r\sin\varphi}-\frac{|z|}{|k|}r\cos\varphi. \tag{2.22}$$

Продифференцировав последнее равенство по φ, получаем

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{Re}S(re^{i\varphi})=-1+\frac{r\sin\varphi+r^2}{1+2r\sin\varphi+r^2}+\frac{|z|}{|k|}r\sin\varphi. \tag{2.23}$$

Из (2.12) следует, что

$$\frac{|k|}{|z|}=r^2+r.$$

Из этого равенства и (2.22) получаем

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{Re}S(re^{i\varphi})=\frac{2r(\sin\varphi-1)\left(\sin\varphi+\frac{1+r}{2r}\right)}{(1+r)(1+2r\sin\varphi+r^2)},$$

откуда следует, что для $r\in(0,1)$ и $\varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ имеет место неравенство

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{Re}S(re^{i\varphi})\leqslant 0.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re}S(re^{i\varphi})\leqslant\operatorname{Re}S\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (2.21), получаем

$$I_3\leqslant 2^{\frac{1}{2}-m}\pi r^{m+\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi|k|}{2}}\leqslant 2^{-2m}\pi e^{\frac{\pi|k|}{2}}. \tag{2.24}$$

Объединяя неравенства (2.19), (2.20), (2.24), получаем

$$I\leqslant\left(\frac{\pi^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{2^{m+\frac{1}{2}}}\right)e^{\frac{\pi|k|}{2}}+(1+2^{-2m})\Gamma(2m)|k|^{-2m}.$$

Отсюда

$$|W_{k,m}(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right|\cdot|z^k|\cdot|z|^{\frac{1}{2}+m}.$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\pi^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{2^{m+\frac{1}{2}}}\right)e^{\frac{\pi|k|}{2}}+(1+2^{-2m})\,\Gamma(2m)\,|k|^{-2m}\right].$$

Заметив, что

$$|z^k|=|e^{k\ln z}|=e^{\frac{\pi|k|}{2}}, \tag{2.25}$$

приходим к оценке (2.6).

Лемма 3. *Пусть* $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Re} k=0$, $\operatorname{Im} k\cdot\operatorname{Im} z<0$,

$$\operatorname{Im} m=0,\ 0<|m|<\frac{1}{2},\ |k|\geqslant 3|z|.$$

Тогда имеет место оценка

$$|W_{k,m}(z)|\leqslant C(m)\left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right|e^{\pi|k|}\,|z|^{\frac{1}{2}-m}(1+|k|^{2m}). \tag{2.26}$$

Поскольку доказательство этой леммы во многом сходно с доказательством леммы 2, ограничимся кратким изложением. Как и в предыдущем случае докажем оценку в случае, когда $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Воспользуемся интегральным представлением (2.8). Интегрирование будем вести по контуру

$$l=l_1\cup l_2\cup l_3\cup l_4,$$

где

$$l_1=\{t\in C;\ \operatorname{Re} t\geqslant 0,\ \operatorname{Im} t=r\},$$

$$l_2=\left\{t\in C;\ \operatorname{Re} t=0,\ \operatorname{Im} t\in\left[\frac{1}{2},\ r\right]\right\},$$

$$l_3=\left\{t\in C;\ |t|=\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\ t\leqslant 0\right\},$$

$$l_4=\left\{t\in C;\ \operatorname{Re} t\geqslant 0,\ \operatorname{Im} t=-\frac{1}{2}\right\},$$

где r определено формулой (2.12).

Заметим, что

$$|W_{k,m}(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\right|e^{\frac{\pi|k|}{2}}|z|^{\frac{1}{2}+m}\,|I|,$$

$$|I|\leqslant\sum_{j=1}^{4}I_j,$$

где

$$I_j=\int\limits_{l_j}|f(t)|\,e^{|k|\,S(t)}\,dt.$$

На l_1 имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} S(t)=\pi-\operatorname{arctg}\frac{r}{s}-\operatorname{arctg}\frac{s}{1+r}-\frac{|z|}{|k|}s\leqslant$$

$$\leqslant \pi - \frac{|z|}{|k|} s \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{|z|}{2|k|} s,$$

при $s \geqslant \pi \frac{|z|}{|k|}$.

