ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 3, 1991 Математика

УДК 517.53

А. А. АНДРЯН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В КЛАССАХ ЗЕМАНЯНА

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k}=0,\ (x,\ y)\in R\times R^+, \tag{1}$$

где $a_k(p)$ — полином с постоянными коэффициентами от $p=\sigma+i\tau$.

Пусть $\pi_{a,b}$ — полоса $a<\operatorname{Re}p<b$, в которой $a_n(p)\neq 0$. В работе в основном рассматривается этот случай, за исключением § 2, где допускается нарушение этого условия. Корни характеристического многочлена

$$P_n(\lambda,\ p)=\sum_{k=0}^{n} a_k(p)\lambda^k=0 \tag{2}$$

обозначим через $\lambda_1(p),\cdots,\lambda_n(p)$ (каждый корень берется столько раз какова его кратность). Как известно [1], для $|p|\gg 1$ функция $\lambda_j(p)$ аналитична и разлагается в ряд Пюизё

$$\lambda_j(p)=\sum_{k=-N_j}^{+\infty} a_{jk}\left(p^{-\frac{1}{r_j}}\right)^k,\ r_j,\ N_j\in N. \tag{3}$$

На характеристические корни наложено следующее условие: $\operatorname{Re}\lambda_j(p)\leqslant 0\ \forall p\in\pi_{a,b},\ j=1,\cdots,m$; если же $j>m$, то $\exists p_j\in\pi_{a,b}$ такая, что $\operatorname{Re}\lambda_j(p_j)>0$. Предполагается, что расстояние между множествами $\{\lambda_1(p),\cdots,\lambda_m(p)\}$ и $\{\lambda_{m+1}(p),\cdots,\lambda_n(p)\}$ положительно. Введем многочлены по λ:

$$Q_m(\lambda,\ p)=\prod_{j=1}^{m}(\lambda-\lambda_j(p))=\sum_{j=0}^{m} q_j(p)\lambda^j,$$

$$R_{n-m}(\lambda,\ p)=a_n(p)\prod_{j=m+1}^{n}(\lambda-\lambda_j(p))=a_n(p)\sum_{j=0}^{n-m} r_j(p)\lambda^j. \tag{4}$$

Из представления (3) вытекают оценки

$$|\lambda_j(p)|<c_j(1+|p|)^{m_j},\ |q_j^{(k)}(p)|+|r_j^{(k)}(p)|\leqslant c_{jk}(1+|p|)^{m_{jk}}. \tag{5}$$

Введем следующие классы функций.

Определение 1. Через $A(\pi_{a,b})$ обозначим класс функций $f(p)$, аналитических в $\pi_{a,b}$ и удовлетворяющих условию: $\forall\,\pi_{a_1,b_1}\Subset\pi_{a,b}\ \exists$ многочлен $P_1(p)$ такой, что

$$|f(p)|\leqslant P_1(|p|)\ \forall p\in\pi_{a_1,b_1}. \tag{6}$$

Определение 2. Через $A_y(\pi_{a,b})$ обозначим класс функций $f(p, y)$ таких, что $f(p, y)\in A(\pi_{a,b})$ $\forall y\in R^+$ и

$$\left|\frac{d^k f(p, y)}{dy^k}\right| \leqslant (1+y)^r \cdot P_\nu(|p|)\ \forall p\in \pi_{a_\nu, b_\nu}, \tag{7}$$

где r зависит от $f(p, y)$, $k=0, \cdots, n-1$.

Пусть $L(a, b)$ и $L'(a, b)$, соответственно, — классы основных и обобщенных функций Земаняна [2]. Как известно [2] преобразование Лапласа

$$Lu(p) = \hat{u}(p) = \langle u(x), \exp(-px)\rangle$$

является изоморфизмом между $L'(a, b)$ и $A(\pi_{a,b})$.

Определение 3. $\dot{L}_y(a, b)$ обозначает класс обобщенных функций $u(x, y)$, зависящих от параметра y такчх, что $\forall (a_\nu, b_\nu)\ \exists c_\nu, q_\nu$, что

$$\left|\frac{d^k}{dy^k}\langle u(x, y), \varphi(x)\rangle\right| < c_\nu(1+y)^r \|\varphi\|_{q_\nu}\ \forall\varphi\in L_{a_\nu, b_\nu},\ k=0, \cdots, n-1, \tag{8}$$

где $\|\varphi\|_{q_\nu} = \sup\limits_x \gamma_{a_\nu, b_\nu}(x) \sum\limits_{j<q_\nu} |D^j\varphi(x)|$ — q_ν-ая полунорма в L_{a_ν, b_ν}, $\gamma_{a_\nu, b_\nu} = \theta_+(x)\exp(a_\nu x) + \theta_-(x)\exp(b_\nu x)$, $\theta_\pm(x)$ — функции Хевисайда, постоянная r зависит только от u.

Лемма 1. *Преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между* $\dot{L}_y(a, b)$ *и* $A_y(\pi_{a,b})$.

Доказательство. Пусть $u(x, y)\in \dot{L}_y(a, b)$. Заметим, что $\exp(-px)\in L_{a_\nu, b_\nu}$ при $a_\nu\leqslant \operatorname{Re} p\leqslant b_\nu$. Поэтому из (8), подставляя вместо $\varphi(x)$ функцию $\exp(-px)$, получим

$$\left|\frac{d^k \hat{u}(p, y)}{dy^k}\right| < c_\nu(1+y)^r P_{q_\nu}(|p|)\ \forall p\in\pi_{a_\nu, b_\nu},$$

то есть имеет место (7). Аналитичность $\hat{u}(p, y)$ очевидна. Обратно, пусть $\hat{u}(p, y)\in A_y(\pi_{a,b})$. Возьмем две последовательности чисел $a_\nu\downarrow a$ и $b_\nu\uparrow b$. Пусть $Q_\nu(p)$ — полином, не имеющий нулей в $a\leqslant \operatorname{Re} p < b$ такой, что

$$\left|\hat{u}(p, y)/Q_\nu(p)\right| < (1+y)^r\cdot(1+|p^2|)^{-1}.$$

Имеем $u(x, y) = Q_\nu(D_x)\, g(x, y)$, где $|g(x, y)| < \text{cte}\exp(\sigma x)\cdot(1+y)^r$ $\forall a_{\nu+1}\leqslant\sigma\leqslant b_{\nu+1}$ и, в частности,

$$|g(x, y)|\leqslant \text{cte}\ \gamma_{a_{\nu+1}, b_{\nu+1}}(x)\cdot(1+y)^r.$$

Отсюда имеем для $\forall\varphi\in L_{a_\nu, b_\nu}$

$$|\langle u(x, y), \varphi(x)\rangle| = |\langle g(x, y), Q_\nu(-D_x)\varphi(x)\rangle| <$$

$$\leqslant \int |\gamma^{-1}_{a_\nu, b_\nu}(x)\, g(x, y)|\, |\gamma_{a_\nu, b_\nu}(x)\, Q_\nu(-D_x)\varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \|\gamma^{-1}_{a_\nu, b_\nu}(x)\, g(x, y)\|_{L_1}\cdot\|\varphi\|_{q_\nu}\leqslant \text{cte}\ (1+y)^r\|\varphi\|_{q_\nu}.$$

Лемма 2. *Пусть $\hat{u}(p, y) \in A_y(\pi_{a,b})$ является решением уравнения*

$$R_{n-m}(D_y, p)\hat{u}(p, y) = 0, \tag{9}$$

тогда $\hat{u}(p, y) \equiv 0$.

