ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 3, 1991 Математика

УДК 517.9

Ю. А. КУТОЯНЦ, Ф. ЛИЗЕ

МИНИМАКСНЫЕ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПРОЦЕССА ПУАССОНА

Введение

В настоящей работе рассматривается задача непараметрического оценивания интенсивности (меры) $\Lambda(\cdot)$ неоднородного пуассоновского процесса заданного в ограниченном подмножестве R^d. Без существенных ограничений можно считать это множество кубом $[0, 1]^d$. Предполагается, что задана последовательность независимых реализаций этого процесса.

В теореме 1 приводится асимптотическое разложение риска в случае когда в качестве оценки $\Lambda(\cdot)$ взято арифметическое среднее $\hat{\Lambda}_n(\cdot)$ При построении асимптотической минимаксной границы мы воспользуемся общей теорией построения асимптотически минимаксных границ развитой в работах Л. Ле Кама [4], В. Миллара [7], Я. Гаека [8]. Для того, чтобы воспользоваться этой теорией в теореме 2 доказывается сходимость экспериментов, отвечающих исходной задаче, к гауссовскому эксперименту со сдвигом и далее непоредственно применяем теорему Ле-Кама-Миллара. Доказательство достижимости этой границы оценкой $\hat{\Lambda}_n$ опирается на соответствующую функциональную предельную теорему в пространстве непрерывных на $[0, 1]^d$ функций.

2. Обозначения и результаты

Пусть $[0, 1]^d$ будет d-мерный куб, Z_d — σ-алгебра борелевских множеств в $[0, 1])^d$ и M—множество всех мер $\varphi(\cdot)$, заданных на $([0, 1]^d$ $Z_d)$ со значениями на множестве $\{0, 1, 2, \cdots\}$. Обозначим $\mathfrak{M}$ наименьшую σ-алгебру подмножеств M такую, что все отображения $\varphi \to \varphi(B)$, $B \in Z_d$ измеримы. Пусть задана конечная мера Λ на $([0, 1]^d, Z_d)$. Назовем Φ-пуассоновким процессом интенсивности Λ, если Φ является, случайной величиной, определенной на некотором вероятностным пространстве (Ω, F, P) принимающей значения в $(M, \mathfrak{M})$ и выполнены условия:

А) Для любого $B \in Z_d$ случайная величина $X_B(\varphi) = \varphi(B)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda(B)$.

Б) Для любых непересекающихся множеств $B_1; \ldots, B_n$. $B_j \in Z_d$ случайные величины $X_{B_1}, \cdots, X_{B_n}$ независимы.

Считаем заданной последовательность $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ независимых процессов Пуассона интенсивности Λ. Требуется по n наблюдениям $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ оценить меру Λ и описать свойства оценок при $n \to \infty$.

В качестве оценки возьмем среднее арифметическое

$$\hat{\Lambda}_n(B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(B),\quad B \in Z_d.$$

Из закона больших чисел сразу получаем состоятельность при $n \to \infty$

$$\hat{\Lambda}_n(B) \to \Lambda(B)$$

для каждого фиксированного $B \in Z_d$. Положим

$$\hat{L}_n(t) = \hat{\Lambda}_n([0, t]),$$

$$L(t) = \Lambda([0, t]).$$

Пусть заданы конечная мера $\mu(\cdot)$ на $([0, 1]^d, Z_d)$ и неотрицательная функция $\rho(\cdot)$ на R. Определим ри к оценки $\hat{L}_n$ по формуле

$$R_n = E\int \rho(\hat{L}_n(t) - L(t))\,\mu(dt). \tag{1}$$

Если $\rho(x) = x^2$, тогда R_n может быть явно вычислен. Так как $\hat{L}_n(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $L(t)$ непосредственно вычисляются

$$E\hat{L}_n(t) = L(t),$$

$$E(\hat{L}_n(t) - L(t))^2 = \frac{1}{n}L(t).$$

Откуда получаем

$$E\int(\hat{L}_n(t) - L(t))^2\,\mu(dt) = \frac{1}{n}\int L(t)\,\mu(dt). \tag{2}$$

Для формулировки следующей теоремы введем обозначение

$$C_{l,q} = \frac{1}{q!}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_q=l\\ l_j>1}}\frac{l!}{l_1!\cdots l_q!}.$$

Теорема 1. *Пусть ρ является $r+1$ раз непрерывно дифференцируемой функцией и*

$$|\rho^{(r+1)}(x)| \leqslant C e^{\beta|x|},\quad x \in R,$$

где C и β некоторые положительные постоянные. Тогда R_n в (1) допускает представление

$$R_n = \rho(0) + \sum_{l=1}^{r}\sum_{q=1}^{[l/2]}\Bigl[\frac{\rho^{(l)}(0)}{l!}C_{l,q}\cdot$$

$$\cdot\int L^l(t)\,\mu(dt)\Bigr]\frac{1}{n^{l-q}} + \nu(n^{-r/2}).$$

Вывод минимаксной нижней границы на риск произвольной оценки опирается на минимаксную теорию принятия решений Гаека-Ле Кама-Миллара.

