ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 2, 1991 Математика

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.986

М. А. АКОПЯН

О РАВНОМЕРНЫХ $B(H)$-АЛГЕБРАХ

Понятие некоммутативной равномерной алгебры впервые было введено Д. Тейлором в работе [1]. В настоящей заметке, продолжая тематику работ [2, 3], изучаются некоммутативные равномерные алгебры с постоянным слоем, совпадающим с полной алгеброй линейных ограниченных операторов на некотором гильбертовом пространстве.

Пусть T—метризуемый компакт, A—C^*-алгебра с единицей, $C(T, A)$ — C^*-алгебра всех непрерывных отображений из T в A. Напомним (см. [1, 2]), что замкнутая подалгебра $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$ называется *равномерной алгеброй* операторных полей, если она содержит единицу A и разделяет точки (для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ и $a_1, a_2 \in A$, существует $x \in \mathfrak{M}$ такое, что $x(t_1) = a_1$, $x(t_2) = a_2$). Равномерная алгебра $\mathfrak{M}$ называется A-алгеброй (см. [2]), если $A \subset \mathfrak{M}$ (отождествляя элементы A с постоянной функцией $a(t) \equiv a$). Множество всех гомоморфизмов из $\mathfrak{M}$ в A, которые продолжаются до условного ожидания из $C(T, A)$ на A обозначается через $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ и называется относительным спектром алгебры $\mathfrak{M}$ (см. [2]).

Простейшим примером равномерной A-алгебры является расщепимая алгебра, которая порождается линейными комбинациями функций из некоторой классической (коммутативной) равномерной алгебры $D \subset C(T)$ и элементов A. Иными словами, алгебра расщепима, если A—линейные комбинации вида $\sum_{i=1}^{n} f_i a_i$, где $f_i \in D$, $a_i \in A$, плотны в $\mathfrak{M}$. В подобных случаях мы будем использовать обозначение $\mathfrak{M} = [D, A]$. Заметим, что если дополнительно A — проста (или, более общо, имеет тривиальный центр), то $\mathrm{Sp}_A \mathfrak{M}$ совпадает с пространством максимальных идеалов D (см. [2]).

Изучение расщепимой алгебры сводится, таким образом, к изучению порождающих ее алгебр D и A. Поэтому имеет смысл сопоставлять, по мере возможности, произвольной равномерной A-алгебре некоторую расщепимую алгебру, наследующую ее свойства. В настоящей работе это делается в случае, когда слой совпадает с $B(H)$, алгеброй всех ограниченных линейных операторов на некотором гильбертовом пространстве H. Наиболее интересен случай, когда H—бесконечномерное гильбертово пространство, поскольку каждая равномерная A-алгебра $\mathfrak{M}$ при $A \neq M_n(\mathbb{C})$ (алгебра $n \times n$ комплексных матриц) расщепима (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная $B(H)$-алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, B(H))$. Тогда существует такая расщепимая алгебра $\mathfrak{M}_0$, что*

1) $[\mathfrak{M}, K(H)] = [\mathfrak{M}_0, K(H)]$, *где* $K(H)$ — *алгебра компактных операторов из* $B(H)$.

2) $\mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M} = \mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}_0$.

Доказательство. (1). Пусть $e_1, e_2, \cdots$ — некоторый ортонормированный базис в H и P_n — проектор на конечномерное подпространство H_n, порожденное первыми n элементами базиса. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{M}_n = P_n\mathfrak{M}P_n$, являющуюся, очевидно, подалгеброй $C(T, B_n)$ где $B_n = P_nB(H)P_n$, при этом $C(T, B_n) = P_nC(T, B(H))P_n$. Можно легко проверить, что $\mathfrak{M}_n$ — равномерная B_n-алгебра с единицей P_n. Будучи алгеброй с матричным слоем, $\mathfrak{M}_n$ расщепима, поэтому существует коммутативная равномерная алгебра D_n такая, что $\mathfrak{M}_n = [D_n, B_n]$. Покажем, что алгебры D_n не зависят от номера n. Ввиду того, что $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}_{n+1}$, имеем $D_{n+1}P_n \subset \mathfrak{M}_n$. Откуда $D_{n+1} = D_n = D$. Пусть $\mathfrak{M}_0 = [D, B[H)]$, тогда, очевидно, $P_n\mathfrak{M}_0P_n = P_n\mathfrak{M}P_n$. Поскольку $P_nxbP_n \in [D, B_n] \subset [\mathfrak{M}_0, K(H)]$ для $x \in \mathfrak{M}$, $b \in K(H)$ и P_nxbP_n при $n \to \infty$ по норме сходится к xb, имеем $[\mathfrak{M}, K(H)] \subset [\mathfrak{M}_0, K(H)]$. Аналогично доказывается обратное включение.

