ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 2, 1991 Математика

УДК 517.53

А. А. НЕРСЕСЯН

# ОДНА ЗАДАЧА Л. А. РУБЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ РОДСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ

1°. Для плоского множества $S$ пусть $A(S)$—класс функций, непрерывных на $S$ и аналитических на $S^\circ$ ($S^\circ$—внутренность множества $S$).

В 1976 г. Л. А. Рубелем была поставлена задача описания относительно замкнутых подмножеств $E$ области $D\subset \mathbb{C}$, обладающих свойством $(R)$: Для любой функции $f\in A(E)$ существует аналитическая в $D$ функция $g$ такая, что если последовательность $\{z_n\}\subset E$ и $\{z_n\}'\subset\partial D$, то $f(z_n)\to\infty$ тогда и только тогда, когда $g(z_n)\to\infty$ (см. [1], [2]).

Множества, обладающие свойством $(R)$ будем называть рубелевыми в $D$. Согласно теореме Н. У. Аракеляна о приближении аналитическими функциями [3], достаточным условием рубелевости является связность и локальная связность множества $D^*\setminus E$, где $D^*=D\cup\{\infty\}$ одноточечная компактификация области $D$. В работе [1] М. Гольдстейном построен пример рубелевого множества в $\mathbb{C}$ с локально несвязным дополнением в $\overline{\mathbb{C}}$, а также дано следующее необходимое условие рубелевости, полученное им совместно с П. М. Готье и В. Хентартнером.

(*): Для любого компакта $K\subset\mathbb{C}$ существует такой компакт $\widetilde{K}\subset\mathbb{C}$, что если ограниченная область $V$ имеет границу $\partial V\subset E\cup K$, то $(V\setminus\widetilde{K})\cap\partial E=\varnothing$.

Далее в [1] высказано предположение, что условие (*) является также и достаточным. Следующий пример показывает, что это не так.

**Пример 1.** Пусть при $n>1$ $\Gamma_n$ — график функции

$$y=n+\frac{2n}{2nx-1}\left|\sin\frac{1}{(2n-1)(2nx-1)}\right|,\quad \frac{1}{2n}<x\leqslant\frac{1}{2n-1},$$

дополненный отрезком $\left\{x=\dfrac{1}{2n-1},\ 0\leqslant y\leqslant n+2n(2n-1)\sin 1\right\}$ и лучом $\left\{x=\dfrac{1}{2n},\ 0\leqslant y<+\infty\right\}$, а множество $E$ определено с помощью равенства

$$E=\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\left(\cup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\right)\cup\{x=0,\ 0\leqslant y<+\infty\},$$

где $z_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4n-1}{2n(2n-1)}+in\right)$.

Легко видеть, что $E$ удовлетворяет условию (*). Рассмотрим функцию $f\in C(E)$, равную нулю на $\{x=0,\ 0\leqslant y<+\infty\}\cup\cup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$ и

$f(z_n)=n$, $n\geqslant 1$. Если предположить, что существует целая функция $g$, ассоциируемая с $f$ по свойству $(R)$, то ясно, что $\sup_{E\setminus\{z_n\}}|g|= M<+\infty$.

Пусть $V_n$ — плоская область с границей $\partial V_n=\Gamma_n\setminus\left\{\frac{1}{2n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2n-1},\ y=0\right\}$. Из соображений непрерывности при достаточно больших $n$ имеем $|g(x)|<2M$, $x\in\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right]$. Так как $|\alpha|$ линейно недостижима из $V_n$ (см. ниже), то согласно обобщенному принципу максимума, установленному в [4], [5], будем иметь $|g|<2M$ в $V_n$ при достаточно больших $n$, что противоречит стремлению $g(z_n)\to\infty$.

В сообщении автора [2] приведена теорема, содержащая решение задачи Рубеля для множеств $E\subset\mathbf{C}$ (т. е. при $D=\mathbf{C}$) с пустой внутренностью. В настоящей заметке наряду с задачей Рубеля мы рассмотрим еще две родственные задачи. Требуется описать замкнутые подмножества $E\subset D$, обладающие одним из следующих свойств $(S)$ или $(T)$:

$(S)$: Для любой функции $f\in A(E)$ существует функция $g\in A(D)$ такая, что если $\{z_n\}\subset E$, $\{z\}'\subset\partial D$, то $f(z_n)\to 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{g}(z_n)\to 0$.