Доказательство. Перепишем уравнение (9) в виде

$$(D_y - \lambda_{n+1}(p))\, v(p, y) = 0, \tag{10}$$

где $v(p, y) = (D_y - \lambda_{m+2}(p)) \cdots (D_y - \lambda_n(p))\, \hat{u}(p, y)$. Заметим, что $U(p, y)$ аналитична в $\pi_{a,b}$, за исключением конечного числа точек ветвления, в окрестности которых разлагается в ряд Пюизё. Из этого заключаем, что в любой конечной части полосы $\pi_{a,b}$ $v(p, y)$ может иметь не более чем конечное число нулей, либо тождественно равна нулю. Из (10) имеем

$$v(p, y) = c(p)\exp(\lambda_{m+1}(p)\cdot y). \tag{11}$$

Из непрерывности $\lambda_{m+1}(p)$ вытекает существование окрестности $V_\delta(p_{m+1})$ точки p_{m+1}, что $\operatorname{Re}\lambda_{m+1}(p) > 0\ \forall p \in V_\delta(p_{m+1})$. Из (5), (7), (11) имеем

$$|c(p)| < \exp(-\operatorname{Re}\lambda_{m+1}(p)\cdot y)\cdot c_\nu\cdot(1+y)^r\cdot P_\nu(|p|)\ \forall p \in V_\delta(p_{m+1}) \subset$$
$$\subset \pi_{a_\nu, b_\nu}.$$

Устремляя $y \to +\infty$ получим $c(p) = 0\ \forall p \in V_\delta(p_{m+1})$, тем самым $V(p, y) \equiv 0$ в $\pi_{a,b}$. Продолжая этот процесс, получим $u(p, y) \equiv 0$. Лемма 2 доказана

§ 1. Задача типа Коши ($a_n(p) \neq 0$)

Задача А. Требуется найти решение $u(x, y) \in L'_y(a, b)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$D^j_y u(x, 0) = f_j(x),\ j = 0, \cdots, m-1, \tag{1.1}$$

$f_j \in L'(a, b)$ — заданные функционалы.

Переходя в (1) и (1.1) к образам Лапласа и используя лемму 2 задачу А сведем к эквивалентной:

$$Q_m(D_y, p)\hat{u}(p, y) = 0, \tag{1.2}$$

$$D^j_y \hat{u}(p, 0) = \hat{f}_j(p),\ j = 0, \cdots, m-1. \tag{1.3}$$

Нетрудно проверить, что аналитические функции

$$E_j(p, y) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\lambda^{m-j-1} + q_1(p)\lambda^{m-j-2} + \cdots + q_{m-j-2}(p)}{Q_m(\lambda, p)}\exp(\lambda y)\, d\lambda,$$

$$j = 0, \cdots, m-1, \tag{1.4}$$

где $\gamma(p)$ — замкнутый контур, содержащий корни $\lambda_1(p), \cdots, \lambda_m(p)$ полинома $Q_m(\lambda, p)$, являются решениями уравнения (1.2) и удовлетворяют начальным условиям

$$D^k_y E_j(p, 0) = \delta^k_j,\ k = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{1.5}$$

где δ^k_j — символ Кронекера.

Вводя вектор $E(p, y) = \left(E_j(p, y), \frac{d}{dy} E_j(p, y), \cdots, \frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}} E_j(p, y) \right)$, уравнение (1.2) перепишем в матричной форме

$$\frac{dE}{dy}(p, y) = A(p) E(p, y), \tag{1.6}$$

где $A(p)$ — аналитическая матрица не выше полиномиального роста (см. (5)). Отсюда имеем

$$E(p, y) = \exp(A(p) \cdot y) E(p, 0), \ E(p, 0) = (0, \cdots, \underset{j}{1}, \cdots, 0). \tag{1.7}$$

Из (1.7) вытекают оценки [3]

$$\| E(p, y) \| \leqslant \text{cte} (1 + |p|)^{m_j^0} (1 + y)^{n_j^0}, \tag{1.8}$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму матрицы.

Дифференцируя (1.7) по y, аналогично получим

$$\left\| \frac{d^k E(p, y)}{dy^k} \right\| \leqslant \text{cte} (1 + |p|)^{m_j^k} \cdot (1 + y)^{n_j^k}, \ k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{1.9}$$

Так как $\left| \frac{d^k}{dy^k} E_j(p, y) \right| \leqslant \left\| \frac{d^k E(p, y)}{dy^k} \right\|$, то $E_j(p, y)$ удовлетворяет оценкам (1.9). Остается заметить, что функция

$$\tilde{u}(p, y) = \sum_{j=0}^{m-1} E_j(p, y) \tilde{f}_j(p) \tag{1.10}$$

принадлежит $A_y(\pi_{a, b})$ и является решением задачи (1.2), (1.3), обратное преобразование Лапласа которой будет единственным решением задачи А. Таким образом доказана

Теорема 1. *Граничная задача* А *имеет единственное решение для всех* $f_0, \cdots, f_{m-1}$.

§ 2. Задача типа Коши ($a_n(p_0) = 0$)

Пусть $a_n(p)$ обращается в нуль в точке $p_0 \in \pi_{a, b}$ и отлична от нуля в $\pi_{a, b} \setminus \{p_0\}$. Не ограничивая общности можно предположить, что хотя бы одна из функций $a_{n-1}, \cdots, a_0(p)$ отлична от нуля в точке p_0. Это вытекает из того, что в рассматриваемых классах ядро произвольного дифференциального оператора $L(D_x)$ нулевое.

Ряд Пюизё разложения функции $\lambda_j(p)$ в окрестности точки p_0 будет иметь вид [1]

$$\lambda_j(p) = \sum_{k=N_j}^{+\infty} c_{jk} \left[(p - p_0)^{\frac{1}{\nu_j}} \right]^k, \ N_j \in Z, \nu_j \in N. \tag{2.1}$$

Функции $q_j(p)(r_j(p)$ (см. (4)) в рассматриваемом случае аналитичны в полосе $\pi_{a, b}$ за исключением, быть может, точки p_0, в которой имеют полюс. Это вытекает из того, что функции

$$\lambda_1^r(p) + \cdots \lambda_m^r(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(p)} \frac{\partial P_n(\lambda, p)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda^r}{P_n(\lambda, p)}d\lambda,\ r\in N, \qquad (2.2)$$

где $\gamma(p)$ — замкнутый контур, содержащий только корни $\lambda_1(p),\cdots,\lambda_m(p)$, аналитичны в $\pi_{a,b}\diagdown\{p_0\}$ и, на основании (2.1) стремятся к ∞ при $p\to p_0$.

Таким образом, вместо (5) имеем оценки

$$|q_j^{(k)}(p)| + |r_j^{(k)}(p)| \leqslant c_{jk}|p-p_0|^{-k-t_j}\cdot(1+|p|)^{m_j^k},\ t_j\in N. \qquad (2.3)$$

Заметим, что лемма 2 остается в силе, поскольку все рассуждения проходят для области $\pi_{a,b}\diagdown\{p_0\}$. Что касается задачи А, то очевидно однородная задача имеет только нулевое решение. Оценка (1.9) для аналитических в $\pi_{a,b}\diagdown\{p_0\}$ функций $E_j(p, y)$ принимает вид

$$\left|\frac{d^k E_j(p,y)}{dy^k}\right| \leqslant \text{cte}\,|p-p_0|^{-k-t_{j_k}}(1+|p|)^{m_j^k}\cdot(1+y)^{n_j^k}. \qquad (2.4)$$

То есть p_0 является полюсом для $E_j(p, y)$. Обращаясь к формуле (1.10) легко заметить, что $\hat{u}(p;\ y)\in A_y(\pi_{a,b})$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}_j(p)$ в точке p_0 имеют нуль определенного порядка t_j:

$$\langle f_j(x),\ x^k\exp(-p_0x)\rangle = 0,\ k = 0,\cdots,\ t_j-1. \qquad (2.5)$$

Таким, образом, справедлива

Теорема 2. *Однородная граничная задача* А *имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий вида* (2.5).

