ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 3, 1991 Математика

УДК 517.51

Б. Л. ГОЛИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ ДЛЯ МОДУЛЕЙ КРУГОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Обозначим через

$$\Phi_{\sigma, n}(z)=x_{\sigma, n}z^n+\cdots;\ x_{\sigma, n}>0,\ n=0, 1, 2, \cdots$$

многочлены, ортонормированные на единичной окружности относительно распределения $d\sigma(\theta)$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{\sigma, n}[e^{i\theta})\overline{\varphi_{\sigma, m}(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta)=\delta_{mn},$$

где $\sigma(\theta)$: неубывающая, ограниченная функция с бесчисленным множеством точек роста на $[0, 2\pi]$, нормированная условием

$$\sigma(0)=0,\ \sigma(\theta-0)=\sigma(\theta).$$

Под круговыми параметрами $\{a_{\sigma, n}\}_0^\infty$ понимают комплексные числа

$$a_{\sigma, n}=-\frac{\overline{\varphi_{\sigma, n+1}(0)}}{x_{\sigma, n+1}},\ n=0, 1, 2, \cdots.$$

Известно, что $|a_{\sigma, n}|<1$, $n=0, 1, 2, \cdots$. Действительно, функция $\lambda_n(z)=$ $=\Phi_{\sigma, n+1}(z)/\Phi^*_{\sigma, n+1}(z)$, где $\Phi_{\sigma, n}(z)=\varphi_{\sigma, n}(z)/x_{\sigma, n}$; $\Phi^*_{\sigma, n}(z)=z^n\overline{\Phi}_{\sigma, n}(1/z)$ регулярна в $|z|<1$, так как все нули $\Phi_{\sigma, n}(z)$ лежат в $|z|<1$. Поскольку $|\lambda_n(e^{i\theta})|=1$, то

$$|\lambda_n(0)|=|\Phi_{\sigma, n+1}(0)|=|a_{\sigma, n}|<1.$$

Основная теорема настоящей статьи состоит в следующем: если $d\sigma(\theta)\equiv 0$ при $\theta\in[0, \alpha]\cup[2\pi-\alpha, 2\pi]$ и

$$J_\alpha=\int_0^{2\pi-\alpha}\lambda_\alpha(\theta)\ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty,\ \lambda_\alpha(\theta)=\sin\frac{\alpha}{2}\Big/\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}|a_{\sigma, n}|=\sin\frac{\alpha}{2},$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{\sigma, n}}{x_{\sigma, n+1}}=\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-m}.$$

1. Пусть C_0—аналитическая замкнутая жорданова кривая длиной l, ограничивающая в z плоскости $\mathbf{C}$ односвязную область $G, |d\zeta|=$

ds—элемент кривой C_0. Обозначим через $z=h(w)$ конформное отображение внешности кривой C_0 на внешность единичного круга Γ_0 w плоскости, нормированное условием $h(\infty)=\infty$, $\left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=w=\infty}>0$. Имеем

$$z=h(w)=cw+c_0+c_1w^{-1}+\cdots;\ z\in G,\ c>0, \tag{1}$$

$$w=H(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\cdots;\ b>0,\ c=b^{-1}. \tag{1'}$$

Если $z\in\partial G$, то будем считать $z=\zeta$, $w=v$. В соответствии с теоремой Осгуда-Каратеодори функция $z=h(w)$ осуществляет взаимнооднозначное и непрерывное соответствие между единичной окружностью $|w|=1$ и границей области $G:\partial G$. Постоянная c в (1) называется трансфинитным диаметром кривой C_0.

На $\Gamma_0: |w|=|v|$, $v=e^{i\psi}$, $\psi\in[0,\ 2\pi]$.