$(T)$: Для любой функции $f\in A(E)$ существует функция $g\in A(D)$ такая, что если $\{z_n\}\subset E$, $\{z_n\}'\subset\partial D$, то $f(z_n)\to 0$ или $f(z_n)\to\infty$ тогда и только тогда, когда $g(z_n)$ стремится, соответственно, к нулю или бесконечности.

Будем говорить, что множество $F$ линейно достижимо из области $V$ ($F$, $V\subset\bar{\mathbf{C}}$), если существует такой непрерывный путь $\gamma:[0,1)\to V$, что для произвольного открытого $U$, содержащего $F$, $\gamma(t)\in U$ для значений параметра $t\in(0,1)$, достаточно близких к 1.

Сформулируем топологическое условие, обобщающее (*).

(**): (i) Существует компакт $K\subset D$ такой, что для произвольной области $V\subset D$, из которой $\partial D$ линейно недостижима и $\tilde{\partial} V\subset E$ (где $\tilde{\partial}V=D\cap\partial V$), имеет место $V\cap\partial E\subset K$. (ii) Для произвольного компакта $K\subset D$ существует компакт $\tilde{K}\subset D$ такой, что если $V\subset D$ — область, $\tilde{\partial}V\subset E\cup K$ и $\partial D$ линейно недостижима из $V$, то $(V\setminus\tilde{K})\cap\partial E=\varnothing$.

Основным результатом заметки является следующая

Теорема 1. *Свойства $(R)$, $(S)$ (при $E^0=\varnothing$) и $(T)$ влекут (**). В случае односвязности области $D$ и $E^\circ=\varnothing$ все четыре свойства эквивалентны.*

Нам представляется, что условие (**) достаточно также для свойств более общих, чем $(T)$, когда рассматриваются произвольная пара, или даже некоторое бесконечное множество значений вместо 0 и $\infty$. Не останавливаясь на подробностях доказательства отметим однако, что в случае плоскости ($D=\mathbf{C}$), если для любой $f\in A(E)$ существует целая функция $g$ такая, что для произвольного $A\in\mathbf{C}$, из $\{z_n\}\subset F$, $z_n\to\infty$, следует, что $f(z_n)\to A$ эквивалентно $g(z_n)\to A$, то для некоторого круга $B$ $E \setminus B$ имеет связное и локально связное дополнение в $\overline{\mathbf{C}}$, что влечет касательную аппроксимацию на $E \setminus B$ с некоторой скоростью (см. [3]) Остается открытым также вопрос является ли условие (**) достаточным для рубелевости множества, когда область $D$ бесконечносвязна, или $E$ имеет непустую внутренность. Во всяком случае для $D = \{|z| < 1\}$ условие (**) недостаточно, чтобы замкнутое множество с непустой внутренностью $E \subset D$ обладало свойством $(S)$.

Пример 2. Пусть $D = \{|z| < 1\}$ и $E = \{z \in D : \operatorname{Re} z \leqslant 0\} \cup X$, где

$$X = \left\{ z \in D : 0 < x < \frac{1}{2},\ y = 1 - 2x \right\}.$$

Ясно, что $E$ удовлетворяет (**). Пусть функция $f \in A(E)$ равна нулю на левом полукруге, входящем в $E$ и стремится к $\infty$ при стремлении $|z| \to 1$ по множеству $X$.

Если предположить, что существует $g \in A(D)$, соответствующая $f$ по свойству $(S)$, то очевидно $g = 0$, что не может иметь места, так как $g$ не должна стремиться к нулю, когда $|z| \to 1$ и $z \in X$.

Мы воспользуемся теоремой 1, чтобы доказать также следующее утверждение. Пусть $\widehat{E}$—объединение $E$ и предкомпактных в $D$ компонент открытого множества $D \setminus E$.

