ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 3, 1991 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

Статья посвящена изучению граничных свойств введенных ее автором классов мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости [1, 2], а также произведений типа Бляшке—М. М. Джрбашяна [3] в круге. Основные результаты статьи, установленные в случае полуплоскости, являются своеобразными аналогами известного результат Фростмана [4] о граничных свойствах произведения Бляшке с «редкими» нулями, а также результатов М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [5, 6] о граничных свойств мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в круге. Основной результат, установленный в круг для произведений типа Бляшке—М. М. Джрбашяна, является усилением результата отмеченных выше работ [5, 6], относящегося к граничным свойствам этих функций, а также результата, установленного позднее Д. Т. Багдасаряном и И. В. Оганнисяном [7].

1. В статье доказаны три теоремы. Прежде чем их сформулировать, необходимо привести ряд определений. Нижеприводимое определение классов функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости естественно ввиду результатов работ [1, 2, 8] автора.

Определение 1. При значениях параметра $-1<\alpha<0$ функциями обобщенно-ограниченного вида в нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w:\operatorname{Im} w<0\}$, или, что то же самое, функциями класса $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<0)$, всюду ниже будем считать мероморфные в $G^{(-)}$ функциии, допускающие там представление вида

$$F(w)=\frac{B_\alpha(w,\{a_n\})}{B_\alpha(w,\{b_m\})}\exp\left\{c_0+c_1 w\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}+iC\right\}. \qquad (1)$$

Здесь предполагается, что c_0, c_1 и C — вещественные числа, а $\sigma(t)$ — функция, представляемая в вида разности $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$ двух монотонно неубывающих функций, подчиненных условиям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma_{1,2}(t)}{(1+|t|)^{1+\alpha}}<+\infty.$$

Далее, B_α — сходящиеся произведения типа Бляшке для полуплоскости [9], составленные по последовательностям $\{a_n\}$, $\{b_m\}\subset G^{(-)}$ нулей и полюсов F, которые подчинены условиям

$$\sum_n|\operatorname{Im} a_n|^{1+\alpha}<+\infty,\ \sum_m|\operatorname{Im} b_m|^{1+\alpha}<+\infty.$$

Отметим, что если последовательность чисел $\{w_k\} \equiv \{u_k + iv_k\} \subset$ $\subset G^{(-)}$ подчинена такому условию при каком-либо $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$, то произведение

$$B_\alpha(w, \{w_k\}) \equiv \prod_k b_\alpha(w, w_k)|_{\alpha=0} \equiv \prod_k \frac{w - \bar{w}_k}{w - w_k}, \tag{2}$$

$$b_\alpha(w, w_k) \equiv \exp\left\{- \int\limits_{-|v_k|}^{|v_k|} \frac{(|v_k| - |t|)^\alpha\, dt}{[i(w - u_k) - t]^{1+\alpha}}\right\} \tag{3}$$

есть аналитическая в $G^{(-)}$ функция с нулями в точках $\{w_k\}$. Причем кратность нуля в каждой точке w_k равна кратности ее появлений в последовательности $\{w_k\}$ [9].

Необходимо также отметить, что функции рассматриваемых клас, сов $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1 < \alpha < 0)$, после отщепления фактора $\exp\{c_1 w\}$ пред ставления (1), лежат в неванлинновском классе функций ограниченного вида в $G^{(-)}$, т. е. в классе мероморфных в $G^{(-)}$функций, допускающих представление в виде отношения двух аналитических и ограниченных в $G^{(-)}$ функций.

Определение 2. Пусть $E \subseteq (-\infty, +\infty)$ есть некоторое измеримое по Борелю множество (B — множество) и $0 < \gamma < 1$. Будем говорить, что E имеет положительную γ-емкость (или $C_\gamma(E) > 0$), если существует неотрицательная борелевская мера (B—мера) μ, со средоточенная на E ($\mu \prec E$) такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(1 + |t|)^\gamma} = 1 \tag{4}$$

и

$$S_1 \equiv \sup_{w \in G^{(-)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{|w - t|^\gamma} < +\infty. \tag{5}$$

Если же нет такой меры, т. е. для любой неотрицательной B-меры $\mu \prec E$, подчиненной (4), имеем $S_1 = +\infty$, то будем говорить, что множество E имеет нулевую γ-емкость, или $C_\gamma(E) = 0$.

Определение 3. Пусть $-1 < \alpha < +\infty$ и последовательность $\{z_k\}$ $(z_k \neq 0,\ k > 1)$ из единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ подчинена условию

$$\sum_k (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty. \tag{6}$$

Одним из вариантов произведения типа Бляшке—М. М. Джрбашяна является аналитическая в D функция

$$B_\alpha(z, \{z_k\}) \equiv \prod_k A_\alpha(z, z_k)|_{\alpha=0} \equiv \prod_k \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}, \tag{7}$$

$$A_\alpha(z, z_k) \equiv \exp\left\{-\int\limits_{|z_k|}^{1}\left[\left(1-\frac{zx}{z_k}\right)^{-1-\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{z\bar{z}_k}{x}\right)^{-1-\alpha}-1\right]\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx\right\} \tag{8}$$

с нулями $\{z_k\}$ [3, гл. IX].

Определение 4. Пусть $E\subseteq[-\pi, \pi]$ есть некоторое B-множество и $0<\gamma<1$. Говорят, что E имеет положительную γ-емкость, если существует неотрицательная B-мера $\mu\prec E$ такая, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\mu(\theta) = 1 \tag{9}$$

и

$$S_2 \equiv \sup_{z\in D}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu(\theta)}{|z-e^{i\theta}|^\gamma}<+\infty. \tag{10}$$

Если же нет такой меры, т. е. для любой неотрицательной В-меры $\mu\prec E$, подчиненной (9) имеем $S_2=+\infty$, то говорят что множество E имеет нулевую γ-емкость.

Замечание. Последнее определение понятия γ-емкости на единичной окружности общеизвестно. Можно убедиться в том, что после конформного отображения круга на полуплоскость, на конечной оси оно эквивалентно вышеприведенному определению 2.

2. Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Каждая функция $F\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<0)$ обладает ненулевыми, конечными угловыми граничными значениями во всех точках $u\in(-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой $1+\alpha$-емкости.*

Замечание. Эта теорема является аналогом результата М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [5, 6] для классов N_α $(1<\alpha<0)$ в круге. Здесь, как и в случае круга, сужение неванлиновского класса приводит к очевидному уточнению граничных свойств рассматриваемых функций.

В следующей теореме получен болеее полный результат для специальных представителей классов функций обобщенно-ограниченного вида в $G^{(-)}$ —произведений типа Бляшке в полуплоскости.

Теорема 2. 1°. *Пусть $\gamma(0<\gamma<1)$ и $\alpha(\gamma-1<\alpha<\gamma+1)$— любые числа, а последовательность $\{w_k\}\subset G^{(-)}$ подчинена условию*

$$\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^\gamma<+\infty. \tag{11}$$

Тогда функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках $u\in(-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулей γ-емкости.

2°. *Пусть* $\alpha\,(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ *любое и последовательность* $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ *подчинена условию*

$$\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k| < +\infty. \tag{12}$$

Тогда функция $B_\alpha(w, \{w_k\})$ *обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках* $u \in (-\infty, +\infty)$.

Для случая круга установлена вполне аналогичная

Теорема 3. 1°. *Пусть* $\gamma\,(0 < \gamma < 1)$ *и* $\alpha\,(\gamma - 1 \leqslant \alpha < \gamma + 1)$ — *любые числа, а последовательность* $\{z_k\} \subset \mathrm{D}$ $(z_k \neq 0,\ k \geqslant 1)$ *подчинена условию*

$$\sum_k (1 - |z_k|)^\gamma < +\infty. \tag{13}$$

Тогда функция $B_\alpha(z, \{z_k\})$ *обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой* γ*-емкости.*

2°. *Пусть* $\alpha\,(0 < \alpha \leqslant 2)$ *любое и последовательность* $\{z_k\} \subset \mathrm{D}$ $(z_k \neq 0,\ k \geqslant 1)$ *удовлетворяет условию Бляшке*

$$\sum_k (1 - |z_k|) < +\infty. \tag{14}$$

Тогда функция $B_\alpha(z, \{z_k\})$ *обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями почти во всех точках единичной окружности.*

Замечание. Утверждение 1° теоремы 3 в случае, когда $-1<\alpha<0$ и $\gamma=1+\alpha$ было установлено ранее М. М. Джрбашяном и В. С. Захаряном [5, 6]. В случае же когда $0<\alpha<1$ и $\gamma=\alpha$, это утверждение по сути было доказано Д. Т. Багдасаряном и И. В. Оганисяном [7]. В целом же, во всяком случае когда $-1<\alpha\leqslant 1$, утверждения 1° теорем 2 и 3 можно рассматривать как полные обобщения для произведений типа Бляшке в полуплоскости и в круге известного результата Фростмана [4], который по существу совпадает со случаями $\alpha=0$ этих утверждений. Утверждения 2° теорем 2 и 3 являются обобщениями общеизвестного свойства произведения Бляшке, заключающегося в них в качестве случая $\alpha=0$.

