ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 3, 1991 Математика

УДК 517.95

Г. С. АКОПЯН, Р. Л. ШАХБАГЯН

О ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

1°. Одной из важнейших проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A(u),\ t>0, \tag{1}$$

для которого корректно поставлена задача с начальным условием

$$u|_{t=0}=u_0(x), \tag{2}$$

является изучение поведения их траекторий $u(t, x)$ при $t\to\infty$.

Оказалось, что эта задача связана с существованием многообразий, называемых аттракторами, обладающих следующими свойствами: притяжения траекторий $u(t, x)$ и инвариантности относительно полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1), (2).

В работах [1], [2] установлено, что структура аттракторов полугрупп, обладающих глобальной функцией Ляпунова, можно явно описать с помощью неустойчивых инвариантных многообразий, проходящих через неподвижные точки полугрупп $\{S_t\}$.

В указанных выше работах [1], [2] А. В. Бабиным и М. И. Вишиком для некоторых модельных эволюционных уравнений второго порядка была конструктивно построена функция Ляпунова и описана структура аттракторов полугрупп, порожденных этими задачами.

Настоящая работа посвящена доказательству существования функции Ляпунова для некоторого класса нелинейных параболических уравнений высокого порядка и описанию с её помощью аттракторов полугрупп, порожденных рассматриваемым классом операторов.

2°. Введем необходимые для дальнейшего обозначения, определения и некоторые известные факты (см. [1]—[3]).

Пусть X—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Семейство операторов $\{S_t,\ t\geq 0\}$, действующих в пространстве X

$$S_t: X\to X,\ \forall t\geq 0,$$

называется полугруппой, если композиция

$$S_t\circ S_\tau=S_{t+\tau},\ \forall t,\ \tau>0,$$
$$S_0=I.$$

где I—единичный оператор.

Определение 2. ([1]). Пусть $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$—полугруппа операторов S_t, действующих в X. Ограниченное, замкнутое в X, множество $\mathfrak{M}$ называется максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, если

1) для любого ограниченного множества $B\subset X$,

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}(S_t B,\ \mathfrak{M})=0 \text{ (условие притяжения)},$$

где $\operatorname{dist}(F,\ G)=\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|$;

2) $S_t\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ для любого $t\geqslant 0$ (условие инвариантности).

Имеет место следующая

Теорема А. ([1]). *Пусть полугруппа $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$, S_t: $X\to X$ удовлетворяет следующим условиям-*

а) *полугруппа $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$ равномерно ограничена, то есть для любого $R>0$ существует постоянная $C(R)$ такая, что*

$$\|S_t u\|< C(R), \text{ при } \|u\|\leqslant R \text{ и } \forall t\geqslant 0;$$

б) *существует компактное в X поглащающее множество B_0, то есть для любого ограниченного множества $B\subset X$ существует такое $T>0$, что при $t\geqslant T$, $S_t B\subset B_0$*

с) *операторы $S_t: X\to X$ непрерывны при $t\geqslant 0$.*

Тогда у полугруппы $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$ имеется компактный максимальный аттрактор.

Для любого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ положим

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}, \text{ где } D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\ (i=1,\ 2,\cdots,\ n).$$

Пространство $L_p(0,\ T;\ W_p^m(\Omega))$, по определению,—банахово пространство функций $u(x,\ t):(0,\ T)\to W_p^m(\Omega)$ с нормой

$$|\!|\!|u(x,\ t)|\!|\!|_{m,\ p}=\left(\int_0^T\|u(x,\ t)\|_{m,\ p}^p\,dt\right)^{1/p},$$

где

$$\|u(x,\ t)\|_{m,\ p}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u|^p\,dx\right)^{1/p},\ p\geqslant 2.$$

Круглыми скобками $(\,,)$ будем обозначать скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Пространство $L_p^{\mathrm{loc}}(0,\ \infty;\ W_p^m(\Omega))=\{u(x,\ t)$; для любого $T>0$, $u(x,\ t)\in L_p(0,\ T;\ W_p^m(\Omega))\}$.

Пусть Ω—ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma=\partial\Omega$.

В цилиндре $Q=(0,\ \infty)\times\Omega$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+L(u)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_\alpha(x,\ D^\gamma u))=0,\ (x,\ t)\in Q, \qquad (3)$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x), \qquad (4)$$

$$D^{\omega} u|_{\Sigma} = 0, \ |\omega| < m-1, \ \Sigma = (0, \infty) \times \Gamma, \tag{5}$$

где α, γ, ω — мультииндексы, функции $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$ нелинейны и зависят, вообще говоря, от всех ξ_γ с $|\gamma| < m$.