Теорема 2. *Пусть $D$ — односвязная область. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Для произвольной функции $f \in A(E)$, $f \neq 0$ на $\partial E$ и числа $c > 1$ существует функция $g \in A(D)$ такая, что*

$$\frac{1}{c} |f| \leqslant |g| \leqslant c\, |f| \text{ на } E. \tag{1}$$

2) а) $\partial \widehat{E} = \partial E$, б) $D^* \setminus \widehat{E}$ *локально связно*, в) *если $\{E_n\}$ — последовательность предкомпактных в $D$ компонент множества $D \setminus E$, то для произвольного компакта $K \subset D$ существует компакт $\widetilde{K} \subset D$ такой, что если при некотором $n$ $E_n \cap K \neq \varnothing$, то $E_n \subset \widetilde{K}$.*

(Последнее условие в) в формулировке теоремы 2 означает, что множество $\bigcup E_n$ удовлетворяет условию (A) работ [6], [7]).

В свою очередь теорема 2 взаимосвязана с несколько другим кругом задач. Рассмотрим следующее обобщение одной теоремы из работы [8] (см. также [9]).

Теорема 3. *Пусть $D$—односвязанная область в $\mathbf{C}$ и $E$—замкнутое подмножество $D$ со связным и локально связным дополнением в $D^*$. Тогда если $f \in A(E)$ и $f \neq 0$ на $\partial \widetilde{E}$, то для произвольных $\psi \in A(E)$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $h \in A(D)$ такая, что $|\psi - h| \leqslant \varepsilon |f|$ на $E$.*

В упомянутом утверждении работы [8] функция $f$ предполагается ограниченной и не имеющей нулей.

2°. Сформулируем в удобной для наших целей, несколько упрощенной форме теорему о гармонической аппроксимации из [2] (в форме, относящейся к общему случаю множеств с непустой внутренностью, см. [10]).

Теорема А. Пусть замкнутое в $D$ подмножество $E\subset D$ $(E^{\circ}=\varnothing)$ удовлетворяет условию (** ii) и следующему условию: если $V\subset D$ — область, $\tilde{\partial}V\subset E$ и $\partial D$ линейно недостижима из $V$, то $V\cap E=\varnothing$. Тогда существует положительная, непрерывная на $E$ функция $\nu$, $\nu(\zeta)\to+\infty$, при $\rho(\zeta, \partial D)\to 0$ (где $\varphi$ — сферическое расстояние), такая, что любая функция $f\in C(E)$, $|f|<c_f\nu$ на $E$ при некотором $c_f>0$, допускает равномерную на $E$ аппроксимацию с любой точностью гармоническими в $D$ функциями.

Заметим, что согласно известным теоремам о гармонической аппроксимации, условия теоремы А, вообще говоря, не обеспечивают аппроксимируемости с любой точностью на $E$ гармоническими в $D$ функциями произвольной непрерывной на $E$ функции.

Перейдем к доказательствам теорем.

Доказательство теоремы 1. $(R)\Rightarrow$(** i). Предположим, что (** i) не выполнено и $B_n$, $n=1, 2,\cdots$ — некоторое компактное исчерпание области $D$. Существует последовательность областей $V_n\subset D$, $n=1, 2,\cdots$, такая, что $\tilde{\partial}V_n\subset E$, $\partial D$ линейно недостижима из $V_n$ и $(V_n\setminus B_n)\cap\partial E\neq\varnothing$. Рассмотрим случай, когда $V_n\cap V_m=\varnothing$, при $n\neq m$. Если $V_n$ один и тот же для некоторой последовательности индексов, то легко видеть, что не выполняется (** ii) (см. ниже). Пусть $z_n\in(V_n\setminus B_n)\cap\partial E$ является точкой пика алгебры $R(X_n)$, где $X_n=(\mathbf{C}\setminus V_n)\cup E$ (см. [11]). Существуют рациональные функции $r_n$ с полюсами вне $X_n$, удовлетворяющие условиям

$$\text{i) } |r_n(z_n)-n|<\frac{1}{4}, \quad \text{ii) } |r_n|<\varepsilon_n \text{ на } X_n\setminus D(z_n, s_n),$$