Отсюда и из неравенства (2.16) получаем

$$I_1 \leqslant \int_0^{\pi\frac{|k|}{|z|}} s^{2m-1} e^{\frac{\pi|k|}{2}} ds + \int_{\pi\frac{|k|}{|z|}}^{\infty} s^{2m-1} e^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{|z|}{2|k|}s\right)|k|} ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{\pi|k|}{2}} \left(\frac{1}{2m}\left(\pi\frac{|k|}{|z|}\right)^{2m} + \Gamma(2m) 2^{2m} |z|^{-2m}\right) <$$

$$\leqslant C(m) e^{\frac{\pi|k|}{2}} |z|^{-2m}(1 + |k|^{-2m}).$$

На l_2 $t = is$, $s > 0$. Следовательно

$$\operatorname{Re} S(t) = \frac{\pi}{2},$$

$$|f(t)| = s^{m-1/2}(1+s)^{m-1/2} \leqslant s^{2m-1}.$$

Поэтому

$$I_2 \leqslant e^{\frac{\pi|k|}{2}} \int_{i/2}^{r} s^{2m-1} ds < \frac{1}{2m} e^{\frac{\pi|k|}{2}} r^{2m}.$$

Заметив, что из (2.12) следует оценка $r \leqslant |k|^{1/2}|z|^{-1/2}$, получаем

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2m} e^{\pi|k|} |z|^{-m} |k|^m.$$

Из условия $|k| \geqslant 3|z|$, воспользовавшись соотношением (2.23), получаем

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} e^{i\varphi}\right) \leqslant 0 \text{ на } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Следовательно, на l_3

$$\operatorname{Re} S\left(\frac{1}{2} e^{i\varphi}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$I_3 \leqslant 2^{-2m} \pi e^{\frac{\pi|k|}{2}}.$$

Наконец на l_1 $t = s - i/2$

$$|f(s - i/2)| \leqslant s^{2m-1},$$

$$\operatorname{Re} S(s - i/2) < -\frac{|z|}{|k|} s.$$

Поэтому

$$I_4 \leqslant \int_0^{\infty} s^{2m-1} e^{-|z|s}\, ds = \Gamma(2m)\, |z|^{-2m}.$$

Окончательно получаем

$$I \leqslant C(m)\, e^{\frac{\pi |k|}{2}} |z|^{-2m} (1 + |k|^{2m}),$$

откуда следует оценка (2.26).

§ 3. Равномерное асимптотическое разложение функции Уиттекера

Целью этого параграфа, как и предыдущего, является доказательство равномерных оценок функции Уиттекера. При этом используется равномерное асимптотическое разложение функции Уиттекера, к выводу которого мы теперь переходим.

Лемма 4. *Пусть* $\operatorname{Re} k = 0$, $\operatorname{Re} z = 0$,

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} k < 0,\ \operatorname{Im} m = 0,\ 0 < |m| < \frac{1}{2}$$

и

$0 < c_1 \leqslant \frac{|z|}{|k|} \leqslant c_2$, *где* c_1, c_2 — *постоянные. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2} - m\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{k^m z^{1/4}}{(z - 4k)^{1/4}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ i\pi k - k \ln\left(1 - \frac{z}{2k} - \sqrt{\frac{z^2}{4k^2} - \frac{z}{k}}\right) - \right.$$

$$\left. - i\sqrt{kz - \frac{z^2}{4}} \right\} (1 + O(k^{-1})),\ |k| \to \infty, \tag{3.1}$$

равномерная относительно z.

Прежде чем перейти к доказательству, заметим, что из этой леммы сразу вытекает

Следствие. В предположениях леммы 4 имеет место оценка

$$|W_{k,m}(z)| \leqslant \mathrm{const} \left| \Gamma\left(k + \frac{1}{2} - m\right) \right| e^{\pi |k|} \frac{|z|^{1/4} |k|^m}{(|z| + 4|k|)^{1/4}}. \tag{3.2}$$

Доказательство леммы. Будем исходить из интегрального представления (2.7) функции Уиттекера. Совершая замену переменной $t \to |z|\, t$ и обозначая $\frac{|z|}{|k|}$ через β, а $|k|$ через λ, получаем

$$W_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2} - m\right)}{2\pi i} e^{-\frac{z}{2}} z^k |z|^{-k + \frac{1}{2} + m} I(\lambda, \beta), \tag{3.3}$$

где

$$I(\lambda, \beta) = \int_{\infty}^{(0+)} f(t)\, e^{\lambda S(t)}\, dt,$$

$$f(t) = (-t)^{m-1/2}(1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z)^{m-1/2},$$

$$S(t) = -i \operatorname{sign} \operatorname{Im} k \ln(-t) + i \operatorname{sing} \operatorname{Im} k \cdot$$

$$\cdot \ln(1 - it \operatorname{sign} \operatorname{Im} z) - \beta t.$$

Как и в предыдущем параграфе ограничимся рассмотрением случая $\operatorname{Im} z > 0$, переходя к сопряженному при $\operatorname{Im} z < 0$.