Предполагается, что

1) функции $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$ определены для $x \in \Omega$ и всех ξ_γ, непрерывны по x и ξ_γ и удовлетворяют неравенству

$$|A_\alpha(x, \xi_\gamma)| < K_1 (1 + \sum_{|\gamma| < m} |\xi_\gamma|^{p-1}), \ p > 2. \tag{6}$$

2) *Условие эллиптичности:* для любой функции $u(x, t) \in L_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty)$, $\mathring{W}_p^m(\Omega))$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| < m} (A_\alpha(x, D^{\gamma} u), D^{\alpha} u) \geqslant a_0 \|u(x, t)\|_{m,p}^{p} - k(t), \tag{7}$$

где $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $k(t)$ — непрерывная и ограниченная на $[0, \infty)$ функция.

3) *Условие сильной эллиптичности*; для любого $T > 0$ и любых $u(x, t) \in L_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ и $v(x, t) \in L_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ таких, что $u(x, t) - v(x, t \in L_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; \mathring{W}_p^m(\Omega))$, имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha| < m} \int_0^T \int_\Omega (A_\alpha(x, D^{\gamma} u) - A_\alpha(x, D^{\gamma} v)) D^{\alpha}(u - v)\, dx dt \geqslant$$

$$\geqslant a_1 \int_0^T \|u - v\|_{m,p}^{p}\, dt, \tag{8}$$

где $a_1 = \mathrm{const} > 0$.

4) для любых вещественных ξ_α, ξ_β, η_{il}, η_{lj}, $x \in \Omega$

$$\sum_{|\alpha| < m} \sum_{i, j=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x, \xi_\gamma) \xi_\alpha \xi_\beta \eta_i \eta_j \geqslant 0; \tag{9}$$

где

$$A_{\alpha\beta}(x, \xi_\gamma) = \frac{\partial A_\alpha(x, \xi_\gamma)}{\partial \xi_\beta},$$

5) имеет место оценка

$$|D_x^{\delta} \partial_{\xi}^{\beta} A_\alpha(x, \xi_\gamma)| < K (1 + \sum_{|\gamma| < m} |\xi_\gamma|^{p-1-|\beta|}), \tag{10}$$

для любых α, β, δ, $|\delta| \leqslant 2$, $|\alpha| < m$, $|\beta| \leqslant m$, $k = \mathrm{const}$.

В работе [3] доказана следующая

Теорема Б. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1)—5), тогда полугруппа S_t, порожденная задачей (3)—(5), обладает аттрактором, компактным в $L_2(\Omega)$.*

Определение 3. Пусть $\{S_t\}$—полугруппа операторов $S_t: X \to X$. Точка $z \in X$ называется неподвижной точкой полугруппы $\{S_t, t \geqslant 0\}$, если $S_t z = z$ для любого $t \geqslant 0$.

Определение 4. Пусть $z\in X$—неподвижная точка полугруппы $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$. Неустойчивым инвариантным многообразием, выходящим из точки z, называется множество $M(z)$ точек $u\in X$, обладающих следующим свойством: существует в X такая непрерывная кривая $u(\tau), -\infty<\tau<+\infty$, что

1) $u(0)=u$,

2) $S_t u(\tau)=u(t+\tau)$, $\forall\tau\in R^1$, $\forall t\geqslant 0$,

3) $u(\tau)\to z$ при $\tau\to-\infty$.

Определение 5. Пусть $X\subset Y$ слабо инвариантное множество полугруппы $\{S_t\}: S_t X\subset X$, $\forall t\geqslant 0$. Непрерывный на X функционал Φ, $\Phi: X\to R^1$, называется функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$ на множестве X, если выполнены следующие условия:

1) для любого $u\in X$ функция $\Phi(S_t u)$ переменной t убывает по t при $t\geqslant 0$;

2) если $\Phi(S_t u)=\Phi(S_\theta u)$ при некотором $t>\theta$, то $S_\theta u$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$.

Приведем, наконец, теорему о структуре аттракторов (см. [1], теоремы 10.1, 10.2), на которую будем существенно опираться при доказательстве основного результата настоящей работы.