В статье установлено также приводимое ниже неравенство, представляющее самостоятельный интерес. А именно, установлено, что если $\alpha_1, \alpha_2\ (-1 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 0)$ любые числа, а последовательность $\{w_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию (11) с $\gamma = 1 + \alpha_1$, то

$$|B_{\alpha_1}(w, \{w_k\})| \leqslant |B_{\alpha_2}(w, \{w_k\})|;\quad w \in G^{(-)}. \tag{15}$$

Отметим, что в случае $\alpha_2=0$ это неравенство было доказано в [10].

3. Приводимые ниже леммы нужны для доказательства теоремы 1.

Лемма 1. *Если* $E_1, E_2 \subset (-\infty, +\infty)$ — *B-множества, такие, что* $C_\gamma(E_1) = C_\gamma(E_2) = 0$ *при некотором* $\gamma\,(0<\gamma<1)$, *то* $C_\gamma(E_1 \cup E_2) = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu \prec E_1 \cup E_2$ есть неотрицательная B-мера, подчиненная условию (4). Тогда, очевидно, взятый по какому-либо из множеств E_1, E_2, скажем по E_1, интеграл (4) будет равняться некоторому числу $M \in (0, 1]$. Тем самым, мера $\mu_1 = M^{-1}\,\mu|_{E_1}$, со-средоточенная на E_1, опять будет удовлетворять условию (4). Однако, поскольку $C_\gamma(E_1)=0$, то

$$\sup_{w\in G^{(-)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{|w-t|^\gamma}\geqslant M\sup_{w\in G^{(-)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{|w-t|^\Gamma}=+\infty.$$

На основе леммы Фату, предельным переходом легко доказывается

Лемма 2. *Пусть γ $(0<\gamma<1)$ любое и $E\subseteq(-\infty,+\infty)$ есть B-множество такое, что $C_\gamma(E)>0$, а $\mu<E$ есть мера из определения 2. Тогда при любом $u\in(-\infty,+\infty)$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{|u-t|^\gamma}\leqslant S_1\equiv\sup_{w\in G(-)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{|w-t|^\gamma}<+\infty. \tag{16}$$

Лемма 3. *Пусть β $(-1<\beta<0)$ любое число, $\sigma(t)$ — монотонно неубывающая функция, подчиненная условию*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{(1+|t|)^{1+\beta}}<+\infty, \tag{17}$$

а $f(w)$ — аналитическая в $G^{(-)}$ функция, определенная по формуле

$$f(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{[i(w-t)]^{1+\beta}}. \tag{18}$$

Тогда множество тех $u\in(-\infty,+\infty)$, для которых не существует конечного углового граничного значения $f(u)$, может иметь лишь нулевую $1+\beta$-емкость.

Доказательство. Из представления (17)—(18) следует, что функция $\exp[-f(w)]$ аналитична и ограничена в $G^{(-)}$. Поэтому, в силу теоремы Линделефа, существование в какой-либо точке $u\in(-\infty,+\infty)$ конечного углового граничного значения $f(u)$ эквивалентно существованию в той же точке конечного предела

$$\lim_{v\to-0}f(u+iv)\ (=f(u)). \tag{19}$$

Тем самым, для доказательства леммы достаточно исследовать лишь вопрос о существовании такого предела, чем мы и займемся ниже.

Очевидно, что при любых $u\in(-\infty,+\infty)$ и v, v_0 $(-\infty<$ $<v_0<v<0)$

$$f(u+iv)=f(u+iv_0)+i\int_{v_0}^{v}f'(u+iy)\,dy. \tag{20}$$

Далее, как легко проверить, при любых $w=u+iv\in G^{(-)}$, $t\in(-\infty,+\infty)$ и $\varkappa>0$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{|w-t|^\varkappa}\leqslant\frac{2^{\varkappa/2}}{(|u-t|+|v|)^\varkappa}<\frac{C_\varkappa(w)}{(1+|t|)^\varkappa}, \tag{21}$$

где $C_2(\omega) > 0$ — постоянная, зависящая лишь от $\varkappa$ и ω. Поэтому, в силу представления (17)—(18)

$$\int_{-\infty}^{v} |f'(u+iy)|\, dy \leqslant (1+\beta)\, 2^{1+\beta/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(t) \int_{|v|}^{+\infty} \frac{dx}{(|u-t|+x)^{2+\beta}} =$$

$$= 2^{1+\beta/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{|u-t|+|v|)^{1+\beta}} \leqslant \sqrt{2}\, C_{1+\beta}(u+iv) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(1+|t|)^{1+\beta}} < +\infty.$$

Тем самым, предельный переход $v_0 \to -\infty$ в (20) приводит к равенству

$$f(u+iv) = f(u-i\infty) + i \int_{-\infty}^{v} f'(u+iy)\, dy \; (-\infty < u < +\infty, v < 0), \qquad (22)$$

где интеграл абсолютно сходится, а $f(u-i\infty)$ — конечный предел.

Обозначим теперь через E_0 множество тех $u \in (-\infty, +\infty)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{0} |f'(u+iv)|\, dv = +\infty,$$

а через E — множество тех $u \in (-\infty, +\infty)$, для которых не существует конечного предела (19). Тогда ввиду (22) очевидно, что $E \subseteq E_0$. Тем самым, если $C_{1+\beta}(E_0) = 0$, то и $C_{1+\beta}(E) = 0$. Действительно, если бы имели $C_{1+\beta}(E) > 0$, то существовала бы неотрицательная B-мера $\mu < E$, такая, что были бы верны соотношения (4)—(5) с $\gamma = 1+\beta$. Но $E \subseteq E_0$, следовательно $\mu < E$, и по определению 2 имели бы $C_{1+\beta}(E_0) > 0$.

Итак, для доказательства леммы достаточно показать, что $C_{1+\beta}(E_0) = 0$. Будем исходить из противного—предположения $C_{1+\beta}(E_0) > 0$. Если это так, то должна существовать неотрицательная B-мера $\mu_0 < E_0$, удовлетворяющая условиям (4)—(5). В силу (4) можно зафиксировать достаточно большое $A > 0$, так, чтобы

$$\int_{-A}^{A} d\mu_0(t) = \int_{[-A,A]\cap E_0} d\mu_0(t) > 0.$$

Тогда

$$\int_{-A}^{A} d\mu_0(u) \int_{-\infty}^{0} |f'(u+iv)|\, dv = +\infty. \qquad (23)$$

Если $|u| > 2A$ и $|t| < A$, то, как нетрудно проверить,

$$\frac{1}{|u-t|} < \frac{C_1(A)}{(1+|u|)(1+|t|)}, \quad C_1(A) = (1+A^{-1})(1+2A).$$

Поэтому при $|u| > 2A$ имеем

$$\int_{-A}^{A} \frac{d\mu_0(t)}{|u-t|^{1+\beta}} \leqslant \frac{C_1^{1+\beta}(A)}{(1+|u|)^{1+\beta}} \int_{-A}^{A} \frac{d\mu_0(t)}{(1+|t|)^{1+\beta}} < \frac{(1+A^{-1})^{1+\beta}(1+2A)}{(1+|u|)^{1+\beta}}.$$

С другой стороны, если $|u| < 2A$, то по оценке (16) леммы 2

$$\int_{-A}^{A} \frac{d\mu_0(t)}{|u-t|^{1+\beta}} \leqslant S_1 \leqslant \frac{S_1(1+2A)^{1+\beta}}{(1+|u|)^{1+\beta}}.$$

Тем самым, при любом $u \in (-\infty, +\infty)$, во всяком случае

$$\int_{-A}^{A} \frac{d\mu_0(t)}{|u-t|^{1+\beta}} < \frac{[(1+A^{-1})^{1+\beta} + S_1](1+2A)^{1+\beta}}{(1+|u|)^{1+\beta}} = \frac{C_2(A)}{(1+|u|)^{1+\beta}}. \qquad (42)$$

Теперь заметим, что при любом $u \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{0} |f'(u+iv)|\, dv \leqslant 2^{1+\beta/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{|u-t|^{1+\beta}},$$

независимо от того, конечны или нет эти интегралы. Поэтому с применением оценки (24) получаем

$$\int_{-A}^{A} d\mu_0(u) \int_{-\infty}^{0} |f'(u+iv)|\, dv < 2^{1+\beta/2} C_2(A) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{(1+|t|)^{1+\beta}} < +\infty,$$

что противоречит (23).