Зафиксируем $\beta \in [c_1, c_2]$. Особыми точками функций $S(t)$ и $f(t)$ являются точки 0, ∞, $-i$. Найдем точки перевала функции $S(t)$. С этой целью рассмотрим следующее уравнение:

$$S'(t) = it^{-1} - (1 - it)^{-1} - \beta = 0. \tag{3.4}$$

Оно имеет корни

$$t_1 = \frac{i}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} - 1\right),$$

$$t_2 = -\frac{i}{2}\left(\sqrt{1 + 4/\beta} + 1\right),$$

причем $\arg(-t_1) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\arg(-t_2) = \dfrac{\pi}{2}$. Заметим, что

$$\operatorname{Re} S(t) = -\arg(-t) + \arg(1 - it) - \beta \operatorname{Re} t.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} S(t_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} S(t_2) = -\frac{\pi}{2},$$

т. е. $\operatorname{Re} S(t_1) > \operatorname{Re} S(t_2)$.

Покажем, что существует перевальный контур, проходящий через точку t_1 и для этого контура точка t_1 является простой точкой перевала. Воспользуемся следующими леммой и следствием.

Лемма ([11]). Пусть z_0 — простая точка перевала функции $S(z)$, т. е. $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$.

Тогда в малой окрестности U точки z_0 линия уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$ состоит из двух гладких кривых l_1 и l_2, которые ортогональны в точке z_0 и разбивают U на 4 сектора. Знаки функции $\operatorname{Re}(S(z) - S(z_0))$ в соседних секторах различны.

Следствие ([11]). Через секторы, в которых $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$, проходит гладкая кривая l такая, что $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ при $z \in l$. Функция $\operatorname{Re} S(z)$ строго монотонно убывает вдоль l при удалении z от точки z_0.

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемой ситуации

$$S''(t_1) = -\frac{i}{t_1^2} - \frac{i}{(1 - it_1)^2} = i\beta^2 \sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} \neq 0. \tag{3.5}$$

Поэтому существует гладкая кривая l, проходящая через точку t_1 такая, что

$$\operatorname{Im} S(t) = \operatorname{Im} S(t_1), \text{ при } t \in l$$

и

$$\operatorname{Re} S(t) < \operatorname{Re} S(t_1), \text{ при } t \in l, \ t \neq t_1.$$

Естественно можно считать, что эта кривая содержится в круге радиуса δ с центром в точке t_1, где δ — положительное число, которое будет выбрано ниже. Пусть концами кривой l являются точки $\widehat{t_1}$ и $\widehat{t_2}$. Покажем, что при достаточно малых δ точки $\widehat{t_1}$ и $\widehat{t_2}$ располагаются следующим образом:

$$\operatorname{Re} \widehat{t_1} < 0, \ \operatorname{Re} \widehat{t_2} > 0. \tag{3.6}$$

Действительно

$$S(t) - S(t_1) = (t - t_1)^2 h(t),$$

где

$$h(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - s) S''(t_1 + s(t - t_1)) \, ds.$$

Из соотношения

$$S''(t_1) = i\beta^2 \sqrt{1 + \frac{4}{\beta}} \neq 0 \tag{3.7}$$

следует, что $h(t_1) \neq 0$.

Введем новую переменную

$$S(t) - S(t_1) = -z^2.$$

Тогда

$$z(t) = (t - t_1)\sqrt{-h(t)},$$

$$z'(t_1) = \sqrt{-h(t_1)} \neq 0$$

и

$$\sqrt{-h(t_1)} = \frac{1}{2} \beta \left(1 + \frac{4}{\beta}\right)^{1/4} \sqrt{-i}.$$

Выбор ветви под корнем осуществим следующим образом: $\sqrt{-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Отсюда $\arg z'(t_1) = -\frac{\pi}{4}$. Заметим, что функция $z = z(t)$ в окрестности точки t_1 осуществляет конформное отображение. Линией наибыстрейшего спуска является отрезок прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Таким образом, касательная к кривой l в точке t_1 параллельна биссектрисе первого квадранта, откуда и следуют соотношения (3.6). Дополним l следующими кривыми:

$$l_1 = \{t \in C; \ \operatorname{Im} t = \operatorname{Im} \widehat{t_2}, \ \operatorname{Re} t \geqslant \operatorname{Re} \widehat{t_2}\},$$

$$l_2 = \{t \in C; \ \operatorname{Re} t = \operatorname{Re} \widehat{t_1}, \ \operatorname{Im} t \in [0, \operatorname{Im} t_1]\},$$

$$l_3 = \{t = re^{i\varphi};\ r = |\operatorname{Re}\hat{t}_1|,\ \varphi \in [\pi, 2\pi]\},$$

$$l_4 = \{t \in C;\ \operatorname{Im} t = 0,\ \operatorname{Re} t \geqslant |\operatorname{Re}\hat{t}_1|\}.$$