где $D(z_n, s_n)=\{|z-z_n|<s_n\}$, причем $\overline{D}(z_n, s_n)\subset V_n$, $n=1, 2,\cdots$, а $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{1}{4}$. Сумма $f$ ряда $\sum r_n$ является мероморфной функцией в $D$ с полюсами вне $E$ и поэтому $f\in A(E)$, причем $f$ ограничена на $\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde{\partial}V_n$. Если бы существовала функция $g\in A(D)$, ассоциируемая с $f$ по свойству $(R)$, то $g$ была бы ограничена на $\bigcup\tilde{\partial}V_n$. Так как $\partial D$ линейно недостижима из $V_n$, то согласно упомянутому обобщению принципа максимума работ [4], [5], $g$ была бы ограничена в $\bigcup V_n$, что не согласуется с $g(z_n)\to\infty$.

$(R)\Rightarrow$(** ii). По предположению существует последовательность необязательно различных) областей $V_n\subset D$, $n=1, 2,\cdots$, таких, что $\tilde{\partial}V_n\subset E\cup B_{n_0}$, $n\geqslant 1$, $\partial D$ линейно недостижима из $V_n$ и $V_n\setminus B_{n_0+n})\cap\partial E\neq\varnothing$, $n\geqslant 1$. Пусть $z_n\in(V_n\setminus B_{n_0+n})\cap\partial E$ — точки пика алгебры $R(X_n)$, где $X_n=(\overline{\mathbf{C}}\setminus V_n)\cup E\cup B_{n_0+n}$, $n\geqslant 1$, причем $z_n\neq z_m$, $n\neq m$. Для чисел $\varepsilon_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\frac{1}{4}$, существуют рациональные функции $r_n$ с полюсами вне $X_n$, удовлетворяющие условиям

$$\text{i)}\ |r_n(z_n)-n|<\varepsilon_n,\ \text{ii)}\ |r_n|<\varepsilon_n \text{ на } X_n\setminus D(z_n,\ s_n),$$

где $\overline{D}(z_n,\ s_n)\subset V_n\setminus B_{n_0+n}$, $n\geqslant 1$, и $\overline{D}(z_n,\ s_n)\cap\overline{D}(r_m,\ s_m)=\varnothing$, $n\neq m$. Теперь дословно повторяя рассуждения предыдущего абзаца убедимся в справедливости требуемой импликации.

$(S)\Rightarrow(**)$ $(E^\circ=\varnothing)$. Предположим, что $(**)$ не имеет места. Рассмотрим функции $\tilde{f}$, определенную на замкнутом в $D$ подмножестве $\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial V_n\cup\{z_n\}$, равной нулю на $\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial V_n$ и 1 на $\{z_n\}$, где $\{V_n\}$ и $\{z_n\}$ — последовательности областей и точек, введенные выше при доказательстве $(R)\Rightarrow(**)$.

В качестве $f$ возьмем произвольное непрерывное продолжение на $E$ функция $\tilde{f}$. Если бы существовала функция $g\in A(D)$, соответствующая $f$ по $(S)$, то легко видеть, что во первых $g\to 0$ равномерно по $\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial V_n$, когда $\rho(z,\partial D)\to 0$ и далее, существует $\varepsilon_0>0$ такое, что $g|(z_n)|>\varepsilon_0$, $n>n_1$ ($n_1$ — некоторое натуральное число). Поэтому существует $n_2$ такое, что $|g|<\dfrac{\varepsilon_0}{4}$ на $\bigcup\partial V_n\setminus B_{n_2}$. Так как $\partial D$ линейно недостижима из $\bigcup V_n$, то согласно предельной форме принципа максимума (см. [5]) имели бы $\overline{\lim}\,|g(z_n)|<\dfrac{\varepsilon_0}{4}$ — противоречие.

$(T)\Rightarrow(**)$ следует из $(T)\Rightarrow(R)$.