После конформного отображения будем иметь

$$d\sigma(s)=d\tau(\psi),\ |d\zeta|=ds, \tag{2}$$

где $\tau(\psi)$—некоторая ограниченная неубывающая на отрезке $[0,\ 2\pi]$ функция; почти всюду (п. в.) на C_0 имеем

$$\sigma'(s)\,ds=\sigma'(s)\,|d\zeta|=\tau'(\psi)\,d\psi=\tau'(\psi)\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta|=\tau'(\psi)\,|H'(\zeta)|\,ds, \tag{3}$$

откуда п. в. на $[0,\ 2\pi]$

$$\tau'(\psi)=\frac{\sigma'(s)}{H'(\zeta)},\ \zeta=h(v),\ v=e^{i\psi}. \tag{4}$$

2. Известно (см. 1), что условие

$$\int_0^{2\pi}\ln\tau'(\psi)\,d\psi>-\infty \tag{5}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы можно было построить аналитическую фракцию $D(w)$, регулярную и не равную нулю в области $|w|>1$ так, чтобы п. в. в $[0\ 2\pi]$

$$\tau'(\psi)=\lim_{R\to 1+0}|D(Re^{i\psi})|^{-2}. \tag{6}$$

Эта функция дается формулой

$$D(w)=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{w+e^{i\psi}}{w-e^{i\psi}}\ln\tau'(\psi)\,d\psi\right\},\ |w|>1, \tag{7}$$

причем

$$D(\infty)=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln\tau'(\psi)\,d\psi\right\}. \tag{8}$$

Положим

$$\Delta(z)=D[H(z)],\ z\in\mathbf{C}, \tag{9}$$

$\Delta(z)$—аналитическая функция, регулярная и не равная нулю в области $\mathbf{G}$, причем в силу (4) и (6) п. в. на C_0 имеем

$$\sigma'(s) = |H'(\zeta)|\,|\Delta(\zeta)|^{-2}, \tag{10}$$

где

$$\Delta(\zeta) = \lim_{z\to\zeta} \Delta(z),\ \zeta \in C_0. \tag{11}$$

По (4), (8) и (9) получим

$$\Delta^{-1}(\infty) = D^{-1}(\infty) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{C_0} \ln\frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|}\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta|\right\}. \tag{12}$$

Условие (5) эквивалентно условию

$$\int_{C_0} \ln\frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|}\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta| = \int_{C_0} \ln\sigma'(s)\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta| - \int_0^{2\pi} \ln|h'(e^{i\psi})|\,d\psi > -\infty..$$

последний интеграл существует, ибо $h'(w) \in H_1$, следовательно условие

$$\int_{C_0} \ln\sigma'(\zeta)\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta| > -\infty \tag{13}$$

эквивалентно условию (5), которое необходимо и достаточно для возможности построения $\Delta(z)$, обладающей указанным свойством.

3. Следуя Сеге (см. [2], с. 45), введем многочлены Фабера $f_n(z)$ как полиномиальную часть разложения

$$g_n(z) = [H(z)]^n = f_n(z) + O\left(\frac{1}{z}\right),\ f_n(z) = \frac{z^n}{c^n} + \cdots. \tag{14}$$

Функция $g_n(z)$ регулярна во всех конечных точках замкнутой внешности кривой C_0 и имеет полюс порядка n в $z=\infty$. Лорановское разложение функции $g_n(z)$ для точки $z=\infty$ начинается с члена $C^{-n} z^n$ и далее идет по убывающим степеням z.

Сеге доказал (см. [2], с. 46, 47), что при принятых условиях насчет кривой C_0, существуют две постоянные M и r, $M>0$, $0<r<1$ такие, что равномерно на C_0 имеет место неравенство

$$|f_n(\zeta) - g_n(\zeta)| < Mr^n. \tag{15}$$

Рассмотрим многочлены

$$R_n(z) = C^n \sum_{k=0}^{m} a_k f_{n-k},\ 0 < m < n,\ a_0 = 1.$$

Коэффициенты $\{a_k\}_1^m$ и m—совершенно произвольны.