Покажем, что полученный контур является перевальным.

a) Пусть $t \in l_1$, тогда $t = s + i\operatorname{Im}\hat{t}_2$, $s \geqslant \operatorname{Re}\hat{t}_2 > 0$. Обозначим

$$\Phi(s) = \operatorname{Re} S(s + i\operatorname{Im}\hat{t}_2) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\hat{t}_2}{s} - \operatorname{arctg}\frac{s}{1 + \operatorname{Im}\hat{t}_2} - \beta s.$$

Тогда

$$\Phi'(s) = \frac{\operatorname{Im}\hat{t}_2}{s^2 + (\operatorname{Im}\hat{t}_2)^2} - \frac{1 + \operatorname{Im}\hat{t}_2}{s^2 + (1 + \operatorname{Im}\hat{t}_2)^2} - \beta =$$

$$= -\frac{\operatorname{Im}\hat{t}_2(1 + \operatorname{Im}\hat{t}_2)(1 - \beta\operatorname{Im}\hat{t}_2(1 + \operatorname{Im}\hat{t}_2))}{(s^2 + (\operatorname{Im}\hat{t}_2)^2(s^2 + (1 + \operatorname{Im}\hat{t}_2)^2)}.$$

Как было показано выше $\operatorname{Im}\hat{t}_2 > \operatorname{Im}\hat{t}_1 = 1/2(\sqrt{1 + 4\beta^{-1}} - 1)$. Следовательно, $\Phi'(s) < 0$, т. е. функция $\Phi(s)$ убывает с ростом s. Поэтому на l_1

$$\operatorname{Re} S(t) \leqslant \operatorname{Re} S(\hat{t}_2) < \operatorname{Re} S(t_1).$$

b) Пусть $t \in l_2$, т. е. $t = \mu + is$, $\mu = -\operatorname{Re}\hat{t}_1$, $s \in [0, \operatorname{Im}\hat{t}_1]$. Обозначим

$$\Phi(s) = \operatorname{Re} S(-\mu + is) = \operatorname{arctg}\frac{t}{\mu} + \operatorname{arctg}\frac{\mu}{1 + t} + \beta\mu.$$

Имеет место неравенство

$$\Phi'(s) = \frac{\mu}{s^2 + \mu^2} - \frac{\mu}{(1 + s)^2 + \mu^2} > 0$$

и, следовательно, на l_2

$$\operatorname{Re} S(t) \leqslant \operatorname{Re} S(\hat{t}_1) < \operatorname{Re} S(t_1).$$

c) Пусть $t \in l_3$ т. е. $t = re^{i\varphi}$, $r = |\operatorname{Re}\hat{t}_1| < \delta$, $\varphi \in [\pi, 2\pi]$. Обозначим

$$\Phi(\varphi) = \operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) = \pi - \varphi - \operatorname{arctg}\frac{r\cos\varphi}{1 + r\sin\varphi} - \beta r\cos\varphi.$$

Отсюда

$$\Phi'(\varphi) = \beta r\sin\varphi - \frac{1 + r\sin\varphi}{1 + 2r\sin\varphi + r^2} \leqslant 0$$

для $\varphi \in [\pi, 2\pi]$, $r \leqslant 1$.

Следовательно

$$\operatorname{Re} S(re^{i\varphi}) \leqslant \operatorname{Re} S(-r) < \operatorname{Re} S(\hat{t}_1) < \operatorname{Re} S(t_1).$$

d) Наконец, пусть $t \in l_4$, тогда

$$\operatorname{Re} S(t) = -\pi - \operatorname{arctg} t - \beta t < -\pi < \operatorname{Re} S(t_1).$$

Таким образом, доказано, что контур $l_1 \cup l \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$ — перевальный, а точка t_1 является для него простой точкой перевала. Совершенно аналогично показываем, что при $\operatorname{Im} z < 0$ перевальным является контур, симметричный построенному относительно прямой $\operatorname{Im} t = 0$.