Замечание. Как показывает пример, условия (2.5) могут отсутствовать. Действительно, в $L_y'(-1, 0)$ рассмотрим оператор

$$L(D_x,\ D_y) = (D_y - D_x)\left(\left(D_x + \frac{1}{2}\right)D_y - iD_x\right),$$

для которого $\lambda_1(p) = p$, $\lambda_2(p) = ip\Big/\left(p+\dfrac{1}{2}\right)$ и поэтому он редуцируется к $L_1 = D_y - D_x\left(p_0 = -\dfrac{1}{2}\right)$.

§ 3. Задача Коши для уравнения типа Коши—Ковалевской

В этом параграфе операторы $a_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ в (1) предполагаются порядка не выше $n-k$, а характеристические корни главной части (1) различными и ненулевыми. Тогда для $|p|\gg 1$ корни $\lambda_j(p)$ характеристического уравнения (2) будут различными и разложение (3) примет вид

$$\lambda_j(p) = \lambda_j\cdot p + c_j + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk}\cdot p^{-k}. \qquad (3.1)$$

Заметим, что для постановки задачи Коши для уравнения (1) необходимо предположить, что $\operatorname{Re} \lambda_j(p) < 0 \ \forall p \in \pi_{a,b}, \ j = 1, \cdots, n$ (см. § 1). А это, в свою очередь, означает, что $\lambda_j \in R$, то есть уравнение (1) гиперболического типа. Отсюда, существуют $\pi_{a,b}$ и $\delta > 0$ такие, что $\operatorname{Re} \lambda_j(p) < -\delta \ \forall p \in \pi_{a,b}$.

Определение 4. Через $M^n(a, b)$ обозначим банахово пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|^n_{a,b} = \sup_{-b<\sigma<-a} \exp(\sigma x) \sum_{j=0}^{n} |D^j u(x)|. \tag{3.2}$$

Из оценки

$$|\langle u(x), \varphi(x)\rangle| < \int |\gamma^{-1}_{a_\nu, b_\nu}(x)\cdot u(x)|\cdot|\gamma^{(x)}_{a_\nu, b_\nu}(x)\varphi(x)|\,dx < \tag{3.3}$$

$$\leqslant c_\nu \|u\|^n_{a,b}\cdot\|\varphi\|_0, \ \forall \varphi \in L_{a_\nu, b_\nu}$$

вытекает включение $M^n(a, b) \subset L'(a, b)$.

Под решением уравнения (1) мы будем понимать функцию $u(x, y)$ такую, что

$$\sum_{k+m<n} \left\| \frac{\partial^{k+m} u}{\partial y^k \partial x^m} \right\|^0_{a,b} \leqslant \text{cte}. \tag{3.4}$$

Задача В. Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$D^j_y u(x, 0) = f_j(x), \ j = 0, \cdots, n-1, \ f_j \in M^{n-j}(a, b). \tag{3.5}$$

Единственность решения задачи В вытекает из (3.3) и теоремы 1.

Покажем, что прообраз Лапласа функции $u(p, y)$ из (1.10) является искомым решением неоднородной задачи В. Для этого исследуем подробно прообраз $e_j(x, y)$ функции $E_j(p, y)$. Вычисляя $E_j(p, y)$ по теореме о вычетах, получим

$$E_j(p, y) = \sum_{l=1}^{n} a^j_l(p) \exp(\lambda_l(p)\cdot y), \tag{3.6}$$

где $a^j_l(p) = \lambda_l^{n-j-1}(p) / \prod_{k\neq l} (\lambda_l(p) - \lambda_k(p))$.

Имеет место

Лемма 3. *Пусть $f \in M^j(a, b)$, $\alpha > -a$. Тогда прообраз Лапласа*

$$F(x) = L^{-1}(\hat{f}(p)\cdot(\alpha + p)^{-1}) \in M^{j+1}(a, b).$$

Доказательство. Имеем $L^{-1}((p+\alpha)^{-1}) = \exp(-\alpha x)\cdot\theta_+(x)$, поэтому

$$\sup_{-b<\sigma<-a} \|\exp(\sigma - \alpha)x\cdot\theta_+(x)\|_{L_1} < +\infty. \tag{3.7}$$

Отсюда

$$|\exp(\sigma x)\, D^{l} F(x)| = |\exp(\sigma \cdot x) \cdot (\exp(-\alpha \cdot x) \cdot \theta_+(x) * f^{l}(x))| =$$

$$= |\exp(\sigma - \alpha)\, x \cdot \theta_+(x) * \exp(\sigma x) \cdot f^{(l)}(x)| \leqslant \mathrm{cte} \sup_{\substack{-b<\sigma<-a \\ x \in R}} |\exp(\sigma x) f^{(l)}(x)|,$$

$$(l = 1, \cdots, j) \tag{3.8}$$

$$|\exp(\sigma x)\, D^{j+1} F(x)| = |(\exp(\sigma - \alpha)\, x \cdot \theta_+(x))' * \exp(\sigma x) f^{(j)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |\sigma - \alpha| \cdot |\exp(\sigma - \alpha)\, x \cdot \theta_+(x) * \exp(\sigma x) f^{(j)}(x)| + |\exp(\sigma \cdot x) f^{(j)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{cte} \sup_{\substack{-b<\sigma<-a \\ x \in R}} |\exp(\sigma x) f^{(j)}(x)|. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) получим

$$\|F(x)\|^{j+1}_{a,b} \leqslant \mathrm{cte} \|f\|^{j}_{a,b}, \tag{3.10}$$

что и требовалось доказать.

Далее имеем

$$a_l^j(p) \cdot \hat{f}_j(p) = [(a_l^j(p) \cdot (p+\alpha)^j - c_l^j) + c_l^j] \hat{f}_j(p) \cdot (p+\alpha)^{-j}, \tag{3.11}$$

где $c^j = \lim\limits_{p\to\infty} a_l^j(p) \cdot (p+\alpha)^j$.