Применяя (14) и (15) получим для $|w| \neq 1$.

$$R_n[h(w)] = c^n \sum_{k=0}^{m} a_k g_{n-k}[h(w)] + O(c^n r^n) =$$

$$= (cw)^n\left\{1 + \sum_{k=1}^{m} a_k w^{-k}\right\} + O(c^n r^n). \tag{16}$$

4. Пусть $P_n(\zeta)=\zeta^n+\cdots$; $n=0, 1, 2, \cdots$ — многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля (в метрике $L^2_\sigma(0, 2\pi)$) из всех многочленов степени $\leqslant n$ со старшим коэффициентом, равным единице, т. е.

$$\mu_n=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0}|P_n(\zeta)|^2\,d\sigma(s)\right\}^{1/2}<\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0}|R_n(\zeta)|^2\,d\sigma(s)\right\}^{1/2}=$$

$$=c^n\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|1+\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{w^k}\right|^2 d\tau(\psi)\right\}^{1/2}+O(c^n r^n). \quad (17)$$

Если C — дуга C_0, то будем считать, что на $C_0\setminus C\ d\sigma(s)=0$, а C будем представлять как разрез плоскости $\mathbf{C}$ с правым и левым берегами.

Обозначим через A_f класс функций $f(\omega)$, регулярных и не равных нулю в замкнутой области $|w|>1$ и нормированные условием $f(\infty)=1$: $: f(w)=1+\beta_1 w^{-1}+\beta_2 w^{-2}+\cdots$,. Обозначим

$$\tau^2=\inf_{f\in A_f}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(w)|^2\,d\tau(\psi)\right\},$$

а также

$$\tau_\nu^2=\inf_{\{d_k^{(\nu)}\}_{k=1}^{\nu}}\left\{\frac{1}{2\pi}\left|1+\sum_{k=1}^{\nu}d_k^{(\nu)}w^{-k}\right|^2 d\tau(\psi)=\right.$$

$$=\inf_{\{\overline{d}_k^{(\nu)}\}_{k=1}^{\nu}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|1+\sum_{k=1}^{\nu}\overline{d}_k^{(\nu)}w^k\right|^2 d\tau(\psi), \quad (18)$$

причем

$$1+\sum_{k=1}^{\nu}\overline{d}_k^{(\nu)}w^k\neq 0,\ \nu=1, 2, \cdots, \text{ при } |w|\leqslant 1. \quad (19)$$

Так как функция $f(w)$ содержит, как частный случай, функцию $1+\sum\limits_{k=1}^{\nu}d_k^{(\nu)}w^{-k}$, то имеем

$$\tau<\tau_\nu\leqslant\tau_{\nu-1},\ \nu=1, 2, \cdots, \lim_{\nu\to\infty}\tau_\nu=\tau_0\geqslant 0,\ \tau\leqslant\tau_0. \quad (20)$$

Полагая в (17) $a_k=\overline{d}_k^{(\nu)}$, $m=\nu$, получим в силу (20)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mu_n}{C^n}\leqslant\tau\leqslant\tau_0. \quad (21)$$

Известно (см. 1, с. 14), что многочлен $\Phi_\nu^*(w)$, минимизирующий интеграл (18) и нормированный условием $\Phi_\nu^*(0)=1$, не обращается в нуль в области $|W|\leqslant 1$, кроме того, по [3], с. 25, 26 и [4] имеем

$$\tau_0^2=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\tau'(\psi)\,d\psi\right\}, \quad (22)$$

(причем, если интеграл не существует, то правую часть полагаем равной нулю).

Поэтому в силу (21), (4) и (22) можно записать

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mu_n}{C^n} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{C_0} \ln\frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|}\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta|\right\}. \tag{23}$$

Существование интеграла в (23), как было показано выше, эквивалентно существованию интеграла

$$\int_{C_0} \ln\sigma'(s)\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta| \text{ или } \int_0^{2\pi} \ln\sigma'(s)\,d\psi.$$

Докажем теперь неравенство, обратное (23).