4. Для доказательства теоремы 1 необходима также

Лемма 4. *Пусть $\beta\,(-1 < \beta < 0)$ любое число и последовательность $\{w_k\} \equiv \{u_k + iv_k\} \subset G^{(-)}$ подчинена условию*

$$\sum |v_k|^{1+\beta} < +\infty. \qquad (25)$$

Тогда функция $B_\beta(w, \{w_k\})$ обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой $1+\beta$-емкости.

Доказательство. Как было установлено в работе [10], имеет место представление вида $B_\beta = B_0 \exp\{-f\}$, где f—функция вида (17)—(18). Экспоненциальный множитель этого представления обладает требуемым граничным свойством в силу леммы 3. Поэтому для доказательства нужного утверждения достаточно показать, что фнкция B_0 имеет ненулевые, конечные угловые граничные значения во всех точках $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой $1+\beta$-емкости, а затем воспользоваться леммой 1. С этой целью заметим, что произведение B_0 отличается от общепринятого произведения Бляшке для полуплоскости лишь постоянным множителем. Поэтому, в силу результата Фростмана [4], после конформного отображения круга на полуплоскость, можем утверждать лишь, что

$$\sup_{w\in G^{(-)}}\left\{(1+|w|)^{1+\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{|w-t|^{1+\beta}}\right\}=+\infty \tag{26}$$

для любой неотрицательной B-меры μ, подчиненной условию (4) с $\gamma=1+\beta$ и сосредоточенной на множестве тех $u\in(-\infty,+\infty)$, для которых не существует конечного углового граничного значения $B_0(u)\neq 0$. Выбрав $A>0$ настолько большим, чтобы интеграл (4) (с $\gamma=1+\beta$), взятый по отрезку $[-A, A]$ равнялся числу $M>0$, будем рассматривать меру $M_\mu^{-1}|_{[-A,A]}\equiv\mu^*<E$. Ясно, что она будет удовлетворять условию (4) с $\gamma=1+\beta$. С другой стороны, для μ^* очевидно справедливо соотношение (26).

Заметим теперь, что при $|w|\geqslant 2A$ и $|t|\leqslant A$

$$\frac{1}{|w-t|^{1+\beta}}\leqslant\frac{(2^{1+\beta}+A^{-1-\beta})(1+A)^{1+\beta}}{(1+|w|)^{1+\beta}(1+|t|)^{1+\beta}}.$$

Поэтому

$$+\infty=M\sup_{w\in G^{(-)}}\left\{(1+|w|)^{1+\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu^*(t)}{|w-t|^{1+\beta}}\right\}=$$

$$=\sup_{w\in G^{(-)}}\left\{(1+|w|)^{1+\beta}\int_{-A}^{A}\frac{d\mu(t)}{|w-t|^{1+\beta}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant(2^{1+\alpha}+A^{-1-\beta})(1+A)^{1+\beta}+(1+2A)^{1+\beta}\sup_{|w|<2A}\int_{-A}^{A}\frac{d\mu(t)}{|w-t|^{1+\beta}}.$$

Тем самым $C_{1+\beta}(E)=0$ в смысле определения 2, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 теперь очевидно. В силу лемм 3 и 4 как экспоненциальный фактор, так и произведения типа Бляшке представления (1) функции $F\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<0)$ обладают ненулевым конечными угловыми граничными значениями вне множеств нулевой $1+\alpha$-емкости. Поэтому по лемме 1 таковой является и функция F.

5. Приступим к установлению лемм, необходимых для доказательства теоремы 2.

Лемма 5. 1° *Если* $\alpha(-1<\alpha+\infty)$ *любое и последовательность* $\{w_k\}\equiv\{u_k+iv_k\}\subset G^{(-)}$ *подчинена условию* (25) *с* $\beta=\alpha$, *то справедливо представление*

$$B_\alpha(w,\{w_k\})=G_\alpha(w,\{w_k\})\,H_\alpha(w,\{w_k\}), \tag{27}$$

где

$$G_\alpha(w,\{w_k\})\equiv\prod_k g_\alpha(w,w_k)\equiv\prod_k\exp\left\{-\int_0^{|v_k|}\frac{(|v_k|-t)^\alpha\,dt}{[i(w-u_k)-t]^{1+\alpha}}\right\}, \tag{28}$$

$$H_\alpha(w,\{w_k\})\equiv\prod_k h_k(w,w_k)\equiv\prod_k\exp\left\{-\int_0^{|v_k|}\frac{(|v_k|-t)^\alpha\,dt)}{[i(w-u_k)+t]^{1+\alpha}}\right\}. \tag{28'}$$

— *аналитические в* $G^{(-)}$ *функции, причем* $H_\alpha(w, \{w_k\}) \neq 0$, $w \in G^{(-)}$.

2°. *Если* $-1 < \beta < 0$ *и* $\beta \leqslant \alpha < 1 + \beta$, *а последовательность* $\{w_k\} \equiv \{u_k + iv_k\} \subset G^{(-)}$ *подчинена условию* (25), *то функции* $B_\alpha(w, \{w_k\})$, $G_\alpha(w, \{w_k\})$ *и* $H_\alpha(w, \{w_k\})$ *принадлежат классу* $N_\beta\{G^{(-)}\}$.

Доказательство. 1°. В абсолютной и равномерной сходимости произведений (27), (28), (28′) внутри $G^{(-)}$ легко убедиться. Поэтому справедливость представления (27) вытекает из (2)—(3). Остается заметить, что интеграл в экспоненте представления каждого из факторов произведения H_α есть аналитическая в $G^{(-)}$ функция.

2°. Полагая, что $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$ произвольная точка, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\delta-1}\, d\sigma}{(iw + \sigma)^\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda - \delta)}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{(iw)^{\lambda-\delta}} \quad (0 < \delta < \lambda < +\infty). \tag{29}$$

Тогда, ввиду принятого в работах автора определения оператора дробного дифференцирования Вейля при $\beta < 0$

$$W^{-\beta} \log g_\alpha(w, \zeta) \equiv \frac{i}{\Gamma(1+\beta)} \int_0^{+\infty} \sigma^\beta [\log g_\alpha(w - i\sigma, \zeta)]'\, d\sigma =$$

$$= -\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha\, dt}{[i(w-\xi) - t]^{1+\alpha-\beta}},$$

и аналогично

$$W^{-\beta} \log h_\alpha(w, \zeta) = -\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta| - t)^\alpha\, dt}{[i(w-\xi) + t]^{1+\alpha-\beta}}.$$

Поэтому, те же самые представления справедливы и при $\beta = 0$, ибо W^0 по определению тождественный оператор.

Пусть сначала $\alpha = \beta$. Тогда, очевидно

$$\sup_{v<0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log| H_\alpha(u + iv, \{w_k\})|| \, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_k \sup_{v<0} \int_0^{|v_k|} (|v_k| - t)^\alpha\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-v)\, dt}{(u-u_k)^2 + (t-v)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_k |v_k|^{1+\alpha} < +\infty.$$

Легко удостовериться также в остальных условиях принадлежности функции H_α классу N_α^m типа В. И. Крылова, исследованного в работе [1]. Однако, из теоремы 4.2 той же работы следует, что $\mathrm{N}_\alpha^m \subset N_\alpha\{G^{(-)}\}$, и поскольку $B_\alpha \in N_\alpha\{G^{(-)}\}$, то одновременно $G_\alpha \in N_\alpha\{G^{(-)}\}$.

Пусть теперь $\beta < \alpha < 1+\beta$. Тогда, в силу оценки (21), при любом $v < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\beta} \log g_n(u+iv, \zeta)| \, du \leqslant$$

$$< \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1+\alpha)} 2^{(3+\alpha-\beta)/2} \int_0^{|\eta|} (|\eta|-t)^\alpha \, dt \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+||v|-t|)^{1+\alpha-\beta}} =$$

$$= C_{\alpha,\beta} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta|-t)^\alpha}{||v|-t|^{\alpha-\beta}} \, dt \equiv C_{\alpha,\beta} I,$$

и аналогично

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\beta} \log h_n(u+iv, \zeta)| \, du \leqslant C_{\alpha,\beta} \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta|-t)^\alpha}{(|v|+t)^{\alpha-\beta}} \, dt <$$

$$< C_{\alpha,\beta} |\eta|^{1+\beta} \int_0^1 (1-x)^\alpha x^{\beta-\alpha} \, dx \equiv C'_{\alpha,\beta} |\eta|^{1+\beta}.$$

Поэтому

$$\sup_{v<0} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\beta} \log H_\alpha(u+iv, \{w_k\})| \, du \leqslant C'_{\alpha,\beta} \sum_k |v_k|^{1+\beta} < +\infty,$$

и, как нетрудно проверить, $H_\alpha \in \mathrm{N}_\beta^{\infty} \subset N_\beta\{G^{(-)}\}$.

