ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 3, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517. 5

С. А. АЙУНЦ

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ ДЛЯ СВЕРТОЧНЫХ СОВЕРШЕННЫХ К-СПЛАЙНОВ И ОПТИМАЛЬНАЯ К-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть W—некоторый класс функций и для $x(\cdot)\in W$ в фиксированных точках $t_1<\ldots<t_n$ задана информация $Ix=\{x(t_1),\cdots, x(t_n)\}$. Поставим задачу: наилучшим образом восстановить значение $x(\cdot)$ в фиксированной точке τ равномерно по всем $x(\cdot)\in W$ или более точно, требуется вычислить величину

$$R(\tau)=\inf_{\varphi: R^n\to R}\ \sup_{x(\cdot)\in W}|x(\tau)-\varphi(Ix)|,$$

где инфимум берется по всем n-мерным функциям φ: $R^n\to R$. Функции называются методами восстановления. $R(\tau)$—оптимальная погрешность. Если инфимум по $\varphi(\cdot)$ достигается на $\hat{\varphi}(\cdot)$, то $\hat{\varphi}(\cdot)$ называется оптимальным методом. Сформулированная задача называется задачей оптимальной интерполяции или оптимального восстановления. Впервые она рассматривалась С. А. Смоляком [1]. Результат данной статьи в основном мотивирован важными работами В. М. Тихомирова [2] и С. Миччелли, Т. Ривлин, С. Виноград [3], в которых эта задача решена в классе гладких функций. Здесь задача оптимальной интерполяции решается в классе функций

$$W_\infty^{K}(R)=\{x(\cdot)\,|\,x(t)=(K*u)(t)\ (t\in R,\ \|u(\cdot)\|_{L_\infty(R)}\leqslant 1\},$$

где $K(\cdot)$ непрерывная и интегрируемая функция на вещественной оси такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(t)\,dt=1 \text{ и } F(t,\xi):=K(t-\xi) \text{ строго вполне положительна,} \quad (1)$$

а $(K*u)(\cdot)$, как обычно, означает свертку функций $K(\cdot)$ и $u(\cdot)$. Напомним, что $F(t,\xi)$ называется строго вполне положительной, если

$$F\begin{pmatrix}t_1,\cdots, t_n\\ \xi_1,\cdots,\xi_n\end{pmatrix}:=\det(F(t_i,\xi_j))_{i,j=1}^n>0,$$

для любых $t_1<\cdots<t_n$, $\xi_1<\cdots<\xi_n$ из R и $n\in N$ (см. [4]).

Важным результатом данной работы является также основная теорема алгебры для сверточных совершенных К-сплайнов. Для полиномиальных совершенных сплайнов эту теорему доказал С. Карлин [5]. Перейдем к формулировке основных результатов.

Пусть $\Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} K(\xi)\, d\xi$ и $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < +\infty$ n фиксированных точек из R.

Определение 1. Функция $x(\cdot)$ называеся сверточным совершенным K-сплайном на R с узлами в точках $\{\theta_i\}_1^n$, если имеет место представление

$$\pm\, x(t) = (K * u_\theta)(t) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Phi(t - \theta_i),$$

где $u_0(t) = (-1)^i$ при $\theta_{i-1} \leqslant t < \theta_i$, $1 \leqslant i < n+1$, $\theta_0 = -\infty$, $\theta_{n+1} = +\infty$.

Теорема 1 (*о существовании чебышевских сверточных совершенных K-сплайнов*). *Если $n \geqslant 0$ — целое число, то существует единственный с точностью до знака сверточный совершенный K-сплайнов. $X_n^{*K}(\cdot) = (K * u_n)(\cdot)$, с n узлами, имеющий на отрезке $I = [0, 1]$ n-альтернанс.*

Доказательство см. [6]. Напомним, что функция $x(\cdot)$ имеет на отрезке I n-альтернанс ($Alt(x(\cdot), I) = n$), если существуют точки $0 \leqslant \tau_1 < \cdots < \tau_{n+1} \leqslant 1$, в которых $|x(\tau_i)| = \|x(\cdot)\|_{C(I)}$ и при этом $x(\tau_i)\, x(\tau_{i+1}) < 0$ и нет систем из большего, чем $n+1$ элементов, обладающих описанным свойством.