Так как

$$\mu_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0} |P_n(\zeta)|^2\,d\sigma(s) > \frac{1}{2\pi}\int_{C_0} |P_n(\zeta)|^2\,\sigma'(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n[h(e^{i\psi})]|^2\,\tau'(\psi)\,d\psi,$$

то, применяя (6), получим

$$\mu_n^2 \geqslant \lim_{R\to 1+0}\left\{\frac{R^{n-1}}{2\pi}\int_{|w|=R}\left|\frac{P_n[h(w)]}{w^n D(w)}\right|^2 |dw|\right\}, \quad w = Re^{i\psi}. \tag{24}$$

Так как функция под знаком модуля в правой части (24) регулярна в области $|w|>1$ и имеет при $w=\infty$ значение $C^n/\Delta(\infty)$, то из (24) следует, что

$$\frac{\mu_n}{C^n} \geqslant \Delta^{-1}(\infty).$$

В силу (12)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mu_n}{C^n} \geqslant \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{C_0} \ln\frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|}\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta|\right\}. \tag{25}$$

Сопоставляя (23) и (25), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{C^n} = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{C_0} \ln\frac{\sigma'(s)}{|H'(\zeta)|}\,|H'(\zeta)|\,|d\zeta|\right\} = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \ln\sigma'(s)\,d\psi\right\}.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть

$$\mu_n = \min_{\{P_n\}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{C_0} |P_n(\zeta)|^2\,d\sigma(s)\right\}^{1/2},$$

где $\{P_n(\zeta)\}$—совокупность многочленов n-ой степени со старшим коэффициентом, равным единице, $ds=|d\zeta|$—элемент дуги аналитической замкнутой жордановой кривой C_0, ограничивающей односвязную область, $\sigma(s)$—функция распределения, $\zeta=h(w)$ $(w=e^{i\psi})$—отображение кривой C_0 на единичную окружность $\Gamma_0=|e^{i\psi}|_0^{2\pi}$, c—трансфинитный диаметр C_0. Тогда можно записать

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{C^n}=\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_0}\ln\sigma'(s)\,d\psi\right\},\tag{26}$$

если интеграл в правой части (26) существует.

5. Частные случаи.

1) $C_0=\Gamma_0$. Трансфинитный диаметр единичной окружности равен единице, а $\mu_n=\varkappa_{\sigma,n}^{-1}$ (см. [3], с. 26, 14). Если

$$\int_0^{2\pi}\ln\sigma'(\psi)\,d\psi>-\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\varkappa_{\sigma,n}=\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln\sigma'(\psi)\,d\psi\right\}.\tag{27}$$

Предельное соотношение (27) было впервые доказано С. Верблюнским (см. [4]) и независимо Я. Л. Геронимусом (см. [3], с. 19, 25), оно было впоследствии передоказано в [2], с. 62—67 с применением одной теоремы о монотонных функциях с равной нулю производной (см. [2], с. 16—18). В [5] (с. 118—122) доказательство (27) основано на идее Сегё из [2] и одной теоремы функционального анализа.

2) $C_0=\Gamma_\alpha=[e^{i\alpha},\ e^{i(2\pi-\alpha)}]$ — разрез плоскости $\mathbf{C}$ вдоль дуги Γ_α. Пусть $B_\alpha=\mathbf{C}\setminus\Gamma_\alpha$. Очевидно, $ds=d\theta$, $\mu_n=\varkappa_{\sigma,n}^{-1}$. Этот случай можно толковать так, что $d\sigma(\theta)\equiv0$ для $\theta\in[0,\ 2\pi]\setminus[\alpha,\ 2\pi-\alpha]$. Конформное отображение области B_α на внешность единичного круга $|w|>1$ осуществляется функцией