Первое слагаемое $\hat{b}_l^j(p)$ в квадратных скобках в (3.11) на бесконечности ведет себя как $\dfrac{1}{p}$, поэтому

$$\sup_{a<\sigma<b} \|\hat{b}_l^j(\sigma + i\tau)\|_{L_1} < +\infty. \tag{3.12}$$

Его прообраз $b_l^j(x)$, в силу равенства Парсеваля, удовлетворяет неравенству

$$\sup_{-b<\sigma<-a} \|\exp(\sigma x)\, b_l^j(x)\|_{L_1} < +\infty. \tag{3.13}$$

Дифференцируя $\hat{b}_l^j(p)$ легко убедиться, что

$$\sup_{-b<\sigma<-a} \|x b_l^j(x) \exp(\sigma x)\|_{L_1} < +\infty. \tag{3.14}$$

Из (3.13), (3.14) и неравенства Гёльдера получим

$$\sup_{-b<\sigma<-a} \|b_l^j(x) \exp(\sigma x)\|_{L_1} < +\infty. \tag{3.15}$$

Из (3.11), (3.15) и леммы 3 вытекает, что

$$\|L^{-1}(a_l^j(p) \cdot \hat{f}_j(p))\|^{n}_{a,b} \leqslant \mathrm{cte} \|f_j(x)\|^{n-j}_{a,b}. \tag{3.16}$$

Теперь рассмотрим прообраз $k_l(x, y)$ функции $\exp(\lambda_l(p) \cdot y)$. Имеем для $\sigma \in [a, b)$

$$k_l(x, y) = \int \exp(px + \lambda_l(p) y)\, dp = \int \exp(p(x + \lambda_l \cdot y) +$$

$$+ c_l \cdot y)[\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l) \cdot y - 1]\, dp + i \exp(\sigma(x + \lambda_l y) +$$

$$+ c_l \cdot y)\, \delta(x + \lambda_l \cdot y),$$

где $\delta(\cdot)$—дельта-функция Дирака.

Первое слагаемое в последнем равенстве представим в виде

$$a_l(t, y) = i\int \exp(i\tau t)\, A(p, y)\, d\tau,\quad A(p, y) = \exp((x + \lambda_l \cdot y)\sigma + c_l \cdot y)\cdot$$

$$\cdot[\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l)\, y - 1],\quad t = x + \lambda_l \cdot y.$$

Имеет место неравенство

$$|A(p, y)| \leqslant y\cdot|\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l|\cdot\left|\frac{\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l)\, y - 1}{y(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l)}\right|\cdot$$

$$\cdot|\exp((x + \lambda_l \cdot y)^\sigma + c_l y)| \leqslant y\,|\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l|\cdot(1 + |\exp(\lambda_l(p) - \lambda_l \cdot p - c_l)y|)\cdot$$

$$\cdot|\exp((x + \lambda_l \cdot y)\,\sigma + c_l \cdot y)| \leqslant \mathrm{cte}\cdot\frac{y}{1+|p|}\exp(\sigma x - \delta_0 y),\ \delta_0 > 0 \qquad (3.17)$$

(из (3.1) и $\operatorname{Re}\lambda_l(p) < -\delta \Rightarrow \sigma\lambda_l + \operatorname{Re} c_l < -\delta_0$).

Из (3.17) имеем

$$\sup_{a<\sigma<b}\|\exp(-\sigma x)\, A(p, y)\|_{L_2} \leqslant \mathrm{cte}\, y\cdot\exp(-\delta_0 \cdot y) \qquad (3.18)$$

и, в силу равенства Парсеваля,

$$\sup_{-b<\sigma<-a}\|\exp(\sigma x)\, a(x + \delta_l^\sigma \cdot y, y)\|_{L_2} \leqslant \mathrm{cte}\, y\cdot\exp(-\delta_0 \cdot y). \qquad (3,19)$$

С другой стороны

$$A'_\tau(p, y) = \exp(\sigma x)\cdot\exp(\lambda_l(p)\cdot y - i\lambda_l \tau y)\cdot(\lambda_l(p) - \lambda_l p - c_l)'_\tau \cdot y,$$

поэтому

$$|A'_\tau(p, y)| \leqslant \mathrm{cte}\cdot\exp(\sigma\cdot x)\cdot\frac{y\cdot\exp(-\delta\cdot y)}{1 + |p|^2}. \qquad (3.20)$$

Отсюда, как и выше

$$\sup_{-b<\sigma<-a}\|\exp(\sigma\cdot x)\cdot t\cdot a_l(t, y)\|_{L_2} \leqslant \mathrm{cte}\cdot y\cdot\exp(-\delta\cdot y). \qquad (3.21)$$

Из (3.19), (3.21) получим

$$\sup_{-b<\sigma<-a}\|\exp(\sigma\cdot x)\, a_l(x + \lambda_l \cdot y, y)\|_{L_1} \leqslant \mathrm{cte}\, y\, \exp(-\delta_0 \cdot y). \qquad (3.22)$$

Лемма 4. *Функции* $v_{jl}(x, y) = L^{-1}(a_l^j(p)\hat{f}_j(p)\exp(\lambda_l(p)\cdot y))$ *удовлетворяют оценке*

$$\left|\frac{\partial^{m+k} v_{jl}}{\partial x^m\, \partial y^k}(x, y)\right|_{a,b}^{n-(m+k)} \leqslant \mathrm{cte}\,\|f_j\|_{a,b}^{n-j}. \qquad (3.23)$$

Доказательство. Обозначим $A_j^l(x) = L^{-1}(a_l^j(p)\hat{f}_j(p))$. Имеем

$$v_{jl}(x, y) = k_l(x, y) * A_j^l(x) = a_l(x + \lambda_l \cdot y, y) * A_j^l(x) +$$

$$+ i\exp(c_l \cdot y)\cdot\delta(x + \lambda_l \cdot y) * A_j^l(x).$$

Из (3.16) и (3.22) вытекают оценки

$$\| a_l(x+\lambda_l\cdot y, y) * A_j^l(x)\|_{a,b}^n \leqslant \mathrm{cte}\cdot y \exp(-\delta_0\cdot y)\| f_j(x)\|_{a,b}^{n-j}, \tag{3.24}$$

$$\|\exp(c_l\cdot y)\,\delta(x+\lambda_l\cdot y) * A_j^l(x)\|_{a,b}^n = \|\exp(c_l\cdot y) A_j^l(x+\lambda_l\cdot y)\|_{a,b}^n \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{-b<\sigma<-a} \exp(c_l-\lambda_l\sigma)\, y\cdot\| f_j\|_{a,b}^{n-j}, \tag{3.25}$$

тем самым получим (3.23) при $m=k=0$. А теперь заметим, что дифференцирование по x или по y функции $v_{jl}(x, y)$ приводит, в силу разложения (3.1), к потере одной производной у $f_j(x)$, поэтому (см. также лемму 3 и (3.11))

$$\left\|\frac{\partial^{m+k} v_{jl}(x, y)}{\partial x^m\,\partial y^k}\right\|_{a,b}^{n-(m+k)} \leqslant \mathrm{cte}\,\| f_j\|_{a,b}^{n-j}$$

и лемма 4 доказана.

Так как

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{n} v_{jl}(x, y),$$

то окончательно имеем

$$\sum_{m+k<n}\left\|\frac{\partial^{m+k} u(x, y)}{\partial x^m\,\partial y^k}\right\|_{a,b}^{l-(m+l)} \leqslant \mathrm{cte}\sum_{j=0}^{n-1}\| f_j\|_{a,b}^{n-j}. \tag{3.26}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Задача В имеем и притом единственное решение. Справедлива оценка (3.26).*

§ 4. Общая граничная задача

Задача С. Требуется найти решение $u\in L'_y(a, b)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\sum_{l=0}^{n-1} Q_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^l u(x, 0)}{\partial y^l} = f_k(x),\ k=0,\cdots, m-1 \text{ в } L'(a, b), \tag{4.1}$$

где $Q_{kl}(p)$—полиномы по p с постоянными коэффициентами, а $f_k\in L'(a, b)$—заданные функционалы.