Введем следующие обозначения: $\hat{t}_i$ и $\hat{\theta}_i$, $1 \leqslant i < n$ — соответственно нули и узлы $X_n^{*K}(\cdot)$, $S(x)(\cdot)$, $T)$ и $Z(x(\cdot), T)$ — соответственно число перемен знака и число нулей функции $x(\cdot)$ на T. Для функции $x(\cdot) = (K * u)(\cdot)$, где $K(\cdot)$ удовлетворяет условию (1), имеет место (см, [4])

$$Z(x(\cdot), \mathrm{R}) \leqslant S(u(\cdot), \mathrm{R}). \tag{2}$$

Теорема 2 (*основная теорема алгебры для сверточных совершенных K-сплайнов*). *Для любых n точек $t_1 < \cdots < t_n$ существует единственный сверточный K-сплайн — $x(\cdot) = (K * u_\theta)(\cdot)$ с узлами в точках θ_i такой, что*

$$x_\theta(t_i) = (K * u_\theta)(t_i) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3}$$

Теорему докажем, используя следующую простую лемму (см., напр., [7]).

Лемма. *Пусть $A_0 \subset A \subset \mathrm{R}^n$. Если A_0 непусто, открыто и замкнуто в A, а A связано, то $A_0 = A$.*

Доказательство теоремы. Ввведем обозначения

$$A_0 = \{t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathrm{R}^n \mid t_1 < \cdots < t_n\},$$

$$A_0 = \{t \in A \mid \exists \theta \in A : x(t_i) = (K * u_\theta)(t_i) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Множество A_0 непусто, так как по теореме 1 $\hat{t} = (\hat{t}_1, \cdots, \hat{t}_n) \in A_0$, где $\hat{t}_i$ — нули функции $X_n^{*K}(\cdot) = (K * u_n)(\cdot)$. Покажем, что A_0 открыто в A. Пусть $t^{(0)} \in A_0$. Обозначим через $f_i(\theta, t_i) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \Phi(t_i - \theta_j)$ и рассмотрим уравнения $f_i(\theta, t_i) = 0$, $1 < i \leqslant n$. Поскольку $t^{(0)} \in A_0$, то по определению существует $\theta^{(0)} \in A$ такой, что $f_i(\theta^{(0)}, t_i^{(0)}) = 0$). Имеем также, что функции $f_i(\theta, t_i)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{\partial f_i(\theta^{(0)}, t_i^{(0)})}{\partial t_i} = 2\sum_{j=1}^{n}(-1)^j K(t_i^{(0)} - \theta_j^{(0)}) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции существуют функции $t_i = t_i(\theta)$, отображающие окрестности $u_{\delta_i}(\theta^{(0)})$ на интервалы $\Delta_i = (t_i^{(0)} - \varepsilon_i, t_i^{(0)} + \varepsilon_i)$ $(\delta_i > 0,\ \varepsilon_i > 0)$ такие, что $f_i(\theta, t_i(\theta)) = 0$ для $\theta \in u_{\delta i}(\theta^{(0)})$. Так как интервалы Δ_i можно выбрать непересекающимися, то обозначим через $\delta = \min\limits_{1<i<n} \delta_i$, $\varepsilon = \min\limits_{0<i<n} \varepsilon_i$, получим, что $u_\varepsilon(t^{(0)}) \subset A_0$. Значит A_0 открыто в A. Замкнутость A_0 можно доказать с помощью несложных рассуждений. Следовательно по лемме $A_0 = A$, этим и доказано существование сплайна $x(\cdot) = (K * u_\theta)(\cdot)$, удовлетворяющего условию (3). Единственность следует из неравенства (2). Теорема доказана.