Обозначим $\mathbf{D}_d$ пространство Скорохода действительных функций на $[0, 1]^d$ непрерывных справа и имеющих пределы слева. Понятия «справа» и «слева» здесь связаны с полуупорядоченностью точек в кубе. Пусть $\mathbf{C}_d \subseteq \mathbf{D}_d$ обозначает подпространство всех непрерывных функций на $[0, 1]^d$ и $\mathbf{D}_d$ обозначает σ-алгебру борелевских множеств на $\mathbf{D}_d$ (см. [2]). Вместо оценки меры Λ мы будем оценивать ее функцию распределения L. В соответствии с общей теорией решений допускается также и стохастическое оценивание. Такая оценка задается стохастическим ядром

$$b : (M^n, \mathfrak{M}^n) \to (\mathbf{D}_d, D_d),$$

т. е. функцией на $M^n \times D_d$, которая является измеримой функцией на M^n по своей первой переменной и вероятностной мерой на D_d — по второй.

Для $X \in D_d$ положим

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, 1]^d} |x(t)|.$$

Фиксируем Λ_0-меру интенсивности наблюдаемого пуассоновского процесса и положим $L_0(t) = \Lambda_0([0, 1])$. Введем еще $\Psi_n = (\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ и $P^n_{\Lambda_0}$ n-кратную продакт-меру. Риск, отвечающий решающей функции b, определим по формуле

$$\int\int g(\|\sqrt{n}(x - L_0)\|)\, b(\Psi_n, dx)\, P^n_{\Lambda_0}(d\Psi_n),$$

где $g(\cdot)$—некоторая неотрицательная неубывающая функция на $[0, \infty]$.

Обозначим $L_2(\Lambda_0)$—гильбертово пространство квадратично интегрируемых на $[0, 1]^d$ с мерой Λ_0 функций и положим для $h \in L_2(\Lambda_0)$.

$$(\tau h)(t_1, \cdots, t_d) = \int_{[0, t]} h(s)\, \Lambda_0(ds),$$

где $(t_1, \cdots, t_d) = t$.

Нижняя граница, которую мы собираемся ввести, должна быть равномерной по окрестности истинного значения, поэтому мы вводим окрестность

$$U = \{L_h : L_h = L_0 + (\tau h) n^{-1/2},$$

если $\|h\| < n^{1/2}$ и $L_h = L_0$, если $\|h\| \geqslant h^{1/2}\}$.

Положим также

$$\Lambda_h(B) = \begin{cases} \Lambda_0 B + n^{-1/2} \int_B h\, d\Lambda_0, & \text{если } \|h\| < \sqrt{n} \\ \Lambda_0(B), & \text{если } \|h\| \geqslant \sqrt{n}. \end{cases}$$

Далее введем

$$H_m = \{h : h \in L_2(\Lambda_0),\ \|h\| < \sqrt{m}\}$$

$$H_\infty = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m.$$

Заметим, что H_∞ плотно в $L_2(\Lambda_0)$.

Предположим теперь, что мера Λ_0 непрерывна, т. е. $\Lambda_0(\{t\}) = 0$ для любого $t \in [0, 1]^d$. Тогда существует непрерывное с вероятностью 1 гауссовское поле $W(t)$, $t \in [0, 1]^d$ такое, что $W(0) = 0$, $EW(t) = 0$, $EW(t)\,W(S) = L_0(S \wedge t)$, где $S \wedge t$ обозначает покоординатный минимум векторов S и t. Доказательство существования такого поля имеется в [2].

Пусть $[S, t)$ — прямоугольник. Обозначим $\Delta_s^t W$ обычный разностный оператор.

Нетрудно проверить, что для любой совокупности непересекающихся прямоугольников $[S_1, t_1), \cdots, [S_n, t_n)$ случайные величины $\Delta_{s_1}^{t_1} W, \cdots, \Delta_{s_n}^{t_n}$ независимы. Обозначим P_0 — распределение W. Эта мера определена на σ-алгебре борелевских множеств пространства C_d.

Теорема 2. *Если Λ_0 — непрерывная конечная мера на $([0, 1])^d$, $D_d)$ и $g(\cdot)$ — неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty]$, причем*

$$\int g(\|x\|)\, P_0(dx) < \infty, \tag{4}$$

то

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \inf_{b} \sup_{h \in H_m} \int\int g\|(\sqrt{n}(x - L_h)\|).$$

$$\cdot\, b(\Psi_n, dx)\, P_{\Lambda_n}^n(d\Psi_n) \geqslant \int g(\|x\|)\, P_0(dx) < \infty.$$

Покажем также, что при некоторых дополнительных предположениях на $g(\cdot)$ оценка

$$\widehat{L}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i([0, t])$$

оказывается оптимальной в следующем смысле: её риск достигает нижней границы, приведенной в теореме 2. Такие оценки назовем локально асимптитически минимаксными (ЛАМ).