$(**)\Rightarrow(T)$ ($D$ — односвязная область и $E^\circ=\varnothing$). Очевидно, множество $E$ будет обладать свойством $(T)$, если проверить, что этим свойством обладает множество $E\setminus K=E_1$, где $K$ — компакт, фигурирующий в $(**\,i)$. Легко видеть, что множество $E_1$ удовлетворяет условиям теоремы А. Пусть $\nu$ — положительная непрерывная функция на $E_1$, устанавливающая предельную скорость возрастания модуля аппроксимируемых на $E_1$ функций гармоническими в $D$ функциями. Пусть $\varphi$ — некоторая отрицательная непрерывная в $D$ функция, монотонная по $\rho(z,\ \partial D)$ и $\varphi(z)\to-\infty$, при $\rho(z,\ \partial D)\to 0$. Рассмотрим функцию

$$\psi=\begin{cases}\log|f|, & \text{если } f\neq 0\\ -\infty, & \text{если } f=0\end{cases}\quad \text{и } \chi=\max\{\varphi,\ \psi\}.$$

Существует функция $\lambda$, непрерывная и монотонно возрастающая на $(-\infty,\ \infty)$ такая, что

$$\lim_{x\to-\infty}\lambda(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\lambda(x)=+\infty$$

и $\lambda\circ\chi\leqslant c\nu$ при некотором $c>0$. Согласно теореме А существует гармоническая в $D$ функция $u$ такая, что $|\lambda-u|<1$ на $E_1$. В силу односвязности $D$ существует однозначная в $D$ сопряженная к $u$ гармоническая функция $V$. Тогда аналитическая в $D$ функция $g=\exp(u+iv)$ является ассоциируемой к $f$ по свойству $(T)$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Если $\partial E \neq \partial\hat{E}$, то существует область $V$, с замыканием, содержащимся в $D$ и такая, что $V \subset E$ и $V \cap \partial E \neq \varnothing$. Пусть $z_0 \in V \cap \partial E$ точка пика $R(X)$, где $X = (\overline{C} \setminus V) \cup E$; существует рациональная функция $f$ с полюсами вне $X$ такая, что $|f(z_0) - 1| < \varepsilon_0 < 1$ и $|f| < \frac{1-\varepsilon_0}{c^2}$ на $\partial V$. Если бы существовала функция $g \in A(D)$, удовлетворяющая (1), то по принципу максимума модуля

$$\frac{1-\varepsilon_0}{c} < \frac{1}{c}|f(z_0)| \leqslant |g(z_0)| < \frac{1-\varepsilon_0}{c},$$

— противоречие.

Далее, так как из (1) вытекает, что $E$ является рубелевым, то согласно теореме 1 оно удовлетворяет условию (**). Тогда, если $D^* \setminus \hat{E}$ локально несвязна в идеальной точке, то существует компакт $K$ такой, что $D \setminus (\hat{E} \cup K)$ содержит последовательность компонент $\{V_n\}$: $\partial V_n \cap K \neq \varnothing$, $\partial V_n \subset K \cup \partial\hat{E} = K \cup \partial E$ (т. е. $V_n \subset D$) и $V_n \cap \partial\hat{E} = V_n \cap \partial E = \varnothing$, причем существует последовательность точек $z_n \in V_n$ с производным множеством на $\partial D$ ($\{z_n\}' \subset \partial D$).

Пусть $B_n$, $n = 1, 2, \ldots$—компактное исчерпание области $D$. Применив лемму о существовании сходящейся подпоследовательности последовательности подмножеств компактного множетва (см. [12], стр. 334), из $\{V_n\}$ выделим подпоследовательность $\{V_{1n}\}$ такую, что $\{V_{1n} \cap B_1\}$ — сходящаяся. Из $\{V_{1n}\}$ выделим подпоследовательность $\{V_{2n}\}$ так, чтобы сходилась $\{V_{2n} \cap B_2\}$ и т. д. Диагональная последовательность $\{V_{nn}\}$ сходится в $D$ к некоторому подмножеству $L: L = (\lim V_{nn}) \cap D$. Отметим следующие очевидные свойства множества $L$: а) $L$ — замкнутое в $D$ связное подмножество множества $E$, имеющее пустую внутренность и соединяющее $K$ с $\partial D$, б) Какого бы ни было компактное подмножество $B \subset D$ и число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon$-окрестность множества $L \cap B$ содержит все множества $V_{nn} \cap B$, начиная с некоторого номера $n$.