$$z=h(w)=w\,\frac{cw-1}{w-c},\quad w=H(z)=\frac{z+1+\Phi(z)}{2c},$$

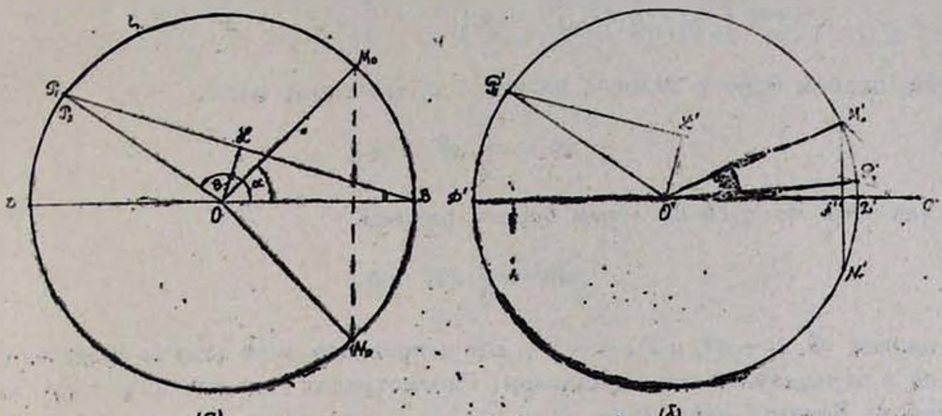
c — трансфинитный диаметр, Γ_α, причем выбрана та ветвь двузначной функции $\Phi(z)=\sqrt{(z-e^{i\alpha})(z-e^{-i\alpha})}$, для которой $\lim\Phi(z)/z=1$. Полагая $z=e^{i\theta}$, $w=e^{i\psi}$, имеем на дуговом разрезе Γ_α:

$$e^{i\psi}=e^{i\frac{\theta}{2}}\,\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}\pm i\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}\pm\lambda\right)},\tag{27'}$$

где

$$\cos\lambda=\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},\quad \alpha\leqslant\theta<2\pi-\alpha,\ 0<\lambda\leqslant\pi.$$

На рис. 1 (а) изображена плоскость z, разрезанная вдоль $\Gamma_\alpha = \smile M_0 D N_0 (\alpha \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \alpha)$, $\alpha = \measuredangle BOM_0$. Двигаясь в направлении $M_0 D N_0$, обозначим через P_1 и P_2 две совпадающие точки, лежащие соответственно на правом и левом берегах разреза Γ_α. На рис. 1 (б) изображена плоскость w, причем $O'C' = C^{-1}$. Проведем из точки C'



(а) (б)

Рис 1

касательную к окружности, получим точку M_0', опустим перепендикуляр $M_0'A'$. Так как $O'M' = \sqrt{O'A'} . \sqrt{O'C'} = 1$, то $O'A' = C = \cos\frac{\alpha}{2}$ и поэтому $\measuredangle M_0'O'A' = \frac{\alpha}{2}$. Из точки C' проведем прямую $C'P_2'P_1' \parallel$ $\parallel BP_1$. Пусть $O'Z' \perp C'P_1'$. Так как $O'Z' = \frac{1}{C}\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} \Big/ \cos\frac{\alpha}{2}$, то $\cos \measuredangle Z'O'P_2' = \cos\lambda$, $\measuredangle Z'O'P_2' = \measuredangle Z'O'P_1' = \lambda$. Очевидно также, что $O'Z' \parallel OZ$. При $\theta = \alpha$ $\cos = 1$, $\lambda = 0$ и $M_0' \to M_0$. При $\theta = -\alpha$, $\lambda = \pi$ и $N_0' \to w_0$, $w(P_1') = e^{i\left(\lambda + \frac{\theta}{2}\right)}$, $w(P_2') = e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \lambda\right)}$. Если точка P_1 движется по правому берегу разреза, пробегая дугу M_0DN_0, то соответствующая ей точка P_1' пробегает дугу $M_0'D'N_0'$, если после этого точка P_2 будет пробегать дугу N_0DM_0, двигаясь по левому берегу разреза, то при этом точка P_2' будет пробегать дугу $N_0'BM_0'$. Таким образом, когда точка P_1 опишет, двигаясь в положительном направлении, всю окружность $|z| = 1$, соответствующая точка P дважды опишет разрез Γ_α, двигаясь сперва в положительном направлении по правому берегу, а затем в отрицательном направлении по левому берегу. Так как на окружности $|z| = 1$ имеем в силу (3) $w = e^{i\psi} = \exp\left\{i\left(\frac{\theta}{2} \pm \lambda\right)\right\}$, то найдем на правом берегу разреза

$$\psi_1 = \frac{\theta_1}{2} + \lambda_1, \quad d\psi_1 = \frac{1}{2}\,d\theta_1 + d\lambda_1,$$