Введем многочлены

$$q_k(\lambda, p) = \sum_{l=0}^{n} Q_{kl}(p)\,\lambda^l,\ c_k(\lambda, p) = q_k(\lambda, p)\,(\mathrm{mod}\, Q_m(\lambda, p)) =$$
$$= \sum_{l=0}^{m-1} c_{kl}(p)\,\lambda^l$$
$$(k=0,\cdots, m-1).$$

Очевидно функции $c_{kl}(p)$ аналитичны в $\pi_{a,b}$ и растут на бесконечности не быстрее некоторого полинома. Через $C(p)$ обозначим матрицу $\|c_{kl}(p)\|$. Имеют место

Теорема 4. *Условие* $\det C(p)\neq 0\ \forall p\in\pi_{a,b}$ *является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости задачи С.*

Теорема 5. *Условие* $\det C(p) \not\equiv 0$ *в* $\pi_{a,b}$ *является необходимым и достаточным для нетеровости задачи* C, *при этом однородная задача имеет только нулевое решение.*

Доказательство теоремы 4. Заметим, что граничные условия (4.1) могут быть переписаны в эквивалентной форме

$$\sum_{l=0}^{m-1} c_{kl}(p) \frac{d^l \hat{u}(p, 0)}{dy^l} = \hat{f}_k(p), \; k = 0, \cdots, m-1. \tag{4.2}$$

Пусть $\det C(p) \neq 0 \; \forall p \in \pi_{a,b}$. Тогда условия (4.2) эквивалентны задаче A из § 1, откуда следует достаточность. Доказательство необходимости разобьем на два случая. Пусть вначале $\det C(p) \equiv 0$. Метод Гаусса приведения матриц к трапецоидальному виду позволяет утверждать, что существует матрица $M(p) \in A(\pi_{a,b})$ с $\det M(p) \not\equiv 0$ такая, что матрица $M(p) \cdot C(p)$ имеет трапецоидальный вид. Так как $\operatorname{Ker} M(p) = 0$ в $A(\pi_{a,b})$, то задача (4.2) эквивалентна следующей

$$M(p)\, C(p)\, v(p) = M(p) f(p), \tag{4.3}$$

где $v(p) = \left(\hat{u}(p, 0), \cdots, \frac{d^{m-1}\hat{u}(p, 0)}{dy^{m-1}}\right)$, $f(p) = (\hat{f}_0(p), \cdots, \hat{f}_{m-1}(p))$.

Очевидно, что однородная задача (4.3) ($f \equiv 0$) имеет бесконечно много линейно независимых решений в $A(\pi_{a,b})$. Возвращаясь к задаче A из § 1 мы получим, что однородная задача C имеет бесконечно много линейно независимых решений.

Теперь рассмотрим случай, когда $\det C(p) \not\equiv 0$ в $\pi_{a,b}$. Имеет место

Лемма 5. *Из* $\det C(p) \not\equiv 0$ *вытекает, что функция* $\det C(p)$ *в полосе* $\pi_{a,b}$ *может иметь лишь конечное число нулей.*

Доказательство. Для $|p| \gg 1$ имеем представление

$$\det C(p) = \sum_{j=-N_k}^{+\infty} \sum_{k=1}^{N_0} c_{jk} \left(p^{-\frac{1}{n_k}}\right)^j, \; n_k, N_k \in N, \tag{4.4}$$

откуда вытекает, что либо $\det C(p) \neq 0$ для $|p| \gg 1$, либо $p = \infty$ является нулем конечного (возможно дробного) порядка, поскольку функция $\varphi(p) = \det C(p^r)$, где $r = \text{нок}\,(n_1, \cdots, n_{N_0})$ аналитична в точке $p = \infty$. Отсюда и из аналитичности функции $\det C(p)$ в $\pi_{a,b}$ вытекает лемма 5.

Нули функции $\det C(p)$ обозначим через $p_1, \ldots, p_\nu$, а их кратности — через $r_1, \ldots, r_\nu$ ($p_j \neq \infty$). Матрица $C(p)$ допускает представление [4].

$$C(p) = R(p)\, D(p)\, C_0(p), \tag{4.5}$$

где $R(p)$ — полиномиальная матрица от $\frac{1}{p-p_0}$, $p_0 \in \bar{\pi}_{a,b}$ с $\det R(p) = \text{cte} \neq 0$, $\det C_0(p) \neq 0$, $\forall p \in \pi_{a,b}$, а $D(p) = \left\{\left(\frac{p-p_1}{p-p_0}\right)^{\mu_j^{(1)}} \left(\frac{p-p_\nu}{p-p_0}\right)^{\mu_j^{(\nu)}} \times \delta_j^k\right\}_1^n$ — диагональная матрица; $\mu_1^{(l)} \geqslant \cdots \geqslant \mu_n^{(l)} \in N + \{0\}$, $l = 1, \cdots, \nu$

такие, что $\mu_1^{(l)}+\cdots+\mu_s^{(l)}=r_l$. Теперь нетрудно проверить, что если в (4.2) взять правую часть в виде $R(p)\,g(p)$, где компоненты вектор-функции $g(p)\in A(\pi_{a,b})$ не обращаются в ноль в $\pi_{a,b}$, то задача C не будет иметь решения. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Необходимость условия $\det C(p)\not\equiv 0$ доказана выше. Достаточность же следует из того, что условия (4.2), в силу (4.5), эквивалентны следующим

$$D(p)\,w(p)=R^{-1}(p)f(p), \tag{4.6}$$

где $w(p)=C_0(p)\,v(p)\in A(\pi_{a,b})$.

Очевидно система (4.6) имеет решение в $A(\pi_{a,b})$ тогда и только тогда, когда $f(p)$ удовлетворяют конечному числу условий вида (2.5).

§ 5. Смешанная граничная задача

Через $L_{a,b}^{(k)}$ обозначим банахово пространство функций $\varphi(x)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{a,b}^{(k)}=\sup_x \gamma_{a,b}^{(x)}\sum_{j<k}|\varphi_{(x)}^{(j)}|. \tag{5.1}$$

Очевидно $L_{a,b}^{(k)}\subset L_{c,d}^{(k)}$ вместе с топологией при $c<a$ и $d>b$. Через $L^{(k)}(a,b)$ обозначим $\bigcup\limits_{\nu} L_{a_\nu b_\nu}^{(k)}$, где $a_\nu\downarrow a$ и $b_\nu\uparrow b$, а ему сопряженное — через $L'^{(k)}(a,b)$. Имеем также топологические вложения $L(a,b)\subset L^{(k)}(a,b)$, $L'(a,b)\supset L'^{(k)}(a,b)$.

Под решением уравнения (1) понимается функционал $u(x,y)\in \in L'^{(k)}(a,b)$ для некоторого k, удовлетворяющий уравнению (1) и условию $\forall(a_\nu,b_\nu)\ \exists\ c_\nu,\ t_\nu$ такие, что

$$\left|\frac{d^l}{dy^l}<u(x,y),\ \varphi(x)>\right|\leqslant c_\nu(1+y)^{t_\nu}\cdot\|\varphi\|_{a_\nu,b_\nu}^{(k)},\ \forall\varphi\in L_{a_\nu,b_\nu}^{(k)}. \tag{5.2}$$

$$(l=0,\cdots,n-1)$$

Задача Д. Требуется найти решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$<\sum_{l=0}^{n-1}q_{jl}^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^l u(x,0)}{\partial y^l},\ \varphi(x)>=<f_j(x),\varphi(x)>\forall\varphi\in L^{(k_0)}(a,b), \tag{5.3}$$

$$(j=0,1,\cdots,m-1,\ \operatorname{supp}\varphi\subset R^+)$$

$$<\sum_{l=0}^{n-1}q_{jl}^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^l u(x,0)}{\partial y^l}\cdot\varphi(x)>=<g_j(x),\ \varphi(x)>\forall\varphi\in L^{(k_0)}(a,b),$$

$$(j=0,1,\cdots,m-1,\ \operatorname{supp}\varphi\subset R^-), \tag{5.4}$$

где $f_j,\ g_j\in L'^{(k_1)}(a,b)$, $\operatorname{supp} f_j\subset R^+$, $\operatorname{supp} g_j\subset R^-$, $k_1\leqslant k_0$.