Теорема В. *Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает компактным максимальным аттрактором $\mathfrak{M}$, и $\{S_t\}$ на множестве $\mathfrak{M}$ обладает функцией Ляпунова Φ. Предполагается, что множество* **A** *неподвижных точек $\{S_t\}$ конечно и, кроме того, для любого $u\in\mathfrak{M}$ функция $\Phi(S_t u)$ непрерывно зависит от t в X. Тогда*

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{z\in A} M(z),$$

где $M(z)$—неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z.

3°. Пусть оператор L, участвующий в уравнении (3), удовлетворяет 1)—5). Кроме того, предполагается, что выполнено.

6) *Условие типа эллиптичности:* для любого $u\in\mathring{W}_2^{(m+1)}(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(A_\alpha(x, D^\gamma u))\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(D^\alpha u)\,dx\geqslant 0. \qquad (11)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если оператор L удовлетворяет условиям 1)—6), а решение задачи* (3)—(5) $u(x, t)\in L_2^{\mathrm{loc}}(0, \infty);\ \mathring{W}_2^{2(m+1)}(\Omega))$, *то семейство операторов $\{S_t,\ t\geqslant 0\}$, порожденное задачей* (3)—(5), *отображает множества, ограниченные в $\mathring{W}_2^m(\Omega)$), в ограниченные множества пространства $\mathring{W}_2^{m+1}(\Omega)$ и, стало быть, компактные в $\mathring{W}_2^m(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $T>0$ фиксировано, а $U_0=\{u\in\mathring{W}_2^m(\Omega);\ \|u\|_{m,2}\leqslant M\}$ — произвольное ограниченное множество в $\mathring{W}_2^m(\Omega)$.

Умножив уравнение (3) на $t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2(m+1)}u}{\partial x_i^{2(m+1)}}$ и проинтегрировав по x, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} t^2\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial^{2(m+1)}u}{\partial x_i^{2(m+1)}}\,dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|<m}(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} t^2D^{\alpha}(A_{\alpha}(x,\ D^{\gamma}u))\frac{\partial^{2(m+1)}u}{\partial x_i^{2(m+1)}}\,dx=0.$$

Интегрируя последнее тождество по частям, придем к следующему соотношению:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} t^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{(m+1)}u}{\partial x_i^{m+1}}\right)\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_i^{m+1}}\,dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|<m}\int_{\Omega} t^2\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(A_{\alpha}(x,\ D^{\gamma}u))\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(D^{\alpha}u)\,dx=0. \tag{12}$$

Теперь производя в (12) интегрирование по $t\in[0,\ T]$ и проведя несложные выкладки, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{\Omega} t^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_i^{m+1}}\right)\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_i^{m+1}}\,dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|<1}\int_0^T\int_{\Omega} t^2\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(A_{\alpha}(x,\ D^{\gamma}u)\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(D^{\alpha}u)\,dxdt=0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\,\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_i^{m+1}}\right)^2dxdt-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{\Omega} t\left(\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_i^{m+1}}\right)^2dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_{\Omega} t\,\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(A_{\alpha}(x,\ D^{\gamma}u))\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(D^{\alpha}u)\,dxdt=0,$$

следовательно

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left(T\,\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_i^{m+1}}\right)^2dx=2\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_{\Omega} t\left(\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x_i^{m+1}}\right)^2dxdt-$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_{\Omega} t^2\,\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(A_{\alpha}(x,\ D^{\gamma}u)\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(D^{\alpha}u)\,dxdt.$$

Имеем

$$T^2\|u(x,\ T)\|^2_{m+1,2}\leqslant 2T\|u(x,\ t)\|^2_{m+1,2}-$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_{\Omega} t^2\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(A_{\alpha}(x,\ D^{\gamma}u))\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i^{m+1}}(D^{\alpha}u)\,dxdt. \tag{13}$$

так как

$$a_0 \| |u(x, t)| \|_{m+1,2}^{2} \leqslant C |u_0(x)\| \tag{14}$$

([3], неравенство (31)), то из условия (11), неравенств (13), (14) заключаем, что

$$\|u(x, T)\|_{m+1,2} \leqslant \tilde{C}, \text{ т. е. } \|S_t u_0\|_{m+1,2} < C.$$

Теорема 1 доказана.

Из теорем Б и 1 следует

Теорема 1*. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1)—6), тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (3)—(5), обладает аттрактором, компактным в* $\dot{W}_2^m(\Omega)$.

