ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 2, 1991 Математика

УДК 517.51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. А. КАРАГУЛЯН

О РАСХОДИМОСТИ СИЛЬНЫХ Ф-СРЕДНИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Известная теорема Марцинкевича-Зигмунда ([1], [2]) утверждает, что ряды Фурье сильно p-суммируются п. в., т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|S_k(x, f)-f(x)|^p=0 \text{ п. в.}$$

для любого $p>0$, где $S_k(x, f)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)\in L^1(0, 2\pi)$. В. Тотиком 1983 г. была поставлена задача: для каких непрерывно возрастающих $\Phi(t)$, $\Phi(0)=0$, имеет место

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi(|S_k(x, f)-f(x)|)=0 \text{ п. в.} \qquad (1)$$

для любого $f\in L^1(0, 2\pi)$? Более того, он высказал гипотезу, что точным условием, для выполнения (1) является

$$\log\Phi(t)=o(t)\quad(t\to\infty). \qquad (2)$$

Первый результат в этом направлении получен К. И. Осколковым ([5]. Им доказано, что (1) имеет место при $\Phi(t)=O(t/\log\log t)$. Л. Д. Гоголадзе и В. А. Родин ([3], [4]) независимо доказали, что условие (2) достаточно, чтобы выполнялось (1). В работе доказывается, что этот результат окончателен и, тем самым, утверждается точность гипотезы Тотика.

Теорема. *Пусть $\Phi(t)$—непрерывно возрастающая функция, с $\Phi(0)=0$, для которой*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}(\log\Phi(t))/t=\infty. \qquad (3)$$

Тогда существует $f\in L^1(0, 2\pi)$ такая, что

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi(|S_k(x, f)|)=\infty \text{ п. в.} \qquad (4)$$

Лемма. *Для любого натурального $R>1$ существует тригонометрический полином $f_R(x)$ порядка $M(R)$ и множество $E_R\subset(0,2\pi)$ такие, что*

$$f_R(x)\geqslant 0,\quad \int_0^{2\pi}f_R(x)\,dx=1, \qquad (5)$$

$$\mu(E_R) > 2\pi - \frac{c}{\sqrt{R}}, \tag{6}$$

$$|\{k \in N: R < k \leqslant l(x), S_k(x, f_R) > c \ln R\}| > c\frac{l(x)}{R} \tag{7}$$

при $$x \in E_R,\ R < l(x) < M(R).$$

(*Здесь и в дальнейшем, μ-мера Лебега, $|A|$-количество элементов множества A, а через C обозначаются разные абсолютные постоянные*).

Доказательство леммы. Найдем $f_R(x)$ вида

$$f_R(x) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{p} K_{m_i}(x - a_i), \tag{8}$$

$$a_i = \frac{4\pi i}{2R+1},\ m_i = 10^i m_0,\ i = 1, 2, \cdots, R, \tag{9}$$

где $K_n(x)$-*ядро Фейера, а* m_0 выберем позже. Очевидно имеем (5). Обозначим для $j = 1, 2, ..., R$

$$B_j^{(R)}(x) = \left\{t \in N;\ 1 \leqslant t \leqslant \frac{m_j}{2R},\ \sin t(2R+1)x/2 < -\frac{1}{2}\right\}, \tag{10}$$

$$A_j^{(R)}(x) = \left\{t \in N;\ \frac{m_j}{10R} \leqslant t < \frac{m_j}{2R},\ \sin t(2R+1)x/2 < -\frac{1}{2}\right\}, \tag{11}$$

$$E_j^{(R)} = \left\{x \in (0, 2\pi);\ |A_j^{(R)}(x)| > \frac{m_j}{40R}\right\},\ j = 1, 2, \cdots, R. \tag{12}$$

Используя известный факт о том, что для любого иррационального $\frac{\theta}{2\pi} \in (0, 1)$ последовательность дробных частей $\{n\theta\}$, $n = 1, 2, ...$, равномерно распределена на окружности, имеем, что для п. в. $x \in (0, 2\pi)$ при достаточно большом $m_0 = m_0(x)$, $|B_j^{(R)}(x)| > \frac{m_j}{8R}$, $j = 1, 2, \cdots, R$, и следовательно (см. 10], [11])

$$|A_j^{(R)}(x)| \geqslant |B_j^{(R)}(x)| - \frac{m_j}{10R} > \frac{m_j}{8R} - \frac{m_j}{10R} = \frac{m_j}{40R}. \tag{13}$$