на левом берегу разреза

$$\psi_2 = \frac{\theta_2}{2} - \lambda_2, \quad d\psi_2 = \frac{1}{2}\, d\theta_2 - d\lambda_2,$$

причем $\theta_1 = \theta_2$ и в силу (27) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Рассмотрим дугу

$$\left\{ \exp\left| \theta_1 - \frac{1}{2}\, d\theta_1 \right|, \ \exp\left| \theta_1 + \frac{1}{2}\, d\theta_1 \right| \right\}, \quad d\theta_1 > 0.$$

На правом берегу разреза на ней сосредоточена масса

$$d\psi_1 = \frac{1}{2}\, d\theta_1 + d\lambda_1,$$

для этой же дуги на левом берегу разреза

$$d\psi_2 = \frac{1}{2}\, d\theta_2 + d\lambda_2,$$

причем $d\theta_2 = -d\theta_1$ и $d\lambda_2 = -d\lambda_1$, ибо теперь эта дуга должна пробегаться в отрицательном направлении. Рассматривая вместо двух дуг на обоих берегах одну дугу

$$\left\{ \exp\left| \theta_1 - \frac{1}{2}\, d\theta_1 \right|, \ \exp\left[\theta_2 + \frac{1}{2}\, d\theta_2 \right] \right\}, \quad d\theta = d\theta_1 = -d\theta_2 > 0,$$

пробегаемую лишь один раз и притом в положительном направлении, следует, что на ней надо сосредоточить массу

$$d\psi = d\psi_1 + d\psi_2 = \frac{1}{2}(d\theta_1 + d\theta_2) + d\lambda_1 - d\lambda_2 = 2\, d\lambda, \tag{28}$$

$$d\lambda = d\lambda_1 = d\left\{ \arccos\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \right) \right\} = \frac{1}{2}\, \frac{\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}}}. \tag{29}$$

Поскольку $\mu_n = \varkappa_{\sigma,n}^{-1}$, а трансфинитный диаметр c дуги Γ_α равен $\cos\frac{\alpha}{2}$, то из (28), (29) и (26) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n}{\varkappa_{\sigma,n}} = \exp\left\{ -\frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \sigma'(\theta)\, \omega_\alpha(\theta)\, d\theta, \tag{30}\right.$$

где

$$\omega_\alpha(\theta) = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}}} = \lambda_\alpha(\theta).$$

Если применить (30) для $(n-1)$, разделить одно равенство на другое и воспользоваться известным соотношением (см. [3], с. 160).

$$\varkappa_{\sigma, n-1}/\varkappa_{\sigma, n} = \sqrt{1 - |a_{\sigma, n}|^2},$$

то получим

$$\lim_{n\to\infty} |a_{\sigma, n}| = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Если* $d\sigma(\theta) \equiv 0$ *для* $\theta \in [0, \alpha] \cup [2\pi - \alpha]$, $\alpha > 0$ *и*

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \sigma'(\theta) \lambda_\alpha(\theta)\, d\theta > -\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} |a_{\sigma, n}| = \sin\frac{\alpha}{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varkappa_{\sigma, n}}{\varkappa_{\sigma, n+m}} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-m}. \qquad (31)$$

Следствие Пусть $\alpha = \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\sigma'(\theta) \geqslant m_0 > 0$ п. в. в $[\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon]$, $d\sigma(\theta) \equiv 0$: $\theta \in [0, \pi-\varepsilon] \cup [\pi+\varepsilon, 2\pi]$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} |a_{\sigma, n}| = \cos\frac{\varepsilon}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\varkappa_{\sigma, n}}{\varkappa_{\sigma, n+m}} = \left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-m} = a^{-m}. \qquad (32)$$

Действительно, обозначим $\cos\frac{\sigma}{2} = \sin\frac{\varepsilon}{2} = a\ (< 1)$.

Очевидно

$$J_\alpha = \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \ln \sigma'(\theta) \omega_\alpha(\theta)\, d\theta \geqslant \ln m_0 \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \lambda_\alpha(\theta)\, d\theta =$$

$$= -2\ln m_0 \int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\ln m_0 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{b}{a}\right) > -\infty,$$

$$b = 2(\pi - \arccos a).$$

В силу теоремы 2 справедливо (32).