4°. В пространстве $\dot{W}_2^m(\Omega)$ рассмотрим следующий функционал:

$$\Phi(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega A_\alpha(x, D^\gamma u) D^\alpha u dx, \tag{15}$$

где функции $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$ удовлетворяют условиям 1)—6).

Проверим непрерывность функционала Φ на $\mathfrak{M}$.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathfrak{M} \subset \dot{W}_2^m(\Omega)$, Тогда

$$\Phi(u_1) - \Phi(u_2) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega [A_\alpha(x, D^\gamma u_1) D^\alpha u_1 - A_\alpha(x, D^\gamma u_2) D^\alpha u_2] dx,$$

отсюда

$$|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)| \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |A_\alpha(x, D^\gamma u_1) D^\alpha u_1 - A_\alpha(x, D^\gamma u_2) D^\alpha u_2| dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |A_\alpha(x, D^\gamma u_1) D^\alpha u_1 - A_\alpha(x, D_\alpha^\gamma u_2) D^\alpha u_1 + A_\alpha(x, D^\gamma u_2) D^\gamma u_1 -$$

$$- A_\alpha(x, D^\gamma u_2) D^\alpha u_2| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |A_\alpha(x, D_k^\gamma u_1) - A_\alpha(x, D^\gamma u_2)| D^\alpha u_1| dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |A_\alpha(x, D^\gamma u_2)| |D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2| dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \int_\Omega |A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma \bar{u})| |D^\alpha u_1| |D^\beta u_1 - D^\beta u_2| dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |A_\alpha(x, D^\gamma(u_2))| |D^\alpha u_1 - D^\alpha u_2| dx <$$

$$< \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \left(\int_\Omega |A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma \bar{u})|^2 |D^\alpha u_1|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |D^\beta u_1 - D^\beta u_2|^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+\sum_{|\alpha|<m}\int_{\Omega}\left(|A_\alpha(x, D^\gamma u_2|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}|D^\gamma u_1 - D^\gamma u_2|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{16}$$

где $u = \theta u_1 + (1-\theta) u_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Используя условие 5) при $p=2$, $\beta=1$ для оценки первого слагаемого, а условие (6)—для второго слагаемого поседнего неравенства, поучим

$$|A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma \bar{u})| \leqslant K(1+\sum_{|\gamma|<m}|D^\gamma \bar{u}|^{p-1-|\beta|}) = K$$

и

$$|A_\alpha(x, D^\gamma u_2)| \leqslant K_1(1+\sum_{|\gamma|<m}(D^\gamma \bar{u}_2|^{p-1}) \leqslant K_1(1+\sum_{|\gamma|<m}|D^\gamma u_2|).$$

Следовательно

$$|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)| \leqslant C_1 \|u_1\|_{m,2} \|u_1 - u_2\|_{m,2} +$$

$$+\sum_{|\alpha|<m}\left(\int_{\Omega}|A_\alpha(x, D^\gamma u_2)|^2 dx\right)^{1/2}\|u_1 - u_2\| \leqslant [C_1\|u_1\|_{m,2} + C_2\|u_2\|_{m,2}]\,\|u_1 - u_2\|_{m,2}. \tag{17}$$

Поскольку $u_1, u_2 \in \mathfrak{M}$ то в силу теоремы 1*, они ограничены в $\mathring{W}_2^m(\Omega)$. Отсюда и из оценки (17) вытекает что,

$$|\Phi(u_1) - \Phi(u_2| \leqslant C_3 \|u_1 - u_2\|_{m,2}.$$

Доказанное неравенство и означает непрерывность функционала Φ на $\mathfrak{M}$.

Предположим теперь, что для любых выщественных ξ_α, η_β

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|<m} A_{\alpha\beta}(x, \xi_\gamma)\xi_\alpha \eta_\beta \leqslant 0. \tag{18}$$

Легко видеть, что функционал $\Phi(u)$ дифференцируем в смысле Фреше, дифференциал $\Phi'(u)$ действует на V по формуле

$$<\Phi'(u), v> = \sum_{|\alpha|,|\beta|<m}\int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta v\, dx +$$

$$+\sum_{|\alpha|<m}\int_{\Omega}[A_\alpha(x, D^\gamma u) D^\alpha v\, dx. \tag{19}$$

В самом деле

$$\Phi(u+v) - \Phi(u) = \sum_{|\alpha|<m}\int_{\Omega}[A_\alpha(x, D^\gamma u + D^\gamma v)(D^\alpha u + D^\alpha v) -$$

$$- A_\alpha(x, D^\gamma u) D^\alpha u]\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m}\int_{\Omega}[A_\alpha(x, D^\gamma u + D^\gamma v) - A_\alpha(x, D^\gamma u)] D^\alpha u\, dx +$$

$$+\sum_{|\alpha|<m}\int_{\Omega} A_\alpha(x, D^\gamma u + D^\gamma v) D^\alpha v\, dx. \tag{20}$$

Выделяя линейную часть в (20), получим (19).