Теперь остается воспользоваться известным асимптотическим разложением (см., например, [11]), согласно которому

$$I(\lambda, \beta) \sim \exp[\lambda S(t_1)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n-1/2}, \quad \lambda \to \infty. \tag{3.8}$$

Главный член асимптотики имеет следующий вид:

$$I(\lambda, \beta) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(t_1)}} \exp[\lambda S(t_1)]\,(f(t_1) + O(\lambda^{-1}))). \tag{3.9}$$

Из (3.7), в соответствии с правилом выбора ветви для корня (см. [11]), получаем

$$\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(t_1)}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{1/2}\beta^{3/4}(\beta+4)^{1/4}} e^{i\frac{\pi}{4}}. \tag{3.10}$$

С другой стороны

$$S(t_1) = i\ln(-t_1) - i\ln(1 - it_1) - \beta t_1 = \frac{\pi}{2} +$$

$$+ i\ln\frac{\sqrt{1+4/\beta}-1}{\sqrt{1+4/\beta}+1} - i\frac{\beta}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{\beta}}-1\right), \tag{3.11}$$

$$f(t_1) = \beta^{1/2-m}\exp\left[i\frac{\pi}{4}(1-2m)\right]. \tag{3.12}$$

Наконец, из (3.9)—(3.12) для фиксированного $\beta \in [c_1, c_2]$ получаем

$$I(\lambda, \beta) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{1/2}\beta^{3/4}(\beta+4)^{1/4}} \exp\left\{i\frac{\pi}{4} + \lambda\left[\frac{\pi}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i\ln\left(\frac{\beta}{4}\left(\sqrt{1+\frac{4}{\beta}}-1\right)^2\right) - \frac{i\beta}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{\beta}}-1\right)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(\beta^{\frac{1}{2}-m}\exp\left[i\frac{\pi}{4}(1-2m)\right] + O(\lambda^{-1})\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{3.13}$$

Заметим, что хотя асимптотика функции $I(\lambda, \beta)$ получена при фиксированном значении параметра β, она имеет место равномерно по β в некоторой окрестности точки β. Достаточно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема ([12]). *Пусть* 1°. *функции* $f(z, \alpha)$ *и* $S(z, \alpha)$ *голоморфны по* $(z, \alpha) \in \Omega_z \times \Omega_\alpha$, *где* Ω_z, Ω_α — *области в комплексных плоскостях* z, α *соответственно;* 2°. γ — *конечный контур,* $\gamma \subset \Omega_z$; 3°. *функция* $S(z, \alpha_0)$, $\alpha_0 \in \Omega_\alpha$ *имеет простую точку перевала* $z_0 \in \Omega_z$, z_0 *является внутренней точкой контура* γ *и* $\max \operatorname{Re} S(z, \alpha_0)$ *достигается только в точке* z_0. *Тогда* $\exists\, \delta > 0$ *такое, что при* $\lambda \to \infty$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ *асимптотика интеграла*

$$F(\lambda, \alpha) = \int_\gamma f(z, \alpha) \exp[\lambda S(z, \alpha)]\, dz$$

равна вкладу от точки перевала $z_0(\alpha)$:

$$F(\lambda, \alpha) \sim \exp[\lambda S(z_0(\alpha), \alpha)] \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\alpha) \lambda^{-m-1/2},$$

а главный член асимптотики имеет вид

$$\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0(\alpha), \alpha)}}\, [f(z_0(\alpha), \alpha) + O(\lambda^{-1})] \exp[\lambda S(z_0(\alpha), \alpha)].$$

Покрывая отрезок $[c_1, c_2]$ такими окрестностями и выбирая конечное подпокрытие, показываем, что разложение (3.13) равномерно по β на $[c_1, c_2]$.

Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться соотношениями $|z| = -iz$, $|k| = ik$ и формулой (3.3).

Заметим, что оценка (3.2) сразу следует из асимптотической формулы (3.1).

§ 4. Доказательство теоремы

Рассмотрим функцию $\bar{E}_x(\eta)$, определенную формулой (1.14). При фиксированном $x > 0$ эта функция бесконечно дифференцируема по η на множестве $\Omega = \{\eta \in C \times R^{n-1}, \operatorname{Im} \eta_0 < 0\}$.

Из свойств функции Уиттекера $W_{k, 1/4}(z)$ (см. [9]) следует, что при фиксированном $\eta' \in R^{n-1}$ она регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} \eta_0 < 0$ и на лучах $\{\operatorname{Im} \eta_0 = 0, \operatorname{Re} \eta_0 \gtrless 0\}$, $\{\operatorname{Im} \eta_0 < 0, \operatorname{Re} \eta_0 = 0\}$.