Предположим, что строки матриц-функций $\|q_{jl}^{(1)}(p)\|$, $\|q_{jl}^{(2)}(p)\|$ линейно независимы по модулю полинома $Q_m(\lambda,p)$ (см. задачу С).

Обозначая разность функционалов в (5.3) и (5.4), соответственно, через $f_j^-\in L'^{(k_0)}(a,b)$, $g_j^+\in L'^{(k_0)}(a,b)$ ($\operatorname{supp} pf_j^-\subset \overline{R^-}$, $\operatorname{supp} pg_j^+\subset\overline{R^+}$), а затем переходя к образам Лапласа, условия (5.3'), (5.4) можно преобразовать к эквивалентному виду

$$\sum_{l=0}^{m-1} c_{jl}^{(1)}(p)\frac{\partial^l \hat{u}(p,0)}{\partial y^l} = \hat{f}_j(p)+\hat{f}_j^-(p),\ j=0,1,\cdots,m-1, \tag{5.5}$$

$$\sum_{l=0}^{m-1} c_{jl}^{(2)}(p)\frac{\partial^l \hat{u}(p,0)}{\partial y^l} = \hat{g}_j(p)+\hat{g}_j^+(p),\ j=0,1,\cdots,m-1, \tag{5.6}$$

где $\det\|c_{jl}^{(i)}(p)\| \neq 0\ \forall p\in\pi_{a,b},\ i=1,2.$

Из (5.5), (5.6) имеем

$$C_1^{-1}(p)(\hat{f}(p)+\hat{f}^-(p)) = C_2^{-1}(p)(\hat{g}(p)+\hat{g}^+(p)), \tag{5.7}$$

где $C_i(p)=\|c_{jl}^{(i)}(p)\|$, $\hat{f}=(\hat{f}_0,\cdots,\hat{f}_{m-1}),\cdots,\ \hat{g}^+=(\hat{g}_0^+,\cdots,\hat{g}_{m-1}^+)$.

В свою очередь (5.7) перепишем в виде

$$\hat{g}^+(p) = K(p)\hat{f}^-(p)+F(p), \tag{5.8}$$

где $K(p)=C_2(p)\cdot C_1^{-1}(p)$, $F(p)=K(p)\cdot\hat{f}(p)-\hat{g}(p)$, $\det K(p)\neq$ $\neq 0\ \forall p\in\pi_{a,b}$.

Представляя матрицу $K(p)$ в виде $K(p)=(p-p^0)^{m_0}\cdot K_0(p)$ ($\mathrm{Re}\,p^0<a$) мы можем считать элементы матрицы $K_0(p)$ ограниченными аналитическими функциями в $\pi_{a,b}$. Не ограничивая общность, пусть

$$\lim_{p\to\infty}\det K_0(p)=0. \tag{5.9}$$

Имеет место

Лемма 6. *Матрица $K_0(p)$ представима в виде*

$$K_0(p)=R(\alpha(p)-1)\,D_0(\alpha(p)-1)\,K^0(p), \tag{5.10}$$

где $R(\cdot)$—рациональная, а $D(\cdot)$—диагональная матрицы—функции от своих аргументов, причем $\det R=\mathrm{cte}\neq 0$, $\det K^0(p)\neq 0\ \forall p\in\bar{\pi}_{a,b}$ *(включая точку ∞), элементы $K^0(p)$ аналитичны и ограничены в* $\pi_{a,b}$, $\alpha(p)=(p-p_0)/(p-p_1)$, $\mathrm{Re}\,p_0>b$, $\mathrm{Re}\,p_1<a$

Доказательство. Конформное отображение $t=\alpha(p)$ переводит полосу $\pi_{a,b}$ в область, ограниченную окружностями C_0 и C_1, касающимися в точке $t=1$. Матрица-функция $A(t)=K_0\left(\dfrac{tp_1-p_0}{t-1}\right)$ на кривой $C_0\cup C_1$ имеет невырожденный определитель, за исключением точки $t=1$, в которой имеет нуль порядка $\dfrac{r_1}{r_2}$ ($r_i\in N$). Матрица $a(\tau)=$ $=A((1+\tau)^{r_2})$ аналитична по τ и $\det a(\tau)$ имеет в точке $\tau=0$ единственный нуль порядка r_1. Для такой матрицы имеет место представление [4]

$$a(\tau)=r(\tau)\,d(\tau)\,a_0(\tau), \tag{5.11}$$

где $r(\tau)$ — рациональная матрица-функция от τ с $\det r(\tau) = \mathrm{cte} \neq 0$, $d(\tau) = \|\tau^{m_j}\delta_j^k\|$ — диагональная матрица-функция, $m_j \in N$, $m_1 + \cdots + m_n = r_1$, а $\det a_0(\tau) \neq 0$ $\forall \tau \in \Gamma$ — образ кривой $C_0 \cup C_1$ при отображении $t = (1+\tau)^{r_1}$. Возвращаясь к переменной p, получим представление (5.10). Справедлива следующая [5]

Лемма 7. *Матрица $K^0(p)$ из (5.10) допускает следующую факторизацию*

$$K^0(p) = K_+(p)\, D(p)\, K_-(p), \tag{5.12}$$

где $D(p) = \|\alpha(p)^{\varkappa_j}\delta_j^k\|$ — диагональная матрица, $\varkappa_0 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_{m-1}$ — целые числа, $K_+(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p > a$, а $K_-(p)$ при $\operatorname{Re} p < b$, элементы матриц $K_+(p)$ и $K_-(p)$ ограничены.

Задача сопряжения (5.8) на основании леммы 6 и 7 перепишется в виде

$$\hat{g}^+(p) = (p-p^0)^{m_0} R(\alpha(p)-1)\, D_0(\alpha(p)-1)\, K_+(p) K_-(p) \hat{f}(p) + F(p)$$

или

$$G^+(p) = D(p)\, G^-(p) + Q(p), \quad p \in \pi_{a,b}, \tag{5.13}$$

где $G^+(p) = (p-p^0)^{-m_0} K_+^{-1}(p) \cdot D_0^{-1}(\alpha(p)-1)\, R^{-1}(\alpha(p)-1)\, \hat{g}^+(p)$, $G^-(p) = K_-(p)\hat{f}^-(p)$, $Q(p) = (p-p^0)^{-m_0} \cdot K_+^{-1}(p) \cdot D_0^{-1}(\alpha(p)-1)\, R^{-1}(\alpha(p)-1)\, F(p)$.