Следовательно

$$\partial_t \Phi(u(t, x)) = \langle \Phi'(u(t, x)), u_t(x, t) \rangle =$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \int_\Omega A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t \, dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha| < m} \int_\Omega A_\alpha(x, D^\gamma u) D^\alpha u_t \, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \int_\Omega A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t \, dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha| < m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha (A_\alpha(x, D^\beta u) u_t \, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \int_\Omega A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t \, dx - \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Из (18) следует, что $\partial_t \Phi(u(x, t)) \leqslant 0$.

Таким образом, доказали, что для любого $u \in \mathfrak{M}$ функция $\Phi(S_t u)$ убывает на t при $t \geqslant 0$.

Предположим теперь, что при $t = t_0$, $\Phi(u(x, t_0)) = \Phi(u_0)$, тогда

$$0 = \Phi(u(x, t_0)) - \Phi(u_0) = \int_0^{t_0} \partial_t (\Phi(u(x, t)))\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0} \left| \sum_{|\alpha|, |\beta| < m} \int_\Omega A_{\alpha\beta}(x, D^\gamma u) D^\alpha u D^\beta u_t \, dx \right| dt - \int_0^{t_0} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx dt. \qquad (21)$$

Из (18) и (21) заключаем, что

$$\int_0^{t_0} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx dt = 0.$$

Следовательно $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, при $t \in [0, t_0]$, т. е. $L(u) = 0$, при $t \in [0, t_0]$.

Обозначим через $z = u(0, x) = u_0(x)$. Так как $L(u_0) = L(u(0, x))$ и $\dfrac{\partial u_0}{\partial t} = 0$, то $z = u_0(x)$ является решением задачи (3) — (5) и $S_t z \equiv z$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Функционал $\Phi(u)$ является функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (3)—(5).*

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам математики ЕГУ

Поступила 9.X.1970

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ. Բարձր կարգի ոչ գծային պարաբոլական հավասարումներով ծնված կիսախմբերի Լյապունովի ֆունկցիայի մասին (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է բարձր կարգի, ոչ գծային պարաբոլական հավասարումների համար հետևյալ եզրային խնդրով

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (A_{\alpha} (x, D^{\gamma} u)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad (*)$$

$$D^{\omega} u|_{\Sigma} = 0, \quad |\omega| \leq m - 1, \quad \Sigma = (0, \infty) \times \partial\Omega$$

ծնված $\{S_t\}$ կիսախմբերի Լյապունովի ֆունկցիայի գոյության հարցը։

Ապացուցվում է, որ եթե L օպերատորը բավարարում է 1(-6) պայմաններին, ապա (*) խնդրով ծնված $\{S_t\}$ կիսախմբերն ունեն $\mathring{W}_2^m$-ում կոմպակտ ատրակտոր, որի վրա որոշված

$$\Phi(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, D^{\gamma} u) D^{\alpha} u dx.$$

ֆունկցիոնալը հանդիսանում է $\{S_t\}$ կիսախմբի Լյապունովի ֆունկցիա։

G. S. HAKOBIAN, R. L. SHAHBAGIAN. *On the Lya punov function of the semi-groups, geberated by nonlinear parabolic equations of high order* (summary)

For the semi-groups, generated by the boundary problem for nonlinear parabolic equations of high order, the existence of the Lyapunov function is studied. It is proved that, if the equation satisfies to the certain conditions, then corresponding semi-groups have compact attractor and there exists the Lyaapunov function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бабин, М. И. Вишик,* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности, УМН. 38, вып. 4(232), 1983, 133—187
2. *А. В. Бабин, М. И. Вишик.* Аттракторы эволюционных уравнений, М., «Наука», 1989.
3. *Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян.* Построение аттракторов нелинейных параболических операторов высокого порядка, Изв. АН РА, сер. матем., 25, № 6, 1990, 549—559.