Оценим теперь интеграл I, участвующий в оценке для g_α. Для этого сначала предположим, что $|v| \geqslant |\eta|$. Тогда

$$I = \int_0^{|\eta|} \frac{(|\eta|-t)^\alpha}{(|v|-t)^{\alpha-\beta}} \, dt < \int_0^{|\eta|} (|\eta|-t)^\beta \, dt = \frac{|\eta|^{1+\beta}}{1+\beta}.$$

Если же $|v| < |\zeta|$ и $\alpha \leqslant 0$, то

$$I < \int_0^{|v|} (|v|-t)^\beta \, dt + \int_{|v|}^{(|v|+|\eta|)/2} (t-|v|)^\beta \, dt + \int_{(|v|+|\eta|)/2}^{|\eta|} (|\eta|-t)^\beta \, dt =$$

$$= \frac{1}{1+\beta} \left[|v|^{1+\beta} + 2\left(\frac{|\eta|-|v|}{2}\right)^{1+\beta} \right] < \frac{3}{1+\beta} |\eta|^{1+\beta}.$$

Пусть теперь $|v| < |\eta|$ и $\alpha > 0$. Тогда интегрированием по частям получаем, что

$$I = \frac{1}{1+\beta-\alpha} \left\{ -\int_0^{|v|} (|\eta|-t)^\alpha \, d(|v|-t)^{1+\beta-\alpha} + \int_{|v|}^{|\eta|} (|\eta|-t)^\alpha \, d(t-|v|)^{1+\beta-\alpha} \right\} <$$

$$< \frac{1}{1+\beta-\alpha} \left[|\eta|^{1+\beta} + \alpha \int_{|v|}^{(|v|+|\eta|)/2} (|\eta|-t)^\beta \, dt + \right.$$

$$+\alpha(|\eta|-|v|)^{1+\beta-\alpha}\int\limits_{(|v|+|\eta|)/2}^{|\eta|}(|\xi-t)^{\alpha}dt\Bigg|<\frac{3+\beta}{(1+\beta)(1+\beta-\alpha)}|\eta|)^{1+\beta}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\sup_{v<0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|v|^{-\beta}\log G_{\alpha}(u+iv,\{w_k\})|\,du<+\infty,$$

и, тем самым, как легко видеть, $G_{\alpha}\in N_{\beta}^{m}\subset N_{\beta}\{G^{(-)}\}$. Остается заметить, что $G_{\alpha}\in N_{\beta}\{G^{(-)}\}$ и $H_{\alpha}\in N_{\beta}\{G^{(-)}\}$ обеспечивают включение $B_{\alpha}\in N_{\beta}\{G^{(-)}\}$.

Лемма 6. *Если $0<\alpha<+\infty$ и последовательность $\{w_k\}\equiv\equiv\{u_k+iv_k\}\subset G^{(-)}$ подчинена условию*

$$\sum_k|v_k|^{\alpha}<+\infty,$$

то справедливо представление

$$B_{\alpha}(w,\{w_k\})=B_{\alpha-1}(w,\{w_k\})[H_{\alpha-1}(w,\{w_k\}]^{-2},\tag{30}$$

где H_{α} — аналитическая в $G^{(-)}$ функция вида (28′), ограниченная при $0<\alpha<1$. Если же $1<\alpha<+\infty$ и последовательность $\{w_{\alpha}\}$ подчинена условию

$$\sum_k|v_k|^{\alpha-1}<+\infty,$$

то справедливо представление

$$B_{\alpha}(w,\{w_k\})=B_{\alpha-1}(w,\{w_k\})[H_{\alpha-2}(w,\{w_k\})]^{2}[R_{\alpha-1}(w,\{w_k\})]^{2},\tag{31}$$

где $R_{\alpha-1}$ аналитическая в $G^{(-)}$ функция, при $1<\alpha\leqslant 2$ ограниченная.

Доказательство легко следует из формул (27), (28), (28′) последовательным интегрированием по частям. При этом ясно, что $|H_{\alpha-1}|<1$ в $G^{(-)}$, если $0<\alpha\leqslant 1$. Кроме того, получаем, что

$$R_{\alpha-1}(w,\{w_k\})=\exp\left\{-\frac{1}{1+\alpha}\sum_k\frac{|v_k|^{\alpha-1}}{[i(w-u_k)]^{\alpha-1}}\right\},$$

откуда следует, что $|R_{\alpha-1}|\leqslant 1$ в $G^{(-)}$ при $1<\alpha\leqslant 2$.

6. Доказательство теоремы 2. 1°. Пусть выполнено условие (11) с каким-либо γ $(0<\gamma<1)$. Рассмотрим сначала случай, когда $\gamma-1\leqslant\alpha<\gamma$. В этом случае при обозначении $\beta=\gamma-1$ будем иметь $-1<\beta<0$ и $\beta\leqslant\alpha<\beta+1$. Поэтому, в силу леммы 5, $B_{\alpha}\in N_{\beta}\{G^{(-)}\}=N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$, и необходимое утверждение следует из теоремы 1. Пусть теперь $\gamma\leqslant\alpha<\gamma+1$. Тогда справедливо представление (30) леммы 6, причем $\gamma-1\leqslant\alpha-1<\gamma$. Поэтому, по лемме 5, $B_{\alpha-1}$, $H_{\alpha-1}\in N_{\gamma-1}\{G^{(-)}\}$. Тем самым, тому же классу принадлежит функция B_{α}, и нужное утверждение опять следует из теоремы 1.

Рассмотрим наконец, случай $\alpha=\gamma+1$. В этом случае в силу формул (30), (31), леммы 6

$$B_\alpha \equiv B_{\gamma+1} = B_\gamma [H_\gamma]^{-2}, \quad H_\gamma = [H_{\gamma-1} R_{\gamma-1}]^{-1}. \tag{32}$$

Здесь, по уже доказанному, ненулевые конечные угловые граничные значения B_γ существуют для всех $u \in (-\infty, +\infty)$, кроме, быть может, множества нулевой γ-емкости. Далее, в силу леммы 5 имеем, что $H_{\gamma-1} \in N_{\gamma-1} [G_{(-)}]$. Поэтому, в силу теоремы 1, множество тех $u \in (-\infty, +\infty)$, в которых функция $H_{\gamma-1}$ не имеет ненулевых конечных угловых граничных значений, также имеет нулевую γ-емкость. Тем самым, если удастся показать, что предел

$$\lim_{v \to 0} H_\gamma (u + iv, \{w_k\}) \neq 0 \tag{33}$$

также существует вне множества нулевой γ-емкости, то, в силу теоремы Линделёфа, вне такого же множества будут существовать ненулевые, конечные, угловые граничные значения $R_{\gamma-1}$. В силу леммы 1 тем же граничным свойством будет обладать функция H_γ, и, вернувшись к первому равенству (32), причем к нужному утверждению для функции $B_{\gamma+1}$.

Итак, для завершения доказательства утверждения 1° теоремы достаточно лишь показать, что конечный предел (33) существует вне множества нулевой γ-емкости. Доказательство этого факта вполне аналогично доказательству леммы 3. Разница заключается лишь в следующих оценках:

$$|[\log H_\gamma(u + iv, \{w_k\})]'| \leqslant (\gamma+1) \sum_k \left| \int_0^{|v_k|} \frac{(|v_k| - t)^\gamma \, dt}{[i(w - u_k) + t]^{2+\gamma}} \right| =$$

$$= \sum_k \frac{|v_k|^{\gamma+1}}{[i(u - u_k) + (|v| + |v_k|)| \cdot |i(u - u_k) + |v||^{\gamma+1}} <$$

$$< 2^{(1+\gamma)/2} \sum_k \frac{|v_k|^\gamma}{(|u - u_k| + |v|)^{\gamma+1}},$$

$$\int_{-A}^{A} d\mu_0(u) \int_{-\infty}^{0} |[\log H_\gamma (u + iv, \{w_k\})]'| \, dv <$$

$$< 2^{(1+\gamma)/2} \gamma^{-1} \sum_k |v_k|^\gamma \int_{-A}^{A} \frac{d\mu_0(u)}{|u - u_k|^\gamma} \leqslant 2^{(1+\gamma)/2} \gamma^{-1} S_1 \sum_k |v_k|^\gamma < +\infty.$$

2°. Пусть выполнено условие (12). Тогда второе утверждение теоремы при $\alpha=0$ общеизвестно. В случае, когда $0 < \alpha \leqslant 1$ из представления (30) следует, что E_α —функция ограниченного вида в $G^{(-)}$, и, тем самым, утверждение теоремы верно. Если же $1 \leqslant \alpha < 2$, то воспользуемся представлением (31). Здесь функции $H_{\alpha-2}$ и $R_{\alpha-1}$ аналитичны и ограничены в $G^{(-)}$. Функция же $B_{\alpha-1}$ ограниченного вида в $G^{(-)}$ в силу уже доказанного. Поэтому функция B_α опять оказывается ограниченного вида в $G^{(-)}$ и нужное утверждение справедливо.