Для исследования задачи (5.13) нам понадобится

Лемма 8. *Пусть $f \in L'^{(k)}(a, b)$ и $\operatorname{supp} f \subset \overline{R}^+$ $(\overline{R}^-)$. Тогда $\hat{f}(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p > a$ $(\operatorname{Re} p < b)$ и существует полином $P_r(p)$ (r не зависит от f) такой, что $\forall (a_\nu, b_\nu) \subset (a, b)$ $\exists c_\nu$:*

$$|\hat{f}(p)| \leqslant c_\nu P_r(|p|), \quad \operatorname{Re} p \geqslant a_\nu \ (\operatorname{Re} p \leqslant b_\nu). \tag{5.14}$$

Доказательство. Существует функция $\eta_\varepsilon(x) \in C^\infty$ такая, что $\eta_\varepsilon(x) = 1$, $x \in (\operatorname{supp} f)^\varepsilon$; $\eta_\varepsilon(x) = 0$, $x \overline{\in} (\operatorname{supp} f)^{3\varepsilon}$; $0 \leqslant \eta_\varepsilon(x) \leqslant 1$, $|D^\alpha \eta_\varepsilon(x)| \leqslant k_\alpha \varepsilon^{-\alpha}$ $(\varepsilon > 0)$. Пусть $\lambda(x) \in C_0^\infty$ равна 1 в некоторой окрестности точки 0, а $\Phi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1!}\varphi'(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!}\cdot\varphi^{(k)}(0)$. Имеем

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \eta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \lambda(x)\Phi(x)) \rangle + \langle f, \lambda(x)\Phi(x) \rangle$$
$$\forall \varphi \in L^{(k)}(a, b).$$

Так как $\eta_\varepsilon(x)\exp(-px) \in L^{(k)}(a, b)$ $\forall p \in \{\operatorname{Re} p \geqslant a_\nu\}$, то из этого равенства имеем аналитичность $\hat{f}(p)$ в области $\operatorname{Re} p > a$. Далее, так как $f \in L'^{(k)}(a, b)$ и $\operatorname{supp} f \subset \overline{R}^+$, то

$$|\langle f, \varphi - \lambda\Phi \rangle| = |\langle f, \eta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \lambda(x)\Phi(x)) \rangle| \leqslant c_\nu \sup_{x>0} \exp(a_\nu \cdot x) \cdot$$
$$\cdot \sum_{j=0}^{k} |D^j(\varphi(x) - \lambda(x)\Phi(x))| + c_\nu \sup_{-3\varepsilon < x < 0} \exp(b_\nu x) \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{k} |D^j(\eta_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \Phi(x))|, \quad \forall \varphi \in L^k_{a_\nu, b_\nu}.$$

В этом неравенстве левая часть не зависит от ε, а второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $\varepsilon \to 0+$. Поэтому

$$|< f, \varphi - \lambda\Phi >| \leqslant c_\nu \sup_{x>0} \exp(a_\nu x) \sum_{j=0}^{k} |D^j (\varphi(x) - \lambda(x)\Phi(x))|.$$

Окончательно получаем

$$|< f, \varphi >| \leqslant c_\nu \Big(\sup_{x>0} \exp(a_\nu \cdot x) \sum_{j=0}^{k} |D^j (\varphi(x) - \lambda(x)\Phi(x))| +$$

$$+ \sup_x \gamma_{a_\nu, b_\nu}(x) \sum_{j=0}^{k} |D^j (\lambda(x)\Phi(x))| \Big).$$

Подставляя вместо $\varphi(x)$ функцию $\exp(-px)$, получим утверждение леммы.

Из леммы 8 вытекает, что в полоской задаче сопряжения (5.13) функции $G^+(p)$, $G^-(p)$ аналитичны, соответственно, в полуплоскостях $\operatorname{Re} p > a$ и $\operatorname{Re} p < b$ и удовлетворяют неравенствам вида (5.14) с вполне конкретным полиномом $P_r(p)$. Вначале рассмотрим однородную $(Q(p) \equiv 0)$ задачу сопряжения (5.13):

$$G_j^+(p) = \left(\frac{p - p_0}{p - p_1}\right)^{\varkappa_j} G_j^-(p), \; j = 0, \cdots, m-1. \quad (5.14)$$

Из (5.14), на основании теоремы Лиувилля, выводим, что однородная задача (5.13) имеет своим решением функции

$$G_j^+(p) = P_{r_j}(p)/(p - p_1)^{\varkappa_j}, \; G_j^-(p) = P_{r_j}(p/(p - p_0)^{\varkappa_j}, \; j = 0, \cdots, m-1,$$

где P_{r_j} — произвольный многочлен степени $r_j \leqslant l$, l — некоторое число. Таким образом однородная задача сопряжения, а вместе с ней и однородная задача D имеет конечное число линейно независимымых решений. Для исследования неоднородной задачи сопряжения (5.13) нам понадобится

Лемма 9. *Пусть $f(p)$ аналитична в $\pi_{a,b}$ такая, что*

$$|f(p)| \leqslant c_\nu \cdot P_m(|p|) \; \forall p \in \pi_{a_\nu, b_\nu}. \quad (5.15)$$

Тогда $f(p) = f^+(p) + f^-(p)$, где $f^\pm(p)$ аналитичны, соответственно, в $\operatorname{Re} p > a$ и $\operatorname{Re} p < b$, удовлетворяющие неравенству вида (5.15).

Доказательство. Функция $\hat{g}(p) = f(p)/(p + d)^{m+1}$, $d \bar{\in} \bar{\pi}_{a,b}$ принадлежит L_2 и более того, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\sup_{-b_{\nu+1} < \sigma < -a_{\nu+1}} \|\exp(\sigma x) g(x)\|_{L_2} = \sup_{a_{\nu+1} < \sigma < b_{\nu+1}} \|\hat{g}(\sigma + i\tau)\|_{L_2} \leqslant c_\nu, \quad (5.16)$$

где $g(x)$ — прообраз Лапласа $\hat{g}(p)$. Представляя $g(x) = \theta_+(x) g(x) + \theta_-(x) g(x)$, получим $f(p) = (p + d)^{m+1} \widehat{\theta_+ g} + (p + d^{m+1} \widehat{\theta_- g}$, при этом из (5.16) и неравенства Гельдера имеем

$$|\widehat{\theta_+ g}(p)| < \int_0^{+\infty} \exp(-px)\exp(a_{\nu+1}\cdot x)\exp(-a_{\nu+1}\cdot x)\, g(x)\, dx \leqslant$$

$$< c_\nu \cdot \sup_{-b_{\nu+1} < \sigma < -a_{\nu+1}} \|\exp(\sigma x)\, g(x)\|_{L_1}, \ \forall \sigma \geqslant a_\nu.$$

Аналогично оценивается и $\widehat{\theta_-(x) g(x)}(p)$.

Используя лемму 9, представим функцию $Q(p)$ в виде $Q(p) = Q^+(p) + Q^-(p)$. Решение неоднородной задачи сопряжения (5.13) запишется в виде

$$G_j^+(p) = Q_j^+(p), (p-p_0)^{\varkappa_j} G_j^-(p) = -(p-p_1)^{\varkappa_j} Q_j^-(p),$$
$$j = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{5.17}$$

Отсюда, для аналитичности функции $G_j^-(p)$ необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий

$$((p-p_1)^{\varkappa_j} Q_j(p))^l (p_0) = 0, \ l = 0, 1, \cdots, \varkappa_j - 1. \tag{5.18}$$

Определяя вектор-функцию $\widehat{g}^+(p)$ (или $\widehat{f}^-(p)$) и подставляя её в (5.6), мы сведем смешанную граничную задачу D к общей граничной задаче C, которая, в свою очередь, при сделанных предположениях эквивалентна задаче Коши A, образ Лапласа решения которой задается формулой

$$\widehat{u}(p, y) = \sum_{j=0}^{m-1} E_j(p, y)\, \widehat{F}_j(p), \tag{5.19}$$

где функции $\widehat{F}_j(p)$ аналитичны в $\pi_{a,b}$ и удовлетворяют неравенствам: $\forall (a_\nu, b_\nu) \Subset (a, b) \ \exists\, c_\nu$ такая, что

$$|\widehat{F}_j(p)| \leqslant c_\nu P_s(|p|), \ \forall p \in \pi_{a_\nu, b_\nu}, \tag{5.20}$$

где s не зависит от (a_ν, b_ν).