В связи со сказанным, сформулируем задачу, поставленную Я. Л. Геронимусом (см. [6], с. 88): Выяснить, каким условиям должна удовлетворять функция $\sigma(\theta)$, чтобы выполнялось условие $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_{\sigma, n}| = b_\sigma < 1$; не достаточно ли для этого выполнения условия:

$$(\sigma)\ \sigma(\theta_2) - \sigma(\theta_1) \geqslant m_0(\theta_2 - \theta_1), \quad \alpha \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \beta?$$

Харьковский авиационный институт

Поступила 20. VIII. 1989

Բ. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Օրթոգոնալ բազմանդամների արտացոլման գործակիցների բացարձակ արժեքներին վերաբերվող սահմանային առնչությունների մասին *(ամփոփում).*

Դիցուք

$$\varphi_{\sigma,n}(z) = \varkappa_{\sigma,n} z^n + \cdots, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \varkappa_{\sigma,n} > 0.$$

միավոր շրջանագծի վրա $d\sigma(\theta)$ *չափով օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ է, այսինքն*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_{\sigma,n}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{\sigma,m}(e^{i\theta})}\, d\sigma\theta = \delta_{nm}$$

և $a_{\sigma,n}$ — *երբ այդ համակարգին համապատասխանող արտացոլման գործակիցներն են՝*

$$a_{\sigma,n} = -\frac{\overline{\varphi_{\sigma,n-1}}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}, \quad n = 0, 1, 2\cdots$$

եթե $d\sigma(\theta) \equiv 0$, *երբ*

$$J_\alpha = \int\limits_\alpha^{2\pi-\alpha} \lambda_\alpha(\theta) \ln\sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty, \quad \lambda_\alpha(\theta) = \sin\theta_2 \Big/ \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

ապա

$$\lim_{n\to\infty} |a_{\sigma,n}| = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \lim \frac{\varkappa_{\sigma,n}}{\varkappa_{\sigma,n+m}} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-m}.$$

B. L. GOLINSKY *On a limit relation concerning the moduluž of the reflection coefficients of the orthogonal polynomials* (summary)

Let

$$\varphi_{\sigma,n}(z) = \varkappa_{\sigma,n} z^n + \cdots, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \varkappa_{\sigma,n} > 0,$$

be the system of orthonormal polynomials on the unit circle, associated with measure $d\sigma(0)$, i. e.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_{\sigma,n}(e^{i\theta})\overline{\varphi_{\sigma,m}(e^{i\theta})}\, d\sigma(\theta) = \delta_{nm}$$

and $a_{\sigma,n}$ — reflection coefficients. corresponding to this systems:

$$a_{\sigma,n} = -\frac{\overline{\varphi_{\sigma,n+1}(0)}}{\varkappa_{\sigma,n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

If $d\sigma(\theta) = 0$ when $\theta \in [0, \alpha] \cup [2\pi - \alpha_2, 2\pi]$ and

$$J_\alpha = \int\limits_\alpha^{2\pi-\alpha} \lambda_\alpha(\theta) \ln\sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty, \quad \lambda_\alpha(\theta) = \sin\frac{\theta}{2} \Big/ \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

then

$$\lim_{n\to\infty} |a_{\sigma,n}| = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \lim \frac{\varkappa_{\sigma,n}}{\varkappa_{\sigma,n+m}} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-m}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Szegö.* A problem concerning orthogonal polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. t. 37, № 1, 1935, 196—206.
2. *У. Гренандер и Г. Сегё.* Теплицевы формы и их приложения.—М.: ИЛ, 1961.

3. *Я. Л. Геронимус.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке.—М.: Физматгиз, 1958.

4. *S. Verblunsky.* On positive harmonic functions. II, Proc. Lond. Math. Soc., t. 4, 1925, 290–320.

5. *Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

6. *Я. Л. Геронимус.* Об одном предположении В. А. Стеклова. Зап. механо-математ. ф-та ХГУ и Харьковского математ. об-ва. т. XXIX, с. 4, 1963, с. 79—88.