Прежде чем перейти к теореме об оптимальной K-интерполяции, т. е. оптимальной интерполяции в классе $W_\infty^{*K}(\mathbf{R})$, введем некоторые обозначения. Для каждого $u(\cdot) \in L_\infty(\mathbf{R})$, $\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbf{R})} < 1$ обозначим через $S_\theta u(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(t - \theta_i)$, где θ_i узлы сплайна $x_\theta(\cdot) = K * u_\theta)(\cdot)$, удовлетворяющего условию (3), а a выбраны так, чтобы $S_\theta u(t_i) = (K * u)(t_i)$. Если для краткости обозначить

$$K * \begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \theta_1, \cdots, \theta_n \end{pmatrix} := \det(K(t_i - \theta_j))_{i,j=1}^{n},$$

то $S_\theta u(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$S_\theta u(\cdot) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\begin{vmatrix} k(t_1 - \theta_1) \cdots k(t_1 - \theta_n) & k(t_1 - \xi) \\ k(t_n - \theta_1) \cdots k(t_n - \theta_n) & k(t_n - \xi) \\ k(t - \theta_1) \cdots k(t - \theta_n) & 0 \end{vmatrix}}{K * \begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \theta_1, \cdots, \theta_n \end{pmatrix}} u(\xi)\, d\xi. \qquad (4)$$

Теорема 3. *Для погрешности $R(\tau)$ оптимального восстановления $x(\cdot)$ из класса $W_\infty^{*K}(\mathbf{R})$ в фиксированной точке τ по информации $Ix = |x(t_1), \cdots, x(t_n)|$ справедлива формула*

$$R(\tau) = |x_\theta(\tau)|,$$

где $x_\theta(\cdot)(K * u_\theta)(\cdot)$ — сверточный совершенный K-сплайн, удовлетворяющий условию (3). Оптимальным методом восстановления является интерполяция обобщенными полиномами (4): $\bar{\varphi}(Ix) = S_\theta u(\cdot)$.

Доказательство. Оценка снизу — $R(\tau) \geqslant |x_0(\tau)|$, следует из соотношения двойственности (см. в [7], лемма Смоляка)

$$R(\tau) = \sup_{\{x(\cdot) \in W | x(t_i) = 0,\ 1 < i < n\}} |x(\tau)|.$$

Для доказательства оценки сверху достаточно доказать, что

$$\sup_{\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1} |(K * u)(\tau) - S_0 u(\tau)| = |(K * u_0)(\tau)|. \qquad (5)$$

Используя соотношение (4), получим

$$(K * u)(\tau) - S_0 u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau, \xi) u(\xi)\, d\xi,$$

где

$$L(\tau, \xi) = K * \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n, \tau \\ \theta_1, \dots, \theta_n, \xi \end{pmatrix} \Big/ K * \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ \theta_1, \dots, \theta_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться также, что $L(t, \xi)(-1)^{i+j} \geqslant 0$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$, $\xi \in (\theta_j, \theta_{j+1})$ $(0 \leqslant i < n,\ 0 < j \leqslant n,\ \theta_0 = t_0 = -\infty,\ \theta_{n+1} = t_{n+1} = +\infty$. Таким образом

$$\sup_{\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1} |(K * u)(\tau) - S_0(\tau)| = \sup_{\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} < 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau, \xi) u(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$< \int_{-\infty}^{+\infty} |L(\tau, \xi)|\, d\xi,$$

причем равенство достигается при $u(\cdot) = u_0(\cdot)$. Далее, так как $(K * u_0)(t_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau, \xi) u_0(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau - \xi) u_0(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда следует требуемое равенство. Следовательно $R(\tau) = |x_0(\tau)|$. Теорема доказана.

Как естественное продолжение задачи оптимальной К-интерполяции возникает следующая экстремальная задача

$$\max_{\tau \in I} |R(\tau)| \to \inf; \ 0 < t_1 < \dots < t_n \leqslant 1, \qquad (6)$$

где минимум ищется по всевозможным узлам интерполяции $t_i \in I$.

Следствие. Значение $\hat{R}$ задачи (6) достигается на единственной системе точек $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$, где $\hat{t}_i$ — нули чебышевского сверточного совершенного K-сплайна — X_n^{*K}, причем $\hat{R} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}$.

Доказательство этого факта простое следствие теоремы 2 и свойств функции $X_n^{*K}(\cdot)$.