Предположим теперь, что неубывающая на $g(\cdot)$ функция удовлетворяет неравенству.

$$g(x) \leqslant c \cdot e^{-\varepsilon_0 x}, \tag{5}$$

с некоторыми постоянными $c > 0$ и $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{3}{104}\right)$ при всех $x \in [0, \infty)$.

Теорема 3. *Если Λ_0 — непрерывная конечная мера и выполнено (5), тогда оценка $\widehat{L}_n$ — ЛАМ:*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup_{h\in H_m}\int g(\|\sqrt{n}(\hat{L}_n-L_h)\|)\,dP^n_{\lambda_h}=$$

$$=\int g(\|x\|)\,P_0(dx)=Eg(\|W\|).$$

Замечание. В частном случае $(d=1)$ теоремы 2 и 3 доказаны в [1], где рассмотрен периодический процесс Пуассона на $[0, T]$ и $T\to\infty$. Так как приращения процесса Пуассона на непересекающихся периодах независимы, то рассмотренная там схема наблюдений практически совпадает с нашей.

Доказательство теоремы 1. Сначала напомним некоторые элементарные факты из теории вероятностей. Пусть случайная величина X имеет r моментов. Положим $\mu_l=MX^l$ и обозначим K_l l-тый кумулянт X. Тогда

$$\mu_r=\sum_{q=1}^{r}\frac{1}{q!}\sum_{\substack{l_1+\dots+l_q=r\\ l_j\geq 1}}\frac{r!}{l_1!,\cdots,l_q!}\prod_{p=1}^{q}K_{l_p}.$$

Если Y имеет пуассоновское распределение и $X=Y-EY$, тогда для $m_r=EX^r$ имеет место

$$m_r=\sum_{q=1}^{r}\frac{1}{q!}\sum_{\substack{l_1+\dots+l_q=r\\ l_j\geq 1}}\frac{r!}{l_1!,\cdots l_q!}\lambda^q, \tag{6}$$

где $\lambda=EY$. Представление (6) следует из того, что первый куммулянт X равен $EX=0$, а все стальные кумулянты равны λ.

В сделанных предположениях

$$\rho(x)=\sum_{l=0}^{r}\frac{x^l}{l!}\rho^{(l)}(0)+\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}\rho^{(r+1)}(\theta x),$$

где $\theta\in(0, 1)$. С помощью (6) и того факта, что $n\hat{L}_n(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $nL(t)$ получаем

$$\sum_{l=1}^{r}\frac{\rho^{(l)}(0)}{l!}E\int(\hat{L}_n(t)-L(t))^l\,\mu(dt)=$$

$$=\sum_{l=1}^{r}\sum_{q=1}^{[l/2]}\left[\int L^q(t)\,\mu(dt)\right]\frac{\rho^l(0)}{l!}C_{l,q}\,\frac{1}{n^{l-q}}.$$

Положим $Z_n(t)=\hat{L}_n(t)-L(t)$, тогда

$$\left|E\int Z_n^{r+1}(t)\,\rho^{(r+1)}(\theta Z_n(t))\,\mu(dt)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int EZ_n^{r(r+1)}(t)\,\mu(dt)\right)^{1/2}\left(\int E\left(\rho^{(r+1)}(\theta Z_n(t)\right)^2\mu(dt)\right)^{1/2}.$$

Из (6) следует, что первый сомножитель последнего выражения имеет порядок $\theta(n^{-r/2})$, для оценки второго воспользуемся неравенством

$$(\rho^{(r+1)}(\overline{\theta}S))^2\leqslant c^2e^{2\beta|S|}\leqslant c^2(e^{2\beta S}+e^{-2\beta S}).$$

Так как $n\bar{L}_n(t)$—пуассоновская случайная величина, имеем равенство

$$E\exp(aZ_n(t)) = \exp\left\{ nL(t)\left(e^{a/n}-1-\frac{a}{n}\right)\right\}$$

и заметим, что найдется такая постоянная $C(a)$, что

$$\left|n\left(e^{a/n}-1-\frac{a}{n}\right)\right| < C(a).$$

Следовательно,

$$\sup_{n,t\in[0,1]^d} E(\rho^{(r+1)}(\theta, z_n(t)))^2 \leqslant C^2 \sup_{t\in[0,1]^d}$$
$$(\exp[L(t)C(2\beta)] + \exp[L(t)C(-2\beta)] \to \infty,$$

что завершает доказательство.