Лемма 1. *$D^* \setminus L$ связно и локально связно.*

Доказательство. Связность вытекает из определения $L$ и свойства а). Если $D^* \setminus E$ локально несвязно в идеальной точке, то учитывая свойство б) легко выводим, что для $E$ не выполняется условие (**??). Лемма доказана.

С помощью теоремы о двух константах покажем, как это сделано в [6], что для последовательности $\{V_{nn}\}$ существует скорость $\varepsilon_0$ (т. е. положительная непрерывная на $E$ функция $\varepsilon_0$, причем $\varepsilon_0(z) \to 0$, при $\rho(z, \partial D) \to 0$, $z \in E$) такая, что если для функции $\psi \in A(D)$, $|\psi| = O(\varepsilon_0)$ на $\cup \partial V_{nn}$, то $\psi = 0$ тождественно.

Согласно лемме 1 имеем, что $L$—карлеманово множество ([7]) и поэтому существует такая функция $\varphi \in A(D)$, что $|\varphi| < \varepsilon_0$ на $L$ и $\varphi$ отлична от тождественного нуля. Для этого нужно аппроксимировать с касанием со скоростью $\varepsilon_0$ на множестве $L \cup \{z_0\}$ функцию, равную нулю на $L$ и 1 в произвольно фиксированной точке $z_0 \in D \setminus L$.

Функцию $f \in A(E)$ определим равной $\varphi$ на $(\overline{E^0})$ и непрерывно продолженной на $E \setminus (\overline{E^0})$ так, чтобы на $\bigcup V_{n_k}$ выполнялось соотношение $|f(z)| = O(\varepsilon_0(z))$, при $\rho(z, \partial D) \to 0$.

Если функция $g \in A(D)$ удовлетворяет (1), то из второго неравенства, согласно выбору $\varepsilon_0$ имеем $g = 0$, что не согласуется с первым неравенством.

Доказательство необходимости условия в) вполне аналогично проведенному доказательству необходимости б) с той лишь разницей, что вместо областей $V_n$ нужно рассматривать области $E_n \setminus K$.

Достаточность. Пусть $h \in A(D)$ — функция, имеющая одинаковые нули с $f$ той же кратности. Тогда функция $\tilde{f} = f/h \in A(E)$ не имеет нулей на $E$. Учитывая односвязность компонент внутренности $E$, рассмотрим функцию $\log \tilde{f} \in A(E)$. Функция $\log|\tilde{f}|$ непрерывна на $E$ и гармоническая на $E^0$. Доопределим $\log|\tilde{f}|$ на $\hat{E}$, продолжив ее на $\hat{E} \setminus E$ решением задачи Дирихле с граничной функцией $\log|\tilde{f}|$. В силу условия в), полученная таким образом функция $f_*$ будет непрерывной на $\hat{E}$ и гармонической в $(\hat{E}^0)$. В силу условия б) множество $D^* \setminus \hat{E}$ связно и локально связно. Поэтому согласно теореме П. М. Готье, Р. М. Гольдстейна, М. Лабреш. У. Оу и В. Хенгартнера (см. работы [13] и [14]), существует гармоническая в $D$ функция $u$ такая, что $|f_* - u| < \log c$ на $\hat{E}$.

В силу односвязности $D$ существует однозначная в $D$ гармонически сопряженная к $u$ функция $v$. Составим функцию $\bar{g} = \exp(u + iv)$ и заметим, что функция $g = \tilde{g}h$ обладает требуемыми свойствами.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{z_n\} \subset E^0$ — нули функции $f$ ($\{z_n\}' \subset \partial D$) и функция $\varphi \in A(D)$ в точках $z_n$ интерполирует функцию $\psi$ с кратностьями, не ниже порядков соответствующих нулей функции $f$. Пусть $g \in A(D)$ — функция, удовлетворяющая (1). Ясно что в точках $\{z_n\}$ порядки нулей $g$ и $f$ совпадают. По построению, $(\psi - \varphi)/g \in A(E)$. Согласно теореме о равномерной аппроксимации аналитическими функциями [3], существует функция $\tilde{h} \in A(D)$ такая, что

$$\left|\frac{\psi - \varphi}{g} - \tilde{h}\right| < \frac{\varepsilon}{c} \text{ на } E.$$

Тогда, $|\psi - h| < \dfrac{\varepsilon}{c}|g| < \varepsilon$ на $E$, где $h = \varphi + g\tilde{h} \in A(D)$.