Докажем (2). Ввиду того, что $B(H)$ — алгебра с тривиальным центром, то как было отмечено выше, $\mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n = \mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}_0 = \mathrm{Sp}\, D$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M} = \mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n$. Пусть $p \in \mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}$. Тогда p продолжается до условного ожидания $\tilde{p}$: $C(T, B(H)) \to B(H)$. Рассмотрим сужение $p_0 = \tilde{p}|_{C(T, B_n)}$. Ввиду того, что для любого $x \in C(T, B_n)$ справедливо

$$p_0(x) = \tilde{p}(x) = \tilde{p}(P_nxP_n) = P_n\tilde{p}(x)P_n \in B_n,$$

то p_0 является условным ожиданием из $C(T, B_n)$ на B_n. Поскольку $p|_{\mathfrak{M}_n}$ является гомоморфизмом и совпадает с $p_0|_{\mathfrak{M}_n}$, то $p|_{\mathfrak{M}_n} \in \mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n$.

Покажем, что между элементами из $\mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}$ и $\mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n$ имеется взаимно однозначное соответствие. Пусть $p_1, p_2 \in \mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}$, $p_1 \neq p_2$ тогда найдется такой проектор P_n, что $P_np_1(x)P_n \neq P_np_2(x)P_n$ для некоторого $x \in \mathfrak{M}$. Обозначим $q_1 = p_1|_{\mathfrak{M}_n}$ и $q_2 = p|_{\mathfrak{M}_n}$. Из вышесказанного следует, что $q_1, q_2 \in \mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n$ и $q_1 \neq q_2$, а поскольку $\mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n = \mathrm{Sp}\, D$, то оператор сужения однозначно отображает $\mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}$ в $\mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n$.

Пусть теперь $p \in \mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n$, тогда $p|DP_n$ является мультипликативным функционалом. Обозначим через μ его представляющую меру и определим условное ожидание $\tilde{p}$ формулой:

$$\tilde{p}(x) = \int_T x\,d\mu, \quad x \in C(T, B(H)).$$

Очевидно, $p = \tilde{p}|_{\mathfrak{M}_n} \in \mathrm{Sp}_{B_n}\mathfrak{M}_n$. Покажем, что $\tilde{p}|_{\mathfrak{M}} \in \mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}$. Действительно, из представления $\tilde{p}$ видно, что для любых $x, y \in \mathfrak{M}$

$$\tilde{p}(xy) = \lim_{n\to\infty} \tilde{p}(P_n x P_n y P_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{p}(P_n x P_n)\, \tilde{p}(P_n y P_n) = \tilde{p}(x)\, \tilde{p}(y),$$

где предел понимается в сильной операторной топологии. Теорема доказана.

Заметим, что $\mathfrak{M}_0$ —единственная расщепимая алгебра, удовлетворяющая условиям теоремы.

Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная A-алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, A)$. Напомним (см. [3]), что точка t_0 называется 1) точкой слабого пика для алгебры $\mathfrak{M}$ ($t_0 \in \Pi_w(\mathfrak{M})$), если для любых $d > 1$ и окрестности U точки t_0 существует $x \in \mathfrak{M}$ такое, что $\|x\| < d$, $x(t_0) \geqslant 0$, $\|x(t_0)\| = 1$ и $\|x(t)\| < \frac{1}{2d}$ при $t \overline{\in} U$; 2) точкой норм пика для алгебры $\mathfrak{M}$ ($t_0 \in \Pi_n(\mathfrak{M})$), если существует $x \in \mathfrak{M}$ такое, что $x(t_0) > 0$, $\|x(t_0)\| = 1$ и $\|x(t)\| < 1$ при $t \neq t_0$; 3) точкой пика для алгебры $\mathfrak{M}$ ($t_0 \in \Pi(\mathfrak{M})$), если существует $x \in \mathfrak{M}$ такое, что $x(t_0) = e$, где e — единица алгебры A, $\|x(t)\| < 1$ при $t \neq t_0$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что при $t_0 \in \Pi_w(\mathfrak{M})$ для любой окрестности U точки t_0 и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\varphi \in S(A)$ (пространство состояний алгебры A) и $x \in \mathfrak{M}$ такие, что