Доказательство теоремы 2. Ограниченный линейный оператор τ $L_2(\Lambda_0) \to C_d$ является компактным, т. е. образ ограниченного множества является относительным компактом в C_d. Если $\tilde{P}$—стандартная цилиндрическая гауссовская мера на $L_2(\Lambda_0)$, то $f_0=\tilde{P}_0\tau^{-1}$ —аддитивная функция множеств на борелевской σ-алгебре C_d. При этом отображении P_0 является распределением винеревского поля $W(t)$ со свойствами.

$$W(0)=0,\ EW(t)W(S) = L_0(t\Delta S).$$

Для произвольной системы непересекающихся прямоугольников $[a_i, b_i) \leqslant [0, 1]^d$ и действительных чисел α_i введем ступенчатую функцию

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{[a_i, b_i]}(t), \tag{7}$$

где $I_A(t)$ индикатор события $\{t\in A\}$, и положим

$$\int f dW = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta_{a_i}^{b_i} W.$$

Ясно, что

$$E\int f dW = 0$$

и

$$E\int f dW \int g dW = \int fg d\Lambda_0,$$

для любых функций f, g вида (7).

Так как множество ступенчатых функций плотно в $L_2(\Lambda_0)$ мы можем оператор изометрии $U: f\to \int f dW$ продолжить на все $L_2(\Lambda_0)$ и определить для любой $f\in L_2(\Lambda_0)$ интервал

$$\int f dW = U(f).$$

Пусть $h \in L_2(\Lambda_0)$ и борелевское множество $B \subset \mathbf{C}_d$. Положим

$$P_h(B) = P_0(B - \tau h).$$

Хорошо известно (см., например, [5]), что $P_h \ll P_0$ и

$$\frac{dP_h}{dP_0}(x) = \exp\left\{Z_h(x) - \frac{1}{2}\int h^2(x)_0 n_0\right\},$$

где $L_h(x)$ обозначает введенный выше стохастический интеграл $\int hdx$ относительно канонического винеровского поля $x(t)$, определенного на $(\mathbf{C}_d, a_d, P_0)$. Следовательно $E = (C_d, Z_d, P_h)$ является гауссовским экспериментом со сдвигом в смысле [7].

Рассмотрим последовательность экспериментов

$$E^n = (M^n, \mathfrak{M}^n, P^n_{\Lambda_h}).$$

Так как $P_h \ll P_0$, то при $n > m$ и $\|h\| \leqslant m$ можно записать [5]

$$\frac{dP_{\Lambda_h}}{dP_{\Lambda_0}}(\Phi) = \exp\left\{\int \ln\left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) d\Phi - \right.$$

$$\left. - \Lambda_h([0, 1)^d) + \Lambda_0([0, 1]^d)\right\}$$

и следовательно

$$\frac{dP^n_{\Lambda_h}}{dP^n_{\Lambda_0}}(\Phi_1 \cdots, \Phi_n) = \exp\left\{\sum_{l=1}^{n} \int \ln\left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) d\Phi_l - \right.$$

$$\left. - \sqrt{n}\int h - d\Lambda_0\right\} = \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} \int h\,(d\Phi_l - d\Lambda_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\int h^2 d\Phi_l + R_n(h)\right\},$$

где

$$R_n(h) = \sum_{l=1}^{n} \int \left(\ln\left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) - \frac{h}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{n}\right) d\Phi_l.$$

Положим $L_n(h) = \ln dP^n_{\Lambda_h}/dP^n_{\Lambda_0}$. Для доказательства сходимости конечномерных распределений процесса $(L_n(h))_{h \in H_\infty}$ к гауссовскому закону воспользуемся приемом Крамера—Волда и докажем асимптотическую нормальность суммы $\sum_{j=1}^{r} t_j L_n(h_j)$ для любых наборов $t_j \in R$, $h_j \in H_\infty$.

Имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{r} t_j L_n(h_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} \int \left(\sum_{j=1}^{r} t_j h_j\right)(d\Phi_l - d\Lambda_0) -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} t_j \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\int h_j^2 d\overline{\Phi}_l + \sum_{j=1}^{r} t_j R_n(h_j).$$

Первый член асимптотически нормален со средним 0 и дисперсией

$$\int\Big(\sum_{j=1}^{r} t_j h_j\Big)^2 d\Lambda_0.$$

Второй член по усиленному закону больших чисел сходится с вероятностью 1 к

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} t_j \int h_j^2 d\Lambda_0.$$

Из формулы Тейлора следует существование такой $C(\varepsilon)$, $\varepsilon > -1$, что для $x > \varepsilon$

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant C(\varepsilon)|x|^3.$$

Выберем n_0 таким, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant r}\left|\frac{h_j}{\sqrt{n_0}}\right| < 1$$