Начнем с „грубой“ оценки для функции $\bar{E}_x(\eta)$ в области Ω. Заметим, что при $\operatorname{Im} \eta_0 < 0$

$$\operatorname{Re}(i\eta_0 x^2) > 0, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{Re}\left(k - \frac{1}{4}\right) = \frac{\operatorname{Im} \eta_0}{4} \frac{|\eta_0|^2 + |\eta'|^2}{|\eta_0|^2} - 1 < 0. \tag{4.2}$$

Следовательно, можно воспользоваться леммой 1. Из (1.14) и оценки (2.1) получаем следующее неравенство:

$$|\bar{E}_x(\eta)| \leqslant \exp\left\{-\operatorname{Im} k \cdot \arg z - \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} k \cdot \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z \cdot \theta(-\operatorname{Im} k \cdot \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z)\right\},$$

где

$$\operatorname{Im} k = -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \eta_0 \frac{|\eta_0|^2 - |\eta'|^2}{|\eta_0|^2}, \quad \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z = \operatorname{sgn} \operatorname{Re} \eta_0.$$

Отсюда

$$\operatorname{Im} k \cdot \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z = -\frac{1}{4} |\operatorname{Re} \eta_0| \frac{|\eta_0|^2 - |\eta'|^2}{|\eta_0|^2},$$

и

$$|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{4}|\operatorname{Re}\eta_0 \frac{|\eta_0|^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|^2}|\arg\eta_0| + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}|\operatorname{Re}\eta_0|\frac{|\eta_0|^2-|\eta'|^2}{4|\eta_0|^2}\theta(|\eta_0|^2-|\eta'|^2)\right\} \leqslant e^{\frac{\pi}{4}}|\eta_0|. \tag{4.3}$$

Перейдем к выводу оценок на лучах. Пусть $\operatorname{Im}\eta_0=0$, введем следующее разбиение:

$$\bar{\Omega}\cap\{\operatorname{Im}\eta_0=0,\ \operatorname{Re}\eta_0\neq 0\} = \bigcup_{j=0}^{4}\Omega_j,$$

где

$$\Omega_0=\{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\leqslant r_0\},\ r_0>0,$$

$$\Omega_1=\{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ \eta_0^2-|\eta'|^2\leqslant 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|\},$$

$$\Omega_2=\{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|\leqslant\eta_0^2-|\eta'|^2\leqslant 2\eta_0^2x^2\},$$

$$\Omega_3=\{\eta\times(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ \eta_0^2-|\eta'|^2\geqslant 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|,$$
$$\eta_0^2-|\eta'|^2\geqslant|2\eta_0^2x^2|\},$$

$$\Omega_4=\{\eta\in(R\setminus 0)\times R^{n-1};\ |\eta|\geqslant r_0,\ \eta_0^2-|\eta'|^2\geqslant 2\pi^{-1}|\eta_0|\ln|\eta|,$$
$$2\eta_0^2x^2\leqslant\eta_0^2-|\eta'|^2\leqslant|2\eta_0^2x^2|\}.$$

Из оценки (1.17) сразу следует, что для $\eta\in\Omega_0$

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\text{const}. \tag{4.4}$$

1) Пусть $\eta\in\Omega_1$. Из (1.14) получаем

$$|\tilde{E}_x(\eta)| = \frac{|\Gamma(3/4-k)|}{\sqrt{\pi}|\eta_0x^2|^{1/4}}|W_{k,\frac{1}{4}}(i\eta_0x^2)|.$$

Заметим, что из соотношений (4.1) и (4.2) следует выполнение условий леммы 1. Поэтому из оценки (2.1) получаем следующую:

$$|\tilde{E}_x(\eta)| < \exp\left\{-\operatorname{Im}k\cdot\arg z-\frac{\pi}{2}\operatorname{Im}k\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im}z\cdot\theta(-\operatorname{Im}k\cdot\operatorname{sgn}\operatorname{Im}z)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{\pi}{8}\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|}+\frac{\pi}{8}\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|}\theta(\eta_0^2-|\eta'|^2)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left(\exp\frac{\pi}{4}\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{|\eta_0|},\ 1\right).$$

Но поскольку $\eta\in\Omega_1$, отсюда следует оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant|\eta|^{1/2}. \tag{4.5}$$

2) Рассмотрим теперь область Ω_2. Из (1.14) и леммы 2 получаем оценку

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\text{const}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)\right|\cdot|z|^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\pi|k|}+|k|^{-2m}e^{\frac{\pi|k|}{2}}\right).$$

Как известно

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)=\frac{\pi}{\sin\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}=\frac{2\pi i}{e^{i\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}-e^{-i\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}}.$$

Отсюда

$$\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)\right|\leqslant 2\pi e^{-\pi|k|}. \tag{4.6}$$