$$\varphi(x(t_0)) = \|x(t_0)\| = 1, \quad \sup_{t \in T} |\varphi(x(t))| \leqslant 1 + \varepsilon \text{ и}$$

$$\sup_{t \in T \setminus U} |\varphi(x(t))| < 1.$$

Очевидно, $\Pi_w \supseteq \Pi_n \supseteq \Pi$. Вообще говоря, существуют равномерные A-алгебры, для которых эти включения строгие. Для обычных равномерных алгебр все вышеуказанные множества совпадают. Легко показать, что эти множества совпадают также для всякой расщепимой алгебры $\mathfrak{M} = [D, A]$. Действительно, для любых $\varphi \in S(A)$ и элемента $x \in \mathfrak{M}$ вида $x = \sum_{i=1}^{n} f_i a_i$, где $f_i \in D \subset C(T)$, $a_i \in A$, имеем

$$\varphi(x(t)) = \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} f_i a_i\right)(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) f_i(t).$$

Отсюда $\varphi \circ x \in D \subset \mathfrak{M}$ и следовательно, если $t_0 \in \Pi_w(\mathfrak{M})$, то, в силу вышесказанного замечания, t_0 — точка пика алгебры D.

Теперь обратимся к рассмотрению связи между вышеуказанаными множествами точек пика равноморных $B(H)$-алгебр.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — равномерная $B(H)$-алгебра, $\mathfrak{M} \subset C(T, B)(H)$. Тогда $\Pi_n(\mathfrak{M}) = \Pi_w(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_0 = [D, B(H)]$ — расщепимая алгебра, согласованная с алгеброй $\mathfrak{M}$ (см. теорему 1). Для каждой меры μ, ортогональной к D ($\mu \in D^{\perp}$), определим оператор Φ_μ из $C(T, B(H))$ на $B(H)$, полагая

$$\Phi_\mu(x) = \int_T x\, d\mu,$$

Очевидно, $\Phi_\mu(x)=0$ для $x\in\mathfrak{M}_0$. Покажем, что это имеет место для любого $x\in\mathfrak{M}$. В самом деле, поскольку для $x\in\mathfrak{M}$, $P_n x P_n\in\mathfrak{M}_0$, то $\Phi_\mu(P_n x P_n)=0$. Однако $\Phi_\mu(P_n x P_n)=P_n\Phi_\mu(x)P_n$, откуда для любого n имеем $P_n\Phi_\mu(x)P_n=0$. Следовательно, $\Phi_\mu(x)=0$ для любого $x\in\mathfrak{M}$. Поэтому для $\varphi\in S(B(H))$ и $x\in\mathfrak{M}$ имеет место

$$0=\varphi(\Phi_\mu(x))=\varphi\left(\int_T x\,d\mu\right)=\int_T \varphi(x)\,d\mu,$$

т. е. $\varphi(x(t))$ ортогонально к $D^\perp$ и поэтому $\varphi\circ x\in D$.