и положим $\varepsilon_0 = -\max n_0^{-1/2}|h_j|$. Тогда для $n > n_0$

$$\left|\ln\Big(1+\frac{h_j}{\sqrt{n}}\Big) - \frac{h_j}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{h_j^2}{n}\right| \leqslant C(\varepsilon_0)\frac{|h_j|^3}{n^{3/2}}$$

и при $n \to \infty$

$$E\left|\sum_{j=1}^{r} t_j R_n(h_j)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}|t_j|\, C(\varepsilon_0)\int |h_j|^3 d\Lambda_0 \to 0.$$

Следовательно распределение $\sum_{j=1}^{n} t_j L_n(h_j)$ сходится к распределению гауссовской случайной величины $\sum_{j=1}^{r} t_j \ln\frac{dP_{nl}}{dP_0}$ с параметрами

$$\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} t_j \int h_j^2 d\Lambda_0, \int\Big(\sum_{j=1}^{r} t_j h_j\Big)^2 d\Lambda_0\Big).$$

Таким образом, мы доказали сходимость экспериментов $E_n = (M^n, \mathfrak{M}^n, P^n_{\Lambda_h}, h \in H_\infty)$ к эксперименту $E = (\mathbf{C}_d, a_d, P_h, h \in H_\infty)$ в смысле Ле Кама.

Введем отображение $T: \mathrm{D}_d \to \mathrm{D}_d$ по правилу $T(x) = \sqrt{n}(x - L_0)$. Тогда

$$\iint g(\|x' - \tau h\|)\, b(\Psi_n, dx)\, P^n_{\Lambda_h}(d\Psi_n) =$$

$$= \iint g(\|x' - \tau h\|)\, \tilde{b}(\Psi_n, dx')\, P^n_{\Lambda_h}(d\Psi_n),$$

где $\tilde{b}(\Psi_n, A) = b(\Psi_n, T^{-1}(A))$. Так как множество всех решений b и $\tilde{b}$ совпадают, получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \inf_b \sup_{h\in H_m} \iint g(\|\sqrt{n}(x-L_h)\|)\, b(\Psi_n, dx)\, P^n_{\Lambda_h}(d\Psi_n) =$$

$$=\varliminf_{n\to\infty} \inf_b \sup_{h\in H_m} \iint g(\|x-\tau h\|)\, b'(\Psi_n, dx)\, P^n_{\Lambda_h}(d\Psi_n) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{n\to\infty} \inf_b \sup_{h\in H_m} \iint g(\|x-\tau h\|)\, b'(\Psi_n, dx)\, P^n_{\Lambda_h}(d\Psi_n),$$

где $b' : (M^n, \mathfrak{M}^n) \Rightarrow (C_d, \alpha_d)$—решающая функция со значениями (C_d, α_d).

К правой части последнего неравенства применим минимаксную теорему Л. Ле Кама (см. также [7], теорема 3.1.1) и получим, что она не превышает величины

$$\inf_a \sup_{h\in H_m} G(a, h),$$

где

$$a : (C_d, \alpha_d) \Rightarrow (C_d, \alpha_d) \text{ и } G(a, h) =$$

$$= \iint g(\|x-\tau h\|)\; a(y, dx)\, P_h(dy).$$

Следовательно

$$\lim_{m\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} \inf_b \sup_{h\in H_m} \iint g(\|\sqrt{n}(x-L_h)\|),$$

$$b(\Psi_n, dx)\, P^n_{\Lambda_h}(d\Psi_n) \geqslant \lim_{m\to\infty} \inf_a \sup_{h\in H_m} G(a, h) =$$

$$= \sup_m \inf_a \sup_{h\in H_m} G(a, h).$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и a существует $m(a, \varepsilon)$ такое, что

$$\sup_{h\in H_\infty} G(a, h) \leqslant \sup_{h\in H_{m(a,\varepsilon)}} G(a, h) + \varepsilon.$$

Следовательно

$$\inf_a \sup_{h\in H_\infty} G(a, h) \leqslant \inf_a \sup_{h\in H_{m(a,\varepsilon)}} G(a, h) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \sup_l \inf_a \sup_{h\in H_l} G(a, h) + \varepsilon.$$