Замечания. Из беседы с Н. У. Аракеляном автору стало известно, что им ранее было получено доказательство возможности неравенства, аналогичного правому неравенству в (1) для односвязной области $D$ и ее относительно замкнутого подмножества со связным и локально связным дополнением в $D^*$ (не опублнковано).

Из полученного недавно препринта нам также стало известно, что П. М. Готье, В. Хенгартнер и А. Страй независимо от нас получили описание рубелевых подмножеств плоскости, имеющих пустую внутренность.

Ереванский государственный университет

Поступила 9. II. 1989

Ա. Հ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Լ. Ա. Ռուբելի մի խնդիր և որոշ հարակից հարցեր. *(ամփոփում)*

*Հոդվածում բերվում է Լ. Ա. Ռուբելի մի խնդրի լուծումը պարունակող թեորեմը հարթության դատարկ ներքով փակ ենթաբազմությունների դեպքի համար, որը ձևակերպված էր (2) հոդվածում մեջ։ Նշված թեորեմն այնուհետև կիրառված է որոշ հարակից հարցերի քննարկման մեջ։*

A. H. NERSESSIAN. *A problem of L. A. Rubel and relaited questons* (summary)

This note presents the proof of a theorem amrour ced in [2]. offering a solution of a certain problem of L. A. Rubel for the case of closed planar sets witho. t interior. The theorem is then applied to some releted questions.

1. *M. Goldstein.* An example of an Arakelian glove which is a weak Arakelia:. set Illin. Journ, Math., 1983, v. 27, № 1. 138—144.
2. *А. А. Нерсесян.* Гармоническая аппроксимация и решение одной задачи Л. А. Рубеля, ДАН АрмССР, 34, № 3, 1987, 104—106.
3. *Н. У. Аракелян.* Равномерное и касательное приближение аналитическими функциями, Изв. АН АрмССР, «Математика», 3, № 4—5, 1968, 273—286.
4. *Р. Ш. Саакян.* Об одном обобщении принципа максимума, Изв. АН АрмССР «Математика», 22, № 1, 1987, 94—101.
5. *P. M. Gauthier, R. Grothman, W. Hengartner.* Asymptotic maximum principles for subharmonic and peurisub harmonic functions. Univ. de Montreal Press 1987, № 87—5.
6. *P. M. Gauthier.* Taugenfial approximafion by entire functions and functions harmonic in a disc, Изв. АН АрмССР, «Математика», № 5, 1969, 319—326.
7. *А. А. Нерсесян.* О множествах Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, «Математика» 6, № 6, 1971, 465—471.
8. *N. U. Arakelian, P. M. Gauthier.* On tangential, approximation by holomorphic funcions. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 7, № 6, 1982, 419—441.
9. *A. Sinclair.* Strong Carleman and sfrong unijorm approximation, Pacijic, Journ, Math, 117, № 2, 1985, 417—428.
10. *А. А. Нерсесян.* Аппроксимация гармоническими функциями на замкнутых подмножествах плоских областей, Изв. АН АрмССР, «Математика», 25, № 3, 1990, 274—283.
11. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, М., Мир, 1973.
12. *Л. Д. Иванов.* Вариации множеств и функций, М., Наука, 1975.
13. *P. M. Gauthier, M. Goldstein, W. H. Ow.* Uniform approximation on unbounded sets by barmonic functions with logarithmic singularities, Trans. Amer. Math Soc., 261, № 1, 1980, 169—183.
14. *M. P. Labrèche.* De l'approximation harmonique uniforme, Thèse, Univ, de Montreal, 1982.