Пусть теперь $t_0\in\Pi_\infty(\mathfrak{M})$. Поскольку $\varphi\circ x\in D$ для любого $\varphi\in S(B(H))$, то t_0 является точкой пика для алгебры D, откуда $t_0\in\Pi(\mathfrak{M}_0)$. Следовательно, $t_0\in\Pi(P_n\mathfrak{M}_0P_n)=\Pi(P_n\mathfrak{M}P_n)$. Поскольку $P_n\mathfrak{M}P_n\subset\mathfrak{M}$, то $t_0\in\Pi_n(\mathfrak{M})$, откуда следует утверждение теоремы.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, существуют равномерные $B(H)$-алгебры $\mathfrak{M}$, у которых $\Pi(\mathfrak{M})$ существенно уже $\Pi_n(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть D_1 и D_2-две коммутативные равномерные алгебры и пусть $D_1\supset D_2$. Рассмотрим алгебру

$$\mathfrak{M}=[D_1,\ K(H)]+[D_2,\ B(H)].$$

Очевидно, точки норм пика и слабого пика алгебры $\mathfrak{M}$ совпадают с точками пика алгебры D_1, а точки пика алгебры $\mathfrak{M}$ совпадают с точками пика алгебры D_2.

Следующая теорема устанавливает связь между гомоморфизмами алгебры $\mathfrak{M}$ в $B(H)$ и элементами из $\mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ —равномерная $B(H)$-алгебра и Φ—гомоморфизм из $\mathfrak{M}$ в $B(H)$ такой, что $\Phi|_{B(H)}$ является автоморфизмом на $B(H)$. Тогда найдутся $p\in\mathrm{Sp}_{B(H)}\mathfrak{M}$ и автоморфизм τ алгебры $B(H)$ такие, что $\Phi=\tau\circ p$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $p=\tau^{-1}\circ\Phi$, где τ^{-1} — автоморфизм $B(H)$, обратный к автоморфизму $\tau=\Phi|_{B(H)}$. Покажем, что p является билинейным гомоморфизмом на $\mathfrak{M}$. Пусть $x,\ y\in\mathfrak{M}$. Тогда, поскольку Φ — гомоморфизм, имеем

$$p(x,y)=\tau^{-1}(\Phi(xy))=\tau^{-1}(\Phi(x)\Phi(y))=\tau^{-1}(\Phi(x))\tau^{-1}(\Phi(y))=$$
$$=p(x)\,p(y).$$

Теперь покажем $B(H)$-билинейность. В самом деле, для $a,b\in B(H)$ и $x\in\mathfrak{M}$ справедливо

$$p(axb)=(\tau^{-1}\Phi)(axb)=\tau^{-1}(\Phi(a)\Phi(x)\Phi(b))=a\tau^{-1}(\Phi(x))\,b=$$
$$=ap(x)\,b.$$

Рассмотрим сужение $p'_{|\mathfrak{M}_n}$. Это сужение является B_n-билинейным гомоморфизмом. Поскольку B_n является алгеброй с тривиальным центром и, кроме того, $B_n\subset\mathfrak{M}_n$, $DP_n\subset\mathfrak{M}_n$ и $p(fP_n)\subset Z(\mathfrak{M}_n)$ (где $f\in D$, $Z(\mathfrak{M}_n)$ — центр алгебры $\mathfrak{M}_n$), то сужение $p|_{DP_n}$ является мультипликативным функционалом. Пусть μ — ее представляющая мера, тогда можно определить условное ожидание $\tilde{p}$ на $C(T, B_n)$ по формуле:

$$\tilde{p}(x) = \int_T x d\mu, \quad x \in C(T, B(H)).$$

Поскольку сужение $p = \tilde{p}|_{\mathfrak{M}}$ является гомоморфизмом (см. конец доказательства теоремы 1), то $p \in \mathrm{Sp}_{B(H)} \mathfrak{M}$. Таким образом, имеем гомоморфизм $p = \tau^{-1} \circ \Phi$, определенный на $\mathfrak{M}$, причем $\Phi = \tau \circ p$.

В заключение автор выражает благодарность Арзуманяну В. А. и Григоряну С. А. за полезные советы и внимание к работе.

Вычислительный центр
Госплана Армении

Поступила 14. II. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. C. Taylor*. Interpolation in algebras of operator fields. J. Funct., v. 10, № 2 1972, 159—190.

2. *В. А. Арзуманян, С. А. Григорян*. Спектр равномерных алгебр операторных полей, Изв. АН АрмССР, «Математика», 1986, XXI, № 1, 63—79.

3. *V. Arzumanian, S. Grigorian*. The boundaries of uniform algebras of operator fields, Изв. АН АрмССР, «Математика», 1988, XXIII, № 4, 362—378.