Так как это верно для любого $\varepsilon > 0$, то

$$\inf_a \sup_{h\in H_\infty} G(a, h) = \sup_m \inf_a \sup_{h\in H_m} G(a, h).$$

Пусть h, $h_n \in L_2(\Lambda_0)$—произвольная последовательность такая, что

$$\int (h_n - h)^2\, d\Lambda_0 \to 0.$$

Положим

$$\rho_n(x) = \frac{dP_{h_n}}{dP_h}(x).$$

Тогда $\rho_n \to 1$ по вероятности относительно P_h. Из непрерывности $g(\cdot)$ и леммы Фату получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int\int g(\|x-\tau h_n\|)\,a(y,dx)\,P_{hn}(dy)=$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\int\int g(\|x-\tau h_n\|)\,a(y,dx)\,\varphi_n(y)\,P_h(dy)\geqslant$$

$$\geqslant\int\int g(\|x-\tau h\|)\,a(y,dx)\,f_h(dy).$$

Следовательно

$$\inf_a\sup_{h\in H_\infty}G(a,h)=\inf_a\sup_{h\in L_2(\Lambda_0)}G(a,h).$$

Осталось заметить, что $(C_d, L_2(\Lambda_0), \tau)$ — абстрактное винеровское пространство $h(P_h)$, $h\in\Lambda_2(L_0)$ — гауссовское семейство со сдвигом, поэтому см. [7], теорема 2)

$$\inf_a\sup_{h\in L_2(\Lambda_0)}G(a,h)=\int g(\|x\|)\,P_0(dx),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся три леммы, которые мы сейчас приведем.

Пусть $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ независимые пуассоновские процессы на $[0,1]^d$ с мерой интенсивности Λ. Для прямоугольника $Q\subseteq[0,1]^d$ обозначим R_Q систему всех прямоугольников $S\subseteq Q$. Доказательство следующей леммы следует из доказательства теоремы 1.1 работы Руймгарта и Велнера [9], (см. также доказательство теоремы 1.1 работы Айнмала и Руймгарта [3]).

Лемма 1. Для любого $\lambda>0$.

$$P\{\sup_{S\in R_Q}|\sqrt{n}(\hat{\Lambda}_n(S)-\Lambda(S))|>\lambda\}\leqslant$$

$$<2^{2d+3}\exp\left\{-\frac{3\lambda^2 n^{1/2}}{96\,\Lambda(Q)\,n^{1/2}+8\lambda}\right\}.$$

Два прямоугольника $(a,b]$, $(c,d]$ назовем соседними, если $b_i=c^i$ хотя бы при одном i, где b_i и c_i—координаты векторов b и c соответственно. Обозначим $\mathbf{B}_0$ множество тех функций из $\mathbf{D}_d$, которые равны нулю на нижней границе, т. е.

$$\mathbf{B}_0=\{x: x\in\mathbf{D}_d,\ x(S_1,\cdots,S_{i-1},0,S_{i+1},\cdots,S_d)=0$$
$$0\leqslant S_i\leqslant 1,\ i=1,\cdots,d\}.$$

Следующий критерий плотности семейства распределений на $(\mathbf{D}_d, D_d$ принадлежит В. Бикелу и Вихуре [2].

Лемма 2. *Пусть на* $(\mathbf{D}_d, D_d)$ *задано семейство распределений* $(P_\gamma,\ \gamma\in\Gamma)$ и

$$P_\gamma(\mathbf{B}_0)=1,$$

для любого $\gamma\in\Gamma$. Если на $([0,1]^d\,a_d)$ существует конечная мера μ с $\mu(|S|)=0$ для каждого $S\in[0,1]^d$ и найдутся такие $\beta_1>0$ и $\beta_2>0$, что

$$P_x(\{x : |\Delta_a^b x| \wedge |\Delta_c^d x| \geqslant \lambda\}) \leqslant \lambda^{-\beta_1} \mu((a, b] \cup (c, d])^{\beta_2}, \qquad (8)$$

для любых двух соседних прямоугольников $(a, b]$ и $(c, d]$ и любого $\lambda > 0$, то семейство мер $(P_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ плотно.

Лемма 3. *Пусть Q, $P_{n,\theta}$, $n = \{1, 2, \cdots,\}$ $\theta \in \Theta$ распределения на $(D_d, \mathcal{D}_d)$ такие, что конечномерные распределения $P_{n,\theta}$ сходятся равномерно на $\theta \in \Theta$ к соответствующим распределениям Q в смысле* [10]. *Если семейство $(P_{n,\theta}, \theta \in \Theta)$, $n = 1, 2, \cdots$, плотно, то для каждой ограниченной Q— п. н. непргрывной функции f на D_d*

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x) P_{n,\theta}(dx) = \int f(x) Q(dx)$$

равномерно по $\theta \in \Theta$.