Из следствия и из соотношения двойственности следует равенство

$$\inf_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \sup_{\{x(\cdot)\in W_{-}^{*K}(I) \mid x(t_i)=0,\ 1<i<n\}} \|x(\cdot)\|_{C(I)} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)},$$

где $W_{-}^{*K}(I)$ — класс функций являющихся ограничениями на отрезке $I=[0, 1]$ функций $x(\cdot)$ из класса $W_{-}^{*K}(R)$.

В задаче оптимальной интерполяции вместо информации $Ix = \{x(t_1), \cdots, x(t_n)\}$ можно рассмотреть более общую — $\{l_1(x), \cdots, l_n(x)\}$, где l_i — линейные непрерывные функционалы. Это побуждает ввести следующее определение.

Определение 2. Величина

$$d^n(W, C(I)) = \inf_{\{l_1,\cdots,l_n\}} \sup_{\tau\in I} R(\tau) =$$

$$= \inf_{\{l_1,\cdots,l_n\}} \sup_{\{x(\cdot)\in W \mid l_i x(\cdot)=0,\ 1<i<n\}} \|x(\cdot)\|_{C(I)}.$$

лов, называется n-поперечником по Гельфанду. Если инфимум достигается на некотором наборе $\hat{l}_1, \cdots, \hat{l}_n$, то назовем его оптимальным.

Теорема 4. $d^n(W_{-}^{*K}(I), C(I)) = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}$, причем оптимальной будет система функционалов $\hat{l}_i(x(\cdot)) = x(\hat{t}_i)$, где $\hat{t}_i$ — нули $X_n^{*K}(\cdot)$.

Доказательство состоит из двух частей: оценка d^n сверху и снизу. Оценка сверху следует из (7):

$$d^n(W_{-}^{*K}(I), C(I)) \leqslant \sup_{\{x(\cdot)\in W_{-}^{*K}(I) \mid x(\hat{t}_i)=0,\ 1<i<n\}} \|x(\cdot)\|_{C(I)} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}.$$

Для доказательства оценки снизу рассматривается $n+1$—мерное пространство

$$L_{n+1}^{\Phi} = \left\{ y(\cdot) \mid y(t) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_i \Phi(t - \hat{\theta}_i),\ y_i \in R \right\}$$

сверточных совершенных K-сплайнов у которых узлы совпадают с узлами $X_n^{*K}(\cdot)$. Далее доказывается, что $\hat{\gamma} B_{n+1} \subset W_{-}^{*K}(I)$, где $\hat{\gamma} = \|X_n^{*K}(\cdot)\|_{C(I)}$, B_{n+1} — единичный шар пространства L_{n+1}^{Φ}. Отсюда, используя определение d^n и теорему о поперечнике шара (см., напр. [4]), имеем

$$d^n(W_{-}^{*K}(I), C(I)) \geqslant d^n(\hat{\gamma} B_{n+1}, C(I)) = \hat{\gamma}\, d^n(B_{n+1}, C(I)) = \hat{\gamma}.$$

Ереванский государственный университет

Поступила 25. IV. 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Смоляк. Об оптимальном восстановлени функций и функционалов от них. Автореферат канд. дис., М., 1966, 12 с.
2. В. М. Тихомиров. Наилучшие методы приближения и интерполирования гладких функций в пространстве $C([-1,1])$, Мат. сб., 1969, 80, № 2, 2?3—304.

3. *C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, S. Winograd*. The optimal recovery of smooth functions, Numer. Math., v. 26, 1976. 191—200.
4. *A. Pinkus*. *n*—widths in Approximation theory, Berlin, Springer, 1985.
5. *S. Karlin*. Interpolation properties of generalized perfect splihes and the solution cf certaion extremal problems, Trans. Amer. Math. Soc., 206, 1975, 25–56.
6. *С. А. Айунц*. Чебышевские и золотаревские сверточные совершенные К—сплайны и оптимальная К—экстраполяция, Ереван, ЕГУ. 1989, 23 с., Деп. в АрмНИИНТИ, 23.05.89., № 24—Ар. 89.
7. *М. Н. Маловемов, А. Б. Певный*. Полиномиальные сплайны, Учеб. пособие, Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1986, 120 с.