Итак, теорема 2 доказана. Для произведений типа Бляшке в полуплоскости остается только доказать неравенство (15). С этой целью воспользуемся опять формулой (29). Тогда, ввиду (3) получим, что при любых $\alpha_1, \alpha_2 \ (-1 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 0)$, $w \in G^{(-)}$ и $\zeta = \xi + i\eta \in G^{(-)}$

$$\varphi(w) \equiv W^{-\alpha_2} \log \left| \frac{b_{\alpha_2}(w+\xi, \zeta)}{b_{\alpha_1}(w+\xi, \zeta)} \right| =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(1+\alpha_1)} \operatorname{Re} \int_0^{|\eta|} (|\eta|-t)^{\alpha_1} \left[\frac{1}{(iw-t)^{1+\alpha_1-\alpha_2}} + \frac{1}{(iw+t)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} \right] dt -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2)} \operatorname{Re} \int_0^{|\eta|} (|\eta|-t)^{\alpha_2} \left[\frac{1}{iw-t} + \frac{1}{iw+t} \right] dt.$$

Отсюда следует, что φ—гармоническая в $G^{(-)}$ функция, непрерывная вплоть до вещественной оси. Однако, вычислением можно убедиться в том, что при $w = u \in (-\infty, +\infty)$ подынтегральная функция одного из интегралов представления φ положительна, а другого—равняется нулю. Тем самым, $\varphi(u) > 0 \ (-\infty < u < +\infty)$. Далее $\varphi(w) > 0 \ (w \in G^{(-)})$ в силу принципа Фрагмена-Линделёфа и, с применением теоремы 4 работы [8] приходим к представлению

$$B_{\alpha_1}(w, \{w_k\}) = B_{\alpha_2}(w, \{w_k\}) \exp\left\{ -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha_2}} \right\}; \ w \in G^{(-)},$$

где $\sigma(t)$—монотонно неубывающая функция, подчиненная условию (17) с $\beta = \alpha_2$. Из этого представления непосредственно следует неравенство (15).

7. Ступая на путь установления теоремы 3, сначала же отметим отсутствие приемлемого аналога формулы (29) в задаче для круга. Это приводит к определенным затруднениям, из-за которых, например, не ясно какой подход может привести к доказательству аналога неравенства (15) для произведений типа Бляшке—М. М. Джрбашяна. В достаточной для поставленных целей мере формулу (29) заменяет

Лемма 7. *При любых* $\alpha, \beta \ (-1 < \beta < +\infty, \ \beta - 1 < \alpha < +\infty)$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^\beta \, dt}{(1-tz)^{2+\alpha}} = \frac{J_{\alpha,\beta}(z)}{(1-z)^{1+\alpha-\beta}},$$

причем, каково бы ни было $R_0 \ (1 < R_0 < +\infty)$,

$$M_{\alpha,\beta}(R_0) = \sup_{|z| < R_0} |J_{\alpha,\beta}(z)| < +\infty.$$

Доказательство. Замена переменной $t = 1-(1-z)x/z$ приводит к нужному представлению, где

$$J_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{z^{1+\beta}} \int_0^{z/(1-z)} \frac{x^\beta \, dx}{(1+x)^{2+\alpha}}$$

— аналитическая функция в плоскости z с разрезом $1 < z < +\infty$ ($\operatorname{Im} z = 0$). При этом, тут допустима известная произвольность в выборе контура интегрирования. Заметим, что $|z/(1-z)+1| = 1/|1-z| > (1+R_0)^{-1} > 0$. Так что в любом случае возможен выбор контура интегрирования, удаленного от точки -1 не менее чем на $(1+R_0)^{-1}$. Выберем же контур интегрирования следующим образом. Если точка $w = z/(1-z)$ лежит вне области $\Delta_{R_0} = \{w : |\arg w| > \pi - \arcsin(1+R_0)^{-1}, \operatorname{Re} w < -1 + (1+R_0)^2\}$, то в качестве контура интегрирования берем прямолинейный отрезок $[0, w]$. Если $w \in \Delta_{R_0}$ и $|w| \leqslant 2$, то прямолинейный отрезок $[0, |w| e^{i\varphi(w)}]$, где $\varphi(w) = [\pi - \arcsin(1+R_0)^{-1}] \times \operatorname{sign}(\arg w)$ и дугу $[|w| e^{i\varphi(w)}, w]$ окружности радиуса $|w|$. Далее, если $w \in \Delta_{R_0}$ и $|w| > 2$, то прямолинейный отрезок $[0, 2e^{i\varphi(w)}]$, дугу $[2e^{i\varphi(w)}, 2e^{i\arg w}]$ окружности радиуса 2 и прямолинейный отрезок $[2e^{i\arg w}, w]$.

Пусть $|z| \leqslant 1/3$. Тогда очевидно $w \overline{\in} \Delta_{R_0}$ и $|w| = |z/(1-z)| \leqslant 3|z|/2$. Поэтому

$$\sup_{|z|<1/3} |J_{\alpha,\beta}(z)| < \frac{(1+R_0)^{2+\alpha}}{|z|^{1+\beta}} \int_0^{3|z|/2} x^\beta\, dx = \frac{(1+R_0)^{2+\alpha}}{1+\beta}\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\beta} < +\infty. \tag{34}$$

Далее предположим, что $1/3 < |z| < R_0$, $w \overline{\in} \Delta_{R_0}$, $|w| < 2$. Тогда

$$|J_{\alpha,\beta}(z)| \leqslant 3^{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha} \int_0^2 x^\beta\, dx = \frac{6^{1+\beta}}{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha}.$$

Если же $1/3 < |z| < R_0$, $w \overline{\in} \Delta_{R_0}$, но $|w| > 2$, то ясно, что

$$|J_{\alpha,\beta}(z)| < 3^{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha} \int_0^2 x^\beta\, dx + 3^{1+\beta} \int_2^{+\infty} \frac{x^\beta\, dx}{(x-1)^{2+\alpha}} < +\infty.$$

Таким образом, если $z/(1-z)$ остается вне области Δ_{R_0}, то

$$\sup_{1/3<|z|<R_0} |J_{\alpha,\beta}(z)| < +\infty. \tag{34'}$$

Пусть теперь $1/3 < |z| < R_0$, $w \in \Delta_{R_0}$, $|w| \leqslant 2$. Тогда, очевидно,

$$|J_{\alpha,\beta}(z)| < \frac{6^{1+\beta}}{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha} + 3^{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha}\left| i|w|^{1+\beta} \int_{\varphi(w)}^{\arg w} e^{i(2+\beta)\theta}\, d\theta \right| <$$

$$< 6^{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha}\,[(1+\beta)^{-1} + \pi] < +\infty.$$

Далее, если $1/3 < |z| < R_0$, $w \in \Delta_{R_0}$, но $|w| > 2$, то

$$|J_{\alpha,\beta}(z)| < 6^{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha}\left[\frac{1}{1+\beta} + \pi\right] + 3\left| \int_{2e^{i\arg w}}^{w} \frac{x^\beta\, dx}{(1+x)^{2+\alpha}} \right| <$$

$$< 6^{1+\beta}(1+R_0)^{2+\alpha}\left[\frac{1}{1+\beta} + \pi\right] + 3^{1+\beta} \int_2^{+\infty} \frac{x^\beta\, dx}{(x-1)^{2+\alpha}} < +\infty.$$

Таким образом, соотношение (34) верно и в том случае когда точка $w=z/(1-z)$ остается внутри области Δ_{β}, что вместе с (34) завершает доказательство леммы.

8. Для доказательства теоремы 3 будут необходимы также устанавливаемые ниже аналоги лемм 5 и 6.

Лемма 8. 1°. *Если α $(-1<\alpha<+\infty)$ любое и последовательность $\{z_k\}\subset D$ $(z_k\neq 0,\ k\geqslant 1)$ подчинена условию (6), то справедливо представление*

$$B_\alpha(z,\{z_k\})=C_\alpha G_\alpha(z,\{z_k\})\,H_\alpha(z,\{z_k\}),\tag{35}$$

где C_α — постоянная, зависящая от последовательности $\{z_k\}$, а

$$G_\alpha(z,\{z_k\})\equiv\prod_k g_k(z,z_k)\equiv\prod_k\exp\left\{-\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{zx}{z_k}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\},\tag{36}$$

$$H_\alpha(z,\{z_k\})\equiv\prod_k h_k(z,z_k)\equiv\prod_k\exp\left\{-\int_{|z_k|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{z\bar z_k}{x}\right)^{1+\alpha}}\frac{dx}{x}\right\}\tag{36'}$$

— аналитические в D функции, причем $H_\alpha(z,\{z_k\})\neq 0$, $z\in D$.