Доказательство. Если существует последовательность $\theta_n \in \Theta$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \int f(x) P_{n,\theta_n}(dx) - \int f(x) Q(dx) \right| > 0,$$

тогда найдется последовательность $n(r)$, $r = 1, 2, \ldots$, такая, что $P_{n(\rho)}$, $\theta_{n(r)}$ слабо сходится к некоторой мере $\tilde{Q}$. Покажем, что $\tilde{Q} = Q$. Пусть $g(\cdot)$—произвольная непрерывная ограниченная функция на R_l и положим $\tilde{g}(x) = (g(x(t_1)), x(t_l))$. Тогда из равномерной сходимости конечномерных распределений получаем

$$\sup_{\theta\in\Theta} \left| \int \tilde{g}\, dP_{n(r),\theta} - \int \tilde{g}\, dQ \right| \to 0, \ r \to \infty.$$

Следовательно

$$\int \tilde{g}\, dP_{n(r)},\ \theta_{n(\theta)} \to \int \tilde{g}\, dQ,\ r \to \infty,$$

а из сходимости $P_{n(r),\theta_{n(r)}} \Rightarrow \tilde{Q}$ получаем

$$\int \tilde{g}\, dP_{n(r)\theta_{n(r)}} \to \int \tilde{g}\, d\tilde{Q}.$$

Таким образом, $Q = \tilde{Q}$ при всех $t_1, \cdots, t_l$, $l = 1, 2, \cdots$, следовательно $Q = \tilde{Q}$ в силу произвольности g.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — процессы Пуассона интенсивности Λ_h, $h \in H_m^-$. Положим

$$\hat{L}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i([0, t]),$$

и обозначим $P_{n,h}$ распределение $\sqrt{n}(\hat{L}_h(t) - L_h(t))$. Обозначим P_h распределение винеровского поля $W(t)$ с $W(0) = 0$, $EW(t) = 0$, $EW(S)W(t) = \Lambda_h([0, S\Delta t])$ и докажем сходимость конечномерных распределений.

Пусть $t_1, \cdots, t_l \in [0, 1]^d$. Тогда

$$P_{n,h}\left(\left\{x:\ \sum_{i=1}^{l} x(t_i)^2 > H\right\}\right) < \sum_{i=1}^{l} P_{n,h}\left(\left\{x : x(t_i)^2 > \frac{H}{l}\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{l} P\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \Phi_j([0,\ t_i]) - L_h(t_i)\right)^2 > \frac{H}{l}\right) \leqslant \frac{l^2}{H^2} \sum_{i=1}^{l} L_h(t_i),$$

где мы воспользовались неравенством Чебышева. Следовательно первое из условий теоремы 7 (стр. 480) в [10] выполнено. Для проверки второго условия достаточно убедиться в равномерной сходимости характеристической функции случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \int f(d\Phi_i - d\Lambda_h),$$

где f — произвольная ограниченная измеримая функция к $\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\int f^2 d\Lambda_h\right\}$. Так как

$$E\left(\int f(d\Phi_i - d\Lambda_h)\right)^4 = \int f^4 d\Lambda_h + 3\left(\int f^2 d\Lambda_n\right)^2 <$$

$$\leqslant \int f^4 (1 + \sqrt{m})\, d\Lambda_0 + 3(f^2 (1 + \sqrt{m})\, d\Lambda_0)^2.$$

Имеем

$$\sup_{h \in H_m} E\left(\int f(d\Phi_i - d\Lambda_h)\right)^4 < \infty.$$

Следовательно условие Линдеберга (см. (6) на стр. 484 в [10]) выполнено равномерно по $h \in H_m$. Это обеспечивает равномерную сходимость характеристических функций.

Докажем плотность семейства $(P_{n,h},\ h \in H_m)$, $n = 1, 2, \cdots$. Для этого воспользуемся леммой 2. Положим $W_n(t) = \sqrt{n}\,(\widehat{L}_h(t) - L_h(t))$. Для непересекающихся $(a_1, b_1]$ и $(a_2, b_2]$ случайные величины $\Delta_{a_1}^{b_1} W_n$ и $\Delta_{a_2}^{b_2} W_n$ независимые. Если прямоугольники $(a, b]$ и $(c, d]$ соседние, то

$$A = (a,\ b] \cap (c,\ d] \neq \varnothing,$$

и из непрерывности Λ_h имеем $\Lambda_h(A) = 0$, откуда следует $\Phi_i(A) = 0$ п. н. Это обеспечивает независимость также и для соседних прямоугольников. Следовательно

$$P(|\Delta_a^b W_n| \wedge |\Delta_c^d W_n| > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^2} E(\Delta_a^b W_h)^2 E(\Delta_c^d W_h)^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \Lambda_h^2((a,\ b])\ \Lambda_h^2((c,\ d]) < \frac{1}{\lambda^2} \Lambda_h^4((a,\ b] \cup (c,\ d]) <$$

$$\leqslant \frac{(1 + \sqrt{m})^4}{\lambda^2} \Lambda_0^4((a,\ b] \cup (c,\ d]),$$

если $h \in H_m$. Принадлежность $W_n \in \mathbf{B}$ вытекает из того, что если хотя бы одно значение t_i и $t = (t_1, \cdots, t_d)$ равно нулю, то $\Lambda_h((0,\ t]) = 0$ и следовательно $W_n(t) = 0$. Таким образом, плотность установлена.