Получаем оценку

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant \text{const}\,|\eta_0 x^2|^{\frac{1}{2}}\left(1+|k|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi|k|}{2}}\right).$$

Для $\eta\in\Omega_2$

$$|k|\geqslant\frac{1}{2\pi}\ln|\eta|\geqslant\frac{1}{2\pi}\ln r_0.$$

Следовательно

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\text{const}\cdot x\cdot|\eta_0|^{1/2}. \tag{4.7}$$

3) Рассмотрим область Ω_3. В этой области выполнены условия леммы 3, из которой следует оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\text{const}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+k\right)\right|e^{\pi|k|}(1+|k|^{1/2}).$$

Для $\eta\in\Omega_3$, $\eta_0^2-|\eta'|^2>0$, поэтому

$$|k|=\frac{\eta_0^2-|\eta'|^2}{4|\eta_0|}\leqslant\frac{1}{4}|\eta_0|.$$

Отсюда, воспользовавшись (4.6), получаем

$$|\tilde{E}_x(\eta)|\leqslant\text{const}\,|\eta_0|^{1/2}. \tag{4.8}$$

4) И, наконец, рассмотрим область Ω_4. В этой области выполнены условия леммы 4. В силу следствия из этой леммы и оценки (4.16), имеем

$$|\tilde{E}_x(\eta)|<\text{const}\frac{|k|^{1/4}}{(4|k|+|z|)^{1/4}}\leqslant\text{const}. \tag{4.9}$$

Объединяя оценки (4.4), (4.5), (4.7), (4.8) и (4.9), получаем

$$|\tilde{E}_x(\eta)|<\text{const}\,(1+x)(1+|\eta|^{1/2}). \tag{4.10}$$

Наша следующая цель — оценить производные функции $\tilde{E}_x(\eta)$ по x. Найдем вначале $\frac{d\tilde{E}_x}{dx}(\eta)|_{x=0}$. Из (1.14) и (1.11) имеем

$$\tilde{E}_x(\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\sqrt{\pi}\,z^{1/4}}\left(\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}M_{k,\frac{1}{4}}(z)+\right.$$

...АН НАУК ...

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)} M_{k,-\frac{1}{4}}(z)\Bigg).$$

Известны (см. [9]) следующие асимптотики:

$$M_{k,\frac{1}{4}}(z)=z^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{z}{2}}(1+O(z)),\ z\to 0,$$

$$M_{k,-\frac{1}{4}}(z)=z^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{z}{2}}(1+O(z)),\ z\to 0,$$

из которых следует асимптотическая формула

$$\tilde{E}_x(\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}(i\eta_0)^{1/2}e^{-i\frac{\eta_0 x^2}{2}}x(1+O(\eta_0 x^2))+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}e^{-i\frac{\eta_0 x^2}{2}}(1+O(\eta_0 x^2)).$$

Отсюда

$$\left.\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}(i\eta_0)^{1/2}=$$

$$=-2(i\eta_0)^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}. \tag{4.11}$$

Воспользуемся теперь асимптотической оценкой (см. [9]):

$$\lg\Gamma(z+a)=\left(z+a-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$

$$+O(z^{-\frac{1}{2}}),\ |z|\to\infty,$$

имеющей место при условии $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$. Из этой оценки следует, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}=\exp\left[\lg\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)-\lg\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)\right]=$$

$$=\exp\left[\frac{1}{2}\lg(-k)+O(k^{-\frac{1}{2}})\right],\ |k|\to\infty.$$

Поэтому верно неравенство

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-k\right)}\right| \leqslant \text{const}\,|k|^{1/2}. \tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) получаем оценку

$$\left|\left.\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx}\right|_{x=0}\right| \leqslant \text{const}\,|\eta_0|^{-1/2}\,|k|^{1/2} \leqslant \text{const}\,\left|\eta_0^2-|\eta'|^2\right|^{1/2} \leqslant \text{const}\,|\eta|.$$

С другой стороны

$$\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx} = \left.\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx}\right|_{x=0} + \int\limits_0^x \frac{d^2\tilde{E}_x(\eta)}{dx^2}\,dx =$$

$$= \left.\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx}\right|_{x=0} - \int\limits_0^x [(1+x^2)\,\eta_0^2 - |\eta'|^2]\,\tilde{E}_x(\eta)\,dx.$$

Следовательно

$$\left|\frac{d\tilde{E}_x(\eta)}{dx}\right| \leqslant \text{const}\,|\eta| + C(x)\,|\eta|^2\,|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant C(x)\,(1+|\eta|^{5/2}). \tag{4.13}$$

Воспользовавшись уравнением (1.8) и оценками (4.10), (4.13), получаем оценки полиномиального роста по η для $\frac{d^j\tilde{E}_x(\eta)}{dx^j}$, $j \geqslant 2$. Из этих оценок следует, что для фиксированного x и для любого $j \geqslant 0$

$$\frac{d^j\tilde{E}_x(\eta)}{dx^j} \in S'(R^n).$$

Поэтому существует распределеннозначная функция $E_x \in C^\infty(\overline{R^+}, S'(R^n))$, преобразование Фурье которой есть $\tilde{E}_x(\eta)$.