2°. *Если $-1<\beta\leqslant 0$ и $\beta\leqslant\alpha<1+\beta$, а последовательность $\{z_k\}\subset D$ $(z_k\neq 0,\ k\geqslant 1)$ подчинена условию (13) с $\gamma=1+\beta$, то функции $B_\alpha(z,\{z_k\})$, $G_\alpha^0(z,\{z_k\})$ и $H_\alpha(z,\{z_k\})$ принадлежат классу N_β М. М. Джрбашяна.*

Доказательство. 1°. В абсолютной и равномерной сходимости произведений (36), (36') внутри D легко убедиться. Поэтому справедливость представления (35) непосредственно вытекает из (7)—(8). Остается заметить, что интеграл в экспоненте представления каждого из факторов произведения H_α есть аналитическая в D функция.

2°. Заметим сначала, что при принятых условиях существует число ρ_0 $(0<\rho_0<1)$, такое, что $|z_k|\geqslant\rho_0$ $(k\geqslant 1)$. Далее, полагая, что $\zeta=\rho e^{i\varphi}$ $(\rho_0\leqslant\rho<1)$, $z=re^{i\theta}$ $(0<r<1)$, воспользуемся формулой (1.22), стр. 573 [3]. Тогда при любых β $(-1<\beta\leqslant 0)$ и α $(-1<\alpha<+\infty)$ получим

$$r^{-\beta}D^{-\beta}\log g_k(z,\zeta)=r^{-\beta}D^{-(1+\beta)}\frac{d}{dr}\log g_k(z,\zeta)+\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\log g_k(0,\zeta)=$$

$$=-\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)}\frac{r}{\rho}e^{i(\varphi-\theta)}\int_\rho^1(1-x)^\alpha\,dx\int_0^1\frac{(1-t)^\beta\,dt}{\left(1-\frac{rx}{\rho}te^{i(\varphi-\theta)}\right)^{2+\alpha}}-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_\rho^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,$$

и аналогично

$$r^{-\beta}D^{-\beta}\log h_\alpha(z,\zeta)=-\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int\limits_\rho^1\frac{(1+x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)}\,r\rho e^{i(\varphi-\theta)}\int\limits_\rho^1\frac{(1-x)^\alpha}{x^2}\,dx\int\limits_0^1\frac{(1-t)^\beta\,dt}{\left(1-\frac{r\rho}{x}\,te^{i(\varphi-\theta)}\right)^{2+\alpha}}.$$

Пусть сначала $\alpha=\beta$. Тогда, как легко проверить

$$|r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|h_\alpha(re^{i\theta},\rho e^{i\varphi})||<\frac{1+2\alpha}{\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_\rho^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_\rho^1\frac{1-\left(\frac{r\rho}{x}\right)^2}{\left|1-\frac{r\rho}{x}e^{i(\theta-\varphi)}\right|^2}\,\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx.$$

Поэтому получаем, что при любом $r\ (0<r<1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|H_\alpha(re^{i\theta},\{z_k\})||\,d\theta\leqslant\frac{4}{\rho_0\Gamma(2+\alpha)}\sum_k(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty,$$

откуда следует включение $H_\alpha\in N_\alpha$. Ввиду того, что $B_\alpha\in N_\alpha$, отсюда следует также включение $G_\alpha\in N_\alpha$ [3, гл. IX].

Пусть теперь $\beta<\alpha<1+\beta$. Тогда, очевидно

$$|r^{-\beta}D^{-\beta}\log h_\alpha(re^{i\theta},\rho e^{i\varphi})|\leqslant\frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+$$

$$+\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)}\int\limits_\rho^1(1-x)^\alpha\,dx\int\limits_0^1\frac{(1-t)^\beta\,dt}{|x-tr\rho e^{i(\theta-\varphi)}|^{2+\alpha}},$$

и, в силу леммы 7,

$$|r^{-\beta}D^{-\beta}\log g_\alpha(re^{i\theta},\rho e^{i\varphi})|\leqslant\frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+$$

$$+\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\beta)}M_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\int\limits_\rho^1\frac{(1-x)^\alpha\,dx}{|\rho-rxe^{i(\theta-\varphi)}|^{1+\alpha-\beta}}.\tag{37}$$

Заметим, что если $\theta-\varphi=\lambda$, $|\lambda|<\pi$, то $|x-r\rho te^{i\lambda}|^2=(x-r\rho t)^2+$ $+4xr\rho t\sin^2(\lambda/2)\geqslant(x-r\rho t)^2+4xr\rho t\lambda^2/\pi^2$. Поэтому, очевидно,

$$|x-r\rho te^{i\lambda}|^{-(2+\alpha)}\leqslant2^{1+\alpha/2}\left[x-r\rho t+2\sqrt{xr\rho t}\,|\lambda|/\pi\right]^{-(2+\alpha)}.$$

Тем самым

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|r^{-\beta}D^{-\beta}\log h_\alpha(re^{i\theta},\rho e^{i\varphi})|\,d\theta\leqslant\frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+$$

$$+\frac{2^{2+\alpha/2}(1+\alpha)}{\pi\Gamma(1+\beta)}\int\limits_{\rho}^{1}(1-x)^{\alpha}dx\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{\beta}dt\int\limits_{0}^{\pi}\frac{d\lambda}{\left(x-rpt+\frac{2}{\pi}\sqrt{xr\rho t}\,\lambda\right)^{2+\alpha}}<$$

$$<\frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+\frac{2^{2+\alpha/2}}{\pi\Gamma(1+\beta)}\int\limits_{\rho}^{1}(1-x)^{\alpha}dx\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^{\beta}\,dt}{(x-\rho t)^{1+\alpha}}.$$

Однако, после замены переменной $t=1-(x/\rho-1)\tau$ получаем

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^{\beta}\,dt}{(x-\rho t)^{1+\alpha}}<\frac{\rho_0^{-(1+\beta)}}{(x-\rho)^{\alpha-\beta}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\tau^{\beta}\,d\tau}{(1+\tau)^{1+\alpha}}=\frac{C_1}{(x-\rho)^{\alpha-\beta}}.$$

Следовательно, с новой заменой переменной $x=1-(1-\rho)y$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|r^{-\beta}D^{-\beta}\log h_{\alpha}(re^{i\theta},\ \rho e^{i\varphi})|d\theta<\frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+$$

$$+\frac{2^{2+\alpha/2}C_1}{\pi\Gamma(1+\beta)}\int\limits_{0}^{1}\frac{y^{\alpha}\,dy}{(1-y)^{\alpha-\beta}}(1-\rho)^{1+\beta}.$$

Отсюда следует, что при любом r $(0\leqslant r<1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|r^{-\beta}D^{-\beta}\log H_{\alpha}(re^{i\theta},\ \{z_k\})|\,d\theta<\left[\frac{1}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^{2+\alpha/2}C_1}{\pi\Gamma(1+\beta)}\int\limits_{0}^{1}\frac{y^{\alpha}\,dy}{(1-y)^{\alpha-\beta}}\right]\sum_{k}(1-|z_k|)^{1+\beta}<+\infty,$$

и, тем самым, $H_{\alpha}(z,\ \{z_k\})\in N_{\beta}$. Для доказательства принадлежности функции $G_{\alpha}(z,\ \{z_k\})$ тому же классу заметим, что в силу (37), с повторением предыдущих рассуждений получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|r^{-\beta}D^{-\beta}\log g_{\alpha}(re^{i\theta},\ \rho e^{i\varphi})|\,d\theta<\frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}+$$

$$+\frac{1+\alpha}{\pi\Gamma(1+\beta)}M_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)2^{2+\alpha/2}\int\limits_{\rho}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{|\rho-rx|^{\alpha-\beta}}. \tag{38}$$

Для оценки интеграла

$$I_{\alpha,\beta}=\int\limits_{\rho}^{1}\frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{|\rho-rx|^{\alpha-\beta}} \tag{39}$$

сначала предположим, что $r\leqslant\rho$. В этом случае

$$I_{\alpha,\beta} \leqslant \int\limits_{\rho}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{(\rho - rx)^{\alpha-\beta}} \leqslant \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0^{\alpha-\beta}(1+\beta)}\ (0 \leqslant r < \rho). \tag{40}$$

Пусть теперь $\rho < r < 1$ и $\alpha < 0$. Тогда разложим

$$I_{\alpha,\beta} = \int\limits_{\rho}^{\rho/r} \frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{(\rho - rx)^{\alpha-\beta}} + \int\limits_{\rho/r}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{(rx-\rho)^{\alpha-\beta}} \equiv I_1 + I_2.$$