Отсюда для достаточно большого $m_0 > R$ имеем (см. [12]) $\mu E_j^{(R)}(x)) > > 2\pi - \frac{1}{R^{(2)}}$ и, следовательно, для множества

$$E_j^{(R)} = \bigcap_{j=1}^{R} E_j^{(R)} \setminus \left(\frac{4\pi(R - \sqrt{R})}{2R+1},\ 2\pi\right)$$

имеет место [8]. Пусть теперь $x \in E^{(R)}$ и $m_j < p \leqslant 5m_j$, $2p + 1 = = t(2R+1)$, $t \in A_j^{(R)}(x)$. Тогда имеем $x \in (a_{j-1}, a_j)$ при одном $1 \leqslant j \leqslant \leqslant R - \sqrt{R}$. Отсюда имеем (см. [9], [11])

$$S_p(x, f_R) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{j} K_{m_j}(x - a_j) + \frac{1}{R}\sum_{i=j+1}^{R} S_p(x - a_i, K_{m_i}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{R} \sum_{l=j+1}^{R} \frac{p+1}{m_l+1} K_p(x-a_l) + \frac{1}{R} \sum_{l=j+1}^{R} \frac{m_l-p}{m_l+1} D_p(x-a_l) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{R} \sum_{l=j+1}^{R} \frac{m-p}{m_l+1} \frac{\sin t(2R+1)x/2}{2\sin\frac{x-a_l}{2}} > \frac{c}{R} \sum_{l=j+1}^{R} \frac{1}{|x-a_l|} > c\ln R,$$

и, следовательно (см. (12), (13), (14))

$$|\{p\in N;\ R<p\leqslant 5m_j,\ S_p(x, f_R) > c\ln R\}| > \frac{m_j}{40R},\quad x\in E^{(R)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Нужную нам функцию ищем в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_{R_k}(x), \tag{14}$$

где R_k и $\alpha_k > 0$ выберем такими, чтобы выполнялись следующие соотношения (см. обозначения леммы):

$$\alpha_1 = 1,\ \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k < \frac{1}{M(R_n)},\ R_{n+1} > M(R_n), \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R_k}} < \infty, \tag{16}$$

$$\Phi(\alpha_k \ln R_k) > e^{2\ln R_k} = R_k^2, \tag{17}$$

$$\alpha_k \ln R_k - 1 > \frac{1}{2} \alpha_k \ln R_k. \tag{18}$$

Очевидно этого можно добиться, сделая выбор по очереди: $\alpha_1 = 1$, N_1, α_2, $N_2, \ldots$. Причем неравенстео (17) получается из (3).

При $R_p < n \leqslant M(R_p)$ имеем (см. (14), (15))

$$S_n(x,f) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k S_n(x, f_{R_k}) = \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k f_{R_k}(x) + \alpha_p S_n(x, f_{R_p}) +$$

$$+ S_n\Big(x, \sum_{k=p+1}^{\infty} \alpha_k f_{R_k}\Big) \geqslant S_n(x, f_{R_p}) - 1. \tag{19}$$

Очевидно множество $E = \bigcup_{k\geqslant n} \bigcap_{l\geqslant k} E^{(R_l)}$ имеет полную меру. Если $x\in E$, то $x\in E^{(R_p)}$ при $p > p(x)$. Отсюда при $p > p(x)$, $n\in G_{l(x)}^{(R)_p}(x)$, $R_p < l(x) < M(R_p)$ (см. лемму). Имеем $R_p < n < M(R_p)$ и $S_n(x, f_{R_p}) > c\ln R_p$ и, следовательно в силу (18) и (19), имеем

$$S_n(x, f) > c\,\alpha_p \ln R_p.$$

Отсюда, в силу леммы, получаем

$$\frac{1}{l(x)} \sum_{n=1}^{l(x)} \Phi(|S_n(x, f)|) = \frac{1}{l(x)} \sum_{n=1}^{l(x)} \Phi(c\,\alpha_p \ln R_p) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{l(x)} \sum_{n \in U_{l(x)}^{(R_p)}} R_p^2 > c R_p.$$

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армении

Поступила 13 IV. 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Marcinkiewicz*. Sur la sommabilitée forte des séries de Fourier. J. London Math. Soc., 14, 1939, 162—168.
2. *A. Zygmund*. On the convergence and summability of power series on the circle of convergence, Proc. London Math. Soc., 47, 1941, 326—350.
3. *Л. Д. Гого額ладзе*. О сильной суммируемости почти всюду, Мат. сб., 135, № 2. 1988, 158—168.
4. *В. А. Родин*. ВМО-сильные средние рядов Фурье, Функ. анал. и его прилож., 23, № 2, 1989, 73—74.
5. *К. И. Осколков*. О сильной суммируемости рядов Фурье, Тр Мат. инст. АН СССР, 172, 1985, 280—290.