Для завершения доказательства теоремы 3 нам согласно лемме 3 осталось показать

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n:h\in H_m} \int\limits_{A_{n,h,N}} g(\|W_n\|)\, dP^n_{\Lambda_h} = 0, \tag{9}$$

где $A_{n,h,N} = \{g(\|W_n\|) > N\}$. По условию (5)

$$\int g(\|W_n\|)\, dP^n_{\Lambda_h} \leqslant C \int \exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\}\, dP^n_{\Lambda_h} \tag{10}$$

$$\left\{ \|W_n\| > \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\ln \frac{N}{c}\right)\right\}.$$

Заметим, что

$$\sup_{s\in R\,[0,1]^d} |\sqrt{n}\,(\hat{\Lambda}_h(S) - \Lambda_h(S))| \geqslant \|W_n\| \tag{11}$$

и

$$\frac{3\lambda^2 n^{1/2}}{96\lambda\,\Lambda_n([0,1]^d) + 8\lambda} \geqslant \frac{3}{104}\lambda, \tag{12}$$

для $\lambda \geqslant (1+\sqrt{m})\,\Lambda_0([0,1]^d)$. Обозначим $x = \exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\}$. Тогда

$$\int\limits_{[N,\infty)} x P_x(dx) = NP(x \geqslant N) + \int\limits_N^\infty P_x([t,\infty))\, dt.$$

Следовательно по лемме 1 и соотношениям (11), (12) в случае

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \ln \frac{N}{c} \geqslant (1+\sqrt{m})\,\Lambda_0([0,1]^d) \text{ имеем}$$

$$\int\limits_{\left\{\|W_n\| > \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\ln \frac{N}{c}\right)\right\}} \exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\}\, dP^n_{\Lambda_h} \leqslant NP\left(\exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\} > \frac{N}{c}\right) +$$

$$+ \int\limits_N^\infty P\left\{\exp\{\varepsilon_0 \|W_n\|\} > \frac{t}{c}\right\} dt \leqslant N \exp\left\{-\frac{3}{104\varepsilon_0}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \ln \frac{N}{c}\right\} + \int\limits_N^\infty \exp\left\{-\frac{3}{104\varepsilon_0} \ln \frac{t}{c}\right\} dt.$$

В силу $\varepsilon_0 < \dfrac{3}{104}$ правая часть неравенства стремится к нулю при $N \to \infty$, что и доказывает (9).

Ереванский государственный университет
Технический университет г. Ростока, ФРГ

Поступила 1. III. 1990

Յու. Ա. Կուտոյանց, Ֆ. Լիզե. Մինիմաքս սահմանները Պուասոնի տարածական պրոցեսի ինտենսիվության գնահատման խնդրում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է R^d-ի սահմանափակ ենթաբազմության վրա տրված, ոչ համասեռ պուասոնյան պրոցեսի Λ ինտենսիվության չափի ոչ պարամետրիկ գնահատականը։

Yu. A. KUTOJANZ, F. LIESE. ***Minimax bounds in the problem of estimation of the spatial Poisson process intensity*** **(summary)**

The paper considers a nonparametic esfimate of the intensity measure of a nonhomogenous Poisson process on a bounded set in R^d.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Apoyan G. T., Kutoyants Yu. A.* On compensator estimation of inhomogeneuos Poisson process. Probl. Control and hiform. Theory. 1987, 16, 2, 135—142.
2. *Bickel P. T., Wichura M. I.* Convergence for multiparameter stochastic processes and some applications, Ann. Math. Stat., 1971, 42, 1656—1670.
3. *Einmahl I. H. I., Ruymgaart F. H.* The order of magnitude the of moments of the modulus of continuity of multiparameter Poisson and empirical process, Journal of Multiv. Analysis, 1987, 21, 263—273.
4. *Le Cam L.* Limits of experiments. Proc. sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Prb. Theory, 1972, v. 1, 245—261.
5. *Liese F.* Eine informations the oretische Bedingung für die Äquivalenz unbegrenz teilbarer punktprozesse. Math. Nachr., 1975. 70, 183—196.
6. *Liese F.* Hellinger integrals of Gaussian processes with independent increments. Stochastics, 1982, 6, 81—96.
7. *Millar W. P.* The minimax principle in asymptotic statical theory, Lecture notes in Mathem., № 976. Springer, Berlin, 1981, 76—262.
8. *Hajek T.* Local asymptotuc minimax and admissibility in estimation, Prac. Sixth Berkeley Symp on Math. Statist. and Prob. Theory, 1972, v. 1, 175—194.
9. *Ruymgaart G. R., Wellner T. A.* Some properties of weighter multivariable empirical processes. Stat. Decisions, 1984, 2, 199—228.
10. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания, Наука, М., 1979.