Здесь, как легко видеть,

$$I_1 = \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int\limits_{\rho}^{\rho/r} \frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{(\rho/r - x)^{\alpha-\beta}} < \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int\limits_{\rho}^{\rho/r} \left(x - \frac{\rho}{r}\right)^{\beta} dx < \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0^{\alpha-\beta}(1+\beta)},$$

$$I_2 < \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int\limits_{\rho/r}^{(1+\rho/r)/2} \left(x - \frac{\rho}{r}\right)^{\beta} dx + \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \int\limits_{(1+\rho/r)/2}^{1} (1-x)^{\beta} dx =$$

$$= \frac{2^{-\beta}(r-\rho)^{1+\beta}}{r^{1+\alpha}(1+\beta)} < \frac{2(1-\rho)^{1+\beta}}{\rho_0^{1+\alpha}(1+\beta)}.$$

Поэтому

$$I_{\alpha,\beta} \leqslant \left[\frac{1}{\rho_0^{\alpha-\beta}} + \frac{2}{\rho_0^{1+\alpha}}\right] \frac{(1-\rho)^{1+\beta}}{1+\beta}\ (\rho < r < 1,\ \alpha < 0). \tag{41}$$

Предположим теперь, что $\rho < r < 1$ и $0 < \alpha < 1 + \beta$. Тогда интегрированием по частям получаем

$$I_{\alpha,\beta} = \frac{r^{-(\alpha-\beta)}}{1+\beta-\alpha} \left\{ - \int\limits_{\rho}^{\rho/r} (1-x)^{\alpha}\, d\left(\frac{\rho}{r} - x\right)^{1+\beta-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\rho/r}^{(1+\rho/r)/2} (1-x)^{\alpha}\, d\left(x - \frac{\rho}{r}\right)^{1+\beta-\alpha} \right\} + \frac{1}{r^{\alpha-\beta}} \times$$

$$\times \int\limits_{(1+\rho/r)/2}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{\left(x - \frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\beta}} < \frac{(1-\rho)^{\alpha}(1-r)^{1+\beta-\alpha}}{\rho_0^{\alpha-\beta}(1+\beta-\alpha)} + \frac{(r-\rho)^{1+\beta}}{2^{1+\beta}\rho_0^{1-\alpha}(1+\beta-\alpha)} +$$

$$+ \frac{r^{-(\alpha-\beta)}}{1+\beta-\alpha} \int\limits_{(1+\rho/r)/2}^{1} (1-x)^{\beta} dx < \left[\frac{1}{\rho_0^{\alpha-\beta}} + \frac{1}{2^{1+\beta}\rho_0^{1+\alpha}} + \frac{1}{\rho_0^{1+\alpha}(1+\beta)}\right] \frac{(1-\rho)^{1+\alpha}}{1+\beta-\alpha}.$$

Отсюда и из (38)—(41) следует, что при любом r $(0 \leqslant r < 1)$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |r^{-\beta} D^{-\beta} \log G_{\alpha}(re^{i\theta}, \{z_k\})|\, d\theta < C_2 \sum_k (1 - |z_k|)^{1+\beta} < +\infty,$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, зависящая лишь от α, β и ρ_0. Таким образом $G_{\alpha}(z, \{z_k\}) \in N_{\beta}$, что ввиду уже доказанного включения $H_{\alpha}(z, z_k\}) \in N_{\beta}$ и представления (35) обеспечивает включение $B_{\alpha}(z, \{z_k\}) \in N_{\beta}$.

Лемма 9. 1°. *Если* $0 < \alpha < +\infty$ *и последовательность* $\{z_k\} \subset \subset D$ $(z_k \neq 0,\ k \geqslant 1)$ *подчинена условию*

$$\sum_k (1 - |z_k|)^\alpha < +\infty,$$

то справедливо представление

$$B_\alpha(z, \{z_k\}) = C'_\alpha\, B_{\alpha-1}(z, \{z_k\})\,[H^{*}_{\alpha-1}(z, \{z_k\})]^{-2}, \tag{42}$$

где $C'_\alpha = \exp\{-\alpha^{-1}\sum (1 - |z_k|)^\alpha\}$ — *постоянная, а*

$$H^{*}_{\alpha-1}(z, \{z_k\}) \equiv \prod_k \exp\left\{\int_{|z_k|}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z\bar{z}_k}{x}\right)^\alpha}\,dx\right\} \neq 0 \tag{43}$$

— *аналитическая в* D *функция, ограниченная при* $0 < \alpha \leqslant 1$.

2°. *Если* $1 < \alpha < +\infty$ *и последовательность* $\{z_k\} \subset D$ $(z_k \neq 0,$ $k \geqslant 1)$ *подчинена условию*

$$\sum_k (1 - |z_k|)^{\alpha-1} < +\infty,$$

то справедливо представление

$$B_\alpha(z, \{z_k\}) = C'_\alpha B_{\alpha-1}(z, \{z_k\})\,[H^{**}_{\alpha-2}(z, \{z_k\})]^{-2}\times$$
$$\times [H^{***}_{\alpha-2}(z, z_k)]^4\,[R_{\alpha-1}(z, \{z_k\})]^{-2}, \tag{44}$$

где

$$H^{**}_{\alpha-2}(z, \{z_k\}) = \prod_k \exp\left\{-\frac{1}{\alpha-1}\int_{|z_k|}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\left(1 - \frac{z\bar{z}_k}{x}\right)^{\alpha-1}}\,dx\right\}, \tag{45}$$

$$H^{***}_{\alpha-2}(z, \{z_k\}) = \prod_k \exp\left\{-\int_{|z_k|}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\left(1 - \frac{z\bar{z}_k}{x}\right)^{\alpha-1}}\,x\,dx\right\}, \tag{45'}$$

$$R_{\alpha-1}(z, \{z_k\}) = \exp\left\{-\frac{1}{\alpha-1}\sum_k |z_k| \frac{(1-|z_k|)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z\bar{z}_k}{x}\right)^{\alpha-1}}\right\} \tag{45''}$$

— *аналитические в* D *функции без нулей. При этом они ограничены в* D, *если* $1 < \alpha \leqslant 2$.

Доказательство. 1°. Справедливость представления (42)—(43) доказана в работе [7]. Нужные свойства функции $H^{*}_{\alpha-1}$ очевидны.

2°. Как показано в [7], при любых $z, \zeta \in D$

$$h_\alpha(z, \zeta) = h_{\alpha-1}(z, \zeta)\exp\left\{2\int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1 - \frac{z\bar{\zeta}}{x}\right)^\alpha}\,dx - \frac{1}{\alpha}\,\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{\left(1 - \frac{z\bar{\zeta}}{|\zeta|}\right)^\alpha}\right\}.$$

С другой стороны, если $\overset{*}{h}_{\alpha-1}(z, \zeta)$ — фактор произведения (43), то очевидно, что

$$\varphi_{\alpha-1}(z, \zeta) \equiv \frac{\overset{*}{h}_{\alpha-1}(z, \zeta)}{h_{\alpha-1}(z, \zeta)} - \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^2}{\left(1-\frac{z\bar{\zeta}}{x}\right)^{\alpha}} \frac{dx}{x}.$$

Далее, способом, примененным в [7] легко убедиться в том, что

$$\frac{\varphi_{\alpha-1}(z, \zeta)}{\varphi_{\alpha-2}(z, \zeta)} = \exp\left\{\frac{1}{\alpha-1} \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\left(1-\frac{z\bar{\zeta}}{|\zeta|}\right)^{\alpha-1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1+2(\alpha-1)}{\alpha-1} \int\limits_{\rho}^{1} \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{z\bar{\zeta}}{x}\right)^{\alpha-1}} dx \right\}.$$

Из этих равенств следует представление (44). Ограниченность в D функций (45), (45′), (45″), при $1<\alpha \leqslant 2$ очевидна.

9. Доказательство теоремы 3. 1°. Пусть выполнено условие (13) с каким-либо $\gamma(0<\gamma<1)$. Рассмотрим сначала случай, когда $\gamma-1 < \alpha<\gamma$. В этом случае при обозначении $\beta=\gamma-1$ будет иметь $-1<\beta<0$ и $\beta \leqslant \alpha < \beta+1$. Следовательно, в силу леммы 8, $B_\alpha \in N_\beta$, и утверждение теоремы следует ввиду результата М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [5, 6] о том, что любая ненулевая функция этого класса обладает ненулевыми конечными угловыми граничными значениями во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой $1+\beta$-емкости.