Далее из (1.8) и (1.9) следует, что E удовлетворяет уравнению (1.6) и граничному условию (1.7).

Осталось показать, что E_x обращается в ноль при $y_0<0$. При фиксированных x и η' функция $\eta_0 \to \tilde{E}_x(\eta)$ аналитична в $\{\eta_0 \in C;\ \text{Im}\,\eta_0 \leqslant 0,\ \eta_0 \neq 0\}$. Рассмотрим квадранты $\{\eta_0 \in C;\ \text{Im}\,\eta_0 < 0,\ \text{Re}\,\eta_0 \gtreqless 0\}$. Как было показано выше, на лучах $\{\eta_0 \in C;\ \text{Im}\,\eta_0 = 0,\ \text{Re}\,\eta_0 \gtreqless 0\}$ верна оценка (4.10). Заметим, что из леммы 1 следует оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant 1 \tag{4,14}$$

на отрицательной мнимой η_0— оси. Из (4.3) и этих оценок, применяя теорему Фрагмена—Линделефа, показываем, что в полуплоскости $\text{Im}\,\eta_0 \leqslant 0$ верна оценка

$$|\tilde{E}_x(\eta)| \leqslant \text{const}\,(1+|\eta|^{1/2}). \tag{4.15}$$

Для завершения доказательства остается применить теорему Пэли—Винера—Шварца.

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики ЕГУ

Поступила 1.III.1991

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ոչ խիստ գոգավոր եզրով մոդելային խառը խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը (ամփոփում).

Հոդվածում ստացված է $\{t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\}$ *տարածության քառորդում*

$$(1+x^2)\,u_{tt}-u_{xx}-\sum_{j=1}^{n-1}u_{y_jy_j}=0$$

մոդելային հավասարման համար Դիրիխլեի եզրային պայմանով խառը խնդրի ֆունդամենտալ լուծումը։ Այն գրվում է Ուիտտեկերի վերասերված հիպեր-երկրաչափական ֆունկցիայի միջոցով։ Ապացույցը հիմնված է Ուիտտեկերի ֆունկցիայի համար հավասարաչափ ասիմպտոտիկ գնահատականների դուրս բերման վրա։

R. G. AIRAPETYAN. *Fundamental solution of the model mixed problem with non strictly concave by bicharacteristics boundary* (summary)

In the paper the fundamental solution of the mixed problem with Dirichlet boundary condition in quarter space $\{t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\}$ for the equation

$$(1+x^2)\,u_{tt}-u_{xx}-\sum_{j=1}^{n-1}u_{y_jy_j}=0$$

is obtained. It is written by means of Whittaker confluent hypergeometric function. The proof is based on the conclusion of the uniform asymptotic estimates for the Whittaker function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. G. Friedlander.* The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 79, № 1, 1976, 145—159.
2. *F. G. Friedlander, R. B. Melrose.* The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays. II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 81, № 1, 1977, 97—120.
3. *R. B. Melrose.* Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems, Duke Math. J., 42, 1975, 605—635.
4. *R. B. Melrose.* Local Fourier—Airy integral operators, Duke Math. J., 42, 1975, 583—604.
5. *R. B. Melrose.* Airy operators, Comm. Part. Diff. Eq., 3, № 1, 1978, 1—76.
6. *G. Eskin.* Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed problem, J. Analyse Math., 32, 1977, 17—62.
7. *G. Eskin.* Initial boundary value problem for second order hyperbolic equations with general boundary conditions, J. Analyse Math., 40, 1981, 43—89.
8. *K. Kubota.* Microlocal parametrices and propagation of singularities near gliding points for hyperbolic mixed problems, I. Hokk. Math. J., 15, № 2, 1986, 243—303.
9. *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа, т. 2, Трансцендентные функции, М., «Физ-мат. изд.», 1963.

10. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1976.
11. *Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин.* Лекции по теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1982.
12. *М. В. Федорюк.* Метод перевала, М., «Наука», 1977.
13. *Л. Хермандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3, Псевдодифференциальные операторы, М., «Наука», 1987.