Пользуясь оценками (1.9) и (5.20), нетрудно доказать, что для некоторого k прообраз Лапласа $u(x, y)$ функции $\widehat{u}(p, y)$ из (5.19) принадлежит $L'^{(k)}_{(a,b)}$ и удовлетворяет неравенствам (5.2).

Таким образом получена

Теорема 6. *Однородная задача D может иметь лишь конечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение конечного числа условий.*

Замечание 1. Смешанная граничная задача D была рассмотрена в предположениях теоремы 4 из § 4. Это приводит к тому, что матрица $K(p)$ из (5.8) имеет точку $p=\infty$ единственной возможной особой точкой, что существенно использовалось при её факторизации. В предположениях же теоремы 5 из § 4 появятся и другие особые точки (точки, в которых $\det K(p)$ равен нулю или ∞). Следуя работе [4] матрицу $K(p)$ можно факторизовать и в этом случае. Что касается теоремы 6, то она остается в силе.

Замечание 2. Используя многомерные пространства $L'(a, b)$, где $a=(a_1, \dots, a_m)$, $b=(b_1, \dots, b_m)$, введенные в [2], и многомерное преобразование Лапласа в них, можно распространить полученные результаты на уравнение вида (1) в $R^m \times R^+$, в случае необходимости видоизменения соответствующую формулировку. Например, теорема 1 из § 1 остается в силе, а теорема 2 из § 2 будет справедлива, если дополнительно потребовать, чтобы $a_n(p_1, \dots, p_m)$ обращалась в нуль лишь в конечном числе точек.

§ 6. Примеры

Рассмотрим следующий оператор $L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и, в свете полученных результатов, поставим корректные граничные задачи в классе $L'(0, 1)$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2b\lambda p + cp^2 = 0.$$

Очевидно, что если $b^2 - c \geqslant 0$, $c > 0$, т. е. оператор L — гиперболический, то корректна задача Коши, если же $b^2 - c \geqslant 0$, $b < 0$, $c > 0$, то уравнение $Lu = 0$ в классе $L'(0, 1)$ имеет только нулевое решение и поэтому нет корректных граничных задач. В случае $b^2 - c > 0$, $c < 0$ корректной будет задача Дирихле. Наконец, если $b^2 - c < 0$, то опять уравнение $Lu = 0$ не имеет нетривиальных решений в $L'(0, 1)$ (оператор L—эллиптический).

В $L'(0, 1)$ рассмотрим оператор параболического типа вида $L = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a\frac{\partial}{\partial x}$, $a \in R$. Корень характеристического уравнения имеет вид $\lambda(p) = p^2 + ap = \sigma^2 - \tau^2 + a\sigma + i\tau(2\sigma + a)$. Легко заметить, что задача Коши для уравнения $Lu = 0$ будет корректна тогда и только тогда, когда $a \leqslant -1$.

В заключение на примере оператора $L = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\mu_1 > \mu_2 > 0$ проиллюстрируем результат § 3. Предварительно отметим, что классическяя задача Коши в классе ограниченных функций некорректна. Рассмотрим задачу Коши (3.5) в классе $L^2(-2; -1)$. По формуле Даламбера имеем

$$u(x, y) = \frac{\mu_2 f_1(x + \mu_1 y) - \mu_1 f_1(x + \mu_2 y)}{\mu_2 - \mu_1} +$$

$$+ \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int\limits_{x+\mu_2 y}^{x+\mu_1 y} f_2(\tau)\, d\tau, \quad f_1 \in L^2(-2; -1), \; f_2 \in L^1(-2; -1).$$

Приведем оценки для $u(x, y)$ (производные оцениваются аналогично),

$$\sup_{1<\sigma<2} \exp(\sigma x)\cdot|f_1(x+\mu_2 y)| = \sup_{1<\sigma<2} \exp(-\sigma\mu_2 y)\cdot$$

$$\cdot \exp \sigma(x+\mu_2 y)|f_1(x+\mu_2 y)| \leqslant \|f_1\|^2_{(1,2)}$$

$$\sup_{1<\sigma<2} \exp(\sigma x) \int\limits_{x+\mu_2 y}^{x+\mu_1 \cdot y} |f_2(\tau)|\,d\tau \leqslant \sup_{1<\sigma<2} \exp(\sigma\tau)\,|f_2(\tau)|\cdot$$

$$\cdot \sup_{1<\sigma<2} \exp(\sigma x) \int\limits_{x+\mu_2 y}^{x+\mu_1 \cdot y} \exp(-\sigma\tau)\,d\tau \leqslant \|f_2\|^1_{(1,2)}.$$

Отметим также, что задача типа Коши и общая граничная задача для уравнения вида (1) в других классах функций (Соболева, Шварца и др.) рассматривались, различными авторами [3], [6], [7], [8].

Ереванский политехнический институт

Поступила 8.V.1990

Ա. Ա. ԱՆԴՐՅԱՆ. Եզրային խնդիրներ մասնակի ածանցյալներով հավասարումների համար Զեմանյանի դասերում (*ամփոփում*)

Հետևյալ տեսքի

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right)=0,\ (x,y)\in R\times R^+.$$

մի հավասարման համար, որտեղ $a_k(p)$ հաստատուն գործակիցներով բազմանդամ է, $L'_y(a,b)$ Զեմանյանի դասերում Լապլասի ձևափոխության օգնությամբ դիտարկված են Կոշու տիպի ընդհանուր և խառը եզրային խնդիրները։ Խառը եզրային խնդիրը բերվում է շերտային համալուծման խնդրի։ Ստացված են լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

A. A. ANDRIAN. *Boundarg Value problems for partial defferential equations in the class of Zemanian* (summary)

For equation of the form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}=0,\ (x,y)\in R\times R^+,$$

where $a_k(p)$ — polynom with constants coefficients of $p=\sigma+i\tau$, the problem of Caeuhy type, general and mixed boundary Values problems in the class $L'_y(a,b)$ of Zemanian are considered in the aid of Laplace transformation. The mixed problem reduce into strip conjugation problem. The criterions of solvability are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хёрмнадер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 2, М., «Мир», 1986.
2. *А. Земанян.* Интегральные преобразования обобщенных функций, М., «Наука», 1974.
3. *Г. Е. Шилов.* Математический анализ. Второй спецкурс, М., «Наука», 1965.
4. *З. Прёсдорф.* Некоторые классы сингулярных уравнений, М., «Мир», 1979.

5. *А. А. Андрян.* К теории граничных задач для систем составного типа с младшими членами, Изв. АН АрмССР, сер. матем. XXV, № 1, 1991.
6. *Г. В. Дикополов.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве. Мат. сб., 1962, 59 (101), № 2, 215—228
7. *Н. Е. Товмасян.* Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщенных функций, Диф. уравнения, 1982, т. 18, № 1, 132—138.
8. *А. Л. Павлов.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Мат. сб., 1977, 103(145), № 3 (7), 367—391