Пусть теперь $\leqslant \alpha < \gamma+1$. Тогда справедливо представление (42)—(43) леммы 9, причем $\gamma-1 < \alpha-1 < \gamma$. Поэтому, в силу леммы 8, в этом представлении $\gamma\, B_{\alpha-1} \in N_\beta$, доказательство же включения $\overset{*}{H}_{\alpha-1} \in N_\beta$ по существу ничем не отличается от доказательства включения $H_{\alpha-1} \in N_\beta$. Утверждение теоремы следут из отмеченного выше граничного свойства функций класса N_β и аналога леммы 1, имеющегося в работах [5, 6].

Рассмотрим наконец случай, когда $\alpha=\gamma+1$. В этом случае в силу формул (42), (44) леммы 9

$$B_\alpha \equiv B_{\gamma+1} = \overset{*}{C}_{\gamma+1} B_\gamma \left[\overset{*}{H}_\gamma\right]^{-2}, \quad \overset{*}{H}_\gamma = \overset{**}{H}_{\gamma-1} \left[\overset{***}{H}_{\gamma-1}\right]^{-2} R_\gamma.$$

Здесь, как уже доказано, ненулевые, конечные угловые граничные значения B_γ существуют во всех точках единичной окружности, кроме, быть может, множества нулевой γ-емкости. Далее, как было сказано выше, $\overset{**}{H}_{\gamma-1} \in N_{\gamma-1}$, в принадлежности же $\overset{***}{H}_{\gamma-1} \in N_{\gamma-1}$ так же легко убедиться. Тем самым, в силу отмеченного выше граничного свойства функций класса $N_{\gamma-1}$, эти функции обладавт нужным граничным свойством. Поэтому, если удастся доказать, что конечный предел

$$\lim_{r\to 1-0} H_\gamma^*(re^{i\theta}, \{z_k\}) \neq 0 \tag{46}$$

существует вне множества нулевой γ-емкости, то, в силу теоремы Линделёфа, вне такого множества будут существовать ненулевые, конечные угловые граничные значения функции R_γ, а за ней H_γ^* и $B_{\gamma+1}$.

Итак, для завершения доказательства утверждения 1° теоремы достаточно лишь доказать, что конечный предел (46) существует вне множества нулевой γ-емкости. Доказательство этого факта вполне аналогично доказательству леммы 3, или случая $\omega(x) = (1-x)^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$ теоремы 1 работы [6]. Разница заключается лишь в нижеприводимых оценках.

Пусть h_γ^* — фактор произведения (43), $z = re^{i\theta}$ $(0 \leqslant r < 1$ и $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ $(0 < \rho_0 \leqslant \rho < 1)$. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\left|\frac{d}{dr}\log h_\gamma^*(re^{i\theta}, \zeta)\right| < 2^{2+\gamma/2}\int_{\rho}^{1}\frac{(1-x)^\gamma\,dx}{\left(x - r\rho + \frac{2}{\pi}\sqrt{r}\rho\,|\theta-\varphi|\right)^{2+\gamma}} =$$

$$= \frac{2^{2+\gamma/2}}{1+\gamma}\,\frac{(1-\rho)^{\gamma+1}}{\left(1 - r\rho + \frac{2}{\pi}\sqrt{r}\rho|\theta-\varphi|\right)\left[\rho(1-r) + \frac{2}{\pi}\sqrt{r}\rho\,|\theta-\varphi|\right]^{\gamma+1}} <$$

$$< 2^{2+\gamma/2}\frac{(1-\rho)^\gamma}{\left[\rho(1-r) + \frac{2}{\pi}r\rho\,|\theta-\varphi|\right]^{\gamma+1}}.$$

Поэтому, если $z_k = |z_k|e^{i\varphi_k}$, $|z_k| \geqslant \rho_0 > \rho$, то

$$\int_0^1\left|\frac{d}{dr}\log H_\gamma^*(re^{i\theta}, \{z_k\})\right|dr \leqslant$$

$$< 2^{2+\gamma/2}\sum_k(1-|z_k|)^\gamma\int_0^1\frac{dr}{\left[|z_k|(1-r) + \frac{2}{\pi}r|z_k|\,|\theta-\varphi_k|\right]^{\gamma+1}} <$$

$$< 2^{2+\gamma/2}\sum_k(1-|z_k|)^\gamma\left[\frac{2^\gamma}{\rho_0^{\gamma+1}} + \frac{1}{\rho_0^{\gamma+1}}\int_{1/2}^1\frac{dr}{(1+\pi^{-1}|\theta-\varphi_k| - r)^{\gamma+1}}\right] <$$

$$< \frac{2^{2+\gamma/2}}{\rho_0^{\gamma+1}}\sum_k(1-|z_k|)^\gamma\left[2^\gamma + \frac{\pi^\gamma}{\gamma}\,\frac{1}{|\theta-\varphi_k|^\gamma}\right].$$

И наконец, если S_2 — число, определенное соотношением (10), то

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\mu_0(\theta)\int_0^1\left|\frac{d}{dr}\log H_\gamma^*(re^{i\theta}, \{z_k\})\right|dr <$$

$$< \frac{2^{2+\gamma/2}}{\rho_0^{\gamma+1}}\sum_k(1-|z_k|)^\gamma\left[2^\gamma + \frac{\pi^\gamma}{\gamma}S_2\right] < +\infty,$$

поскольку при любом φ_k

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu_0(\theta)}{|\theta-\varphi_k|^{\gamma}} \leqslant \sup_{z\in D} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu_0(\theta)}{|z-e^{i\theta}|^{\gamma}} = S_{\gamma} < +\infty.$$

2°. Пусть теперь выполнено условие (14). Тогда второе утверждение теоремы в случае $\alpha=0$ общеизвестно. В случае, когда $0<\alpha\leqslant 1$ из представления (42) следует, что B_{α} -функция ограниченного вида в D, и, тем самым, нужное утверждение верно. Если же $1<\alpha\leqslant 2$, то воспользуемся представлением (44). Здесь функции $H^{**}_{\alpha-2}$, $H^{***}_{\alpha-2}$ и $R_{\alpha-1}$ аналитичны и ограничены в D. Функция $B_{\alpha-1}$ ограниченного вида в D ввиду предыдущего случая. Поэтому функция B_{α} опять оказывается ограниченного вида в D, и теорема доказана.

Институт математики
АН Армении

Поступила 17.XII.1990

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների եզրային հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածը նվիրված է հեղինակի ներմուծած կիսահարթությունում ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների դասերի ինչպես նաև Մ. Մ. Ջրբաշյանի միավոր շրջանի Բլյաշկեի տիպի արտադրյալների եզրային հատկությունների հետազոտմանը։ Կիսահարթության դեպքի համար ստացված հիմնական արդյունքները «նոսր» զրոներով Բլյաշկեի արտադրյալների եզրային հատկությունների վերաբերյալ Ֆրոսթմանի հանրահայտ արդյունքի ինչպես նաև շրջանում ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների եզրային հատկությունների համար Մ. Մ. Ջրբաշյանի և Վ. Ս. Զաքարյանի ստացած մի արդյունքի յուրօրինակ համանմաններ են։ Միաժամանակ, հոդվածի հիմնական արդյունքը միավոր շրջանում Մ. Մ. Ջրբաշյանի և Վ. Ս. Զաքարյանի նշված արդյունքի, ինչպես նաև Գ. Տ. Բաղդասարյանի և Ի. Վ. Հովհաննիսյանի ավելի ուշ ստացված արդյունքի ուժեղացումն է։

A. M. JERBASHIAN (DJRBASHIAN). *On boundary properties of functions of generalized bounded type* (summary)

In the paper are investigated the boundary properties of the classes of functions of generalized bounded type in the half-plane, introduced by author, and also the boundary properties of M. M. Djrbashian's Blaschke type products in the unit circle. Particularly the full analog of Frostman's well-known result on Blaschke product with "sparse" zeros is obtained for the special reprsentatives of the classes of functions of generalized bounded type in the half-plane and in the circle — the Blaschke type products of index $\alpha \in (-1, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Джрбашян.* Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXI, № 3, 1986, 213—279.
2. *А. М. Джрбашян.* О равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости и аналоге теоремы Актовича, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XXV, № 3, 1990, 293—302.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.

4. *O. Frostman*. Sur les produits de Blaschke, Fysiogr. Söldsk Land. föhr., 12, № 15, 1939, 1—14.
5. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, 34, № 6, 1970, 1262—1339.
6. *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН АрмССР, «Математика», VI, № 2—3, 1971, 182—194.
7. *Д. Т. Багдасарян, И. В. Оганисян*. Граничные свойства функций $B_\alpha(z, z_k)$ М. М. Джрбашяна, ДАН АрмССР, 90, № 5, 1990, 199—205.
8. *А. М. Джрбашян*. Теоремы типа Герглотца-Рисса, Мат. заметки, 45, № 4, 1989, 19—26.
9. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.
10. *А. М. Джрбашян*. Об одном представлении произведения типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXIV, № 5, 1989, 466—473.