ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 2, 1991 Математика

УДК 517.51

Ф. А. ТАЛАЛЯН

О СУЩЕСТВЕННО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Введение

В нашей совместной с А. А. Талаляном работе [1] было введено и изучено некоторое обобщение понятия абсолютной непрерывности функций многих переменных. Функции, обладающие указанным свойством абсолютной непрерывности, мы в дальнейшем будем называть существенно абсолютно непрерывными. по Каратеодери*. Существенно абсолютная непрерывность по Каратеодери определяется с помощью понятия существенно абсолютной непрерывности по Витали в заданной области. Настоящая работа посвящана дальнейшему изучению указанных понятий. Доказываются две теоремы. Теорема 1 — о функциях, существенно абсолютно непрерывных по Витали, является обобщением теоремы 1 работы [1]. Теорема 2 устанавливает связь между существенно обсолютной непрерывностью по Каратеодори и наличием у рассматриваемой функции обобщенных производных.

Сначала приведем (с некоторыми изменениями) обозначения и определения, введенные в [1].

Через R^m обозначим m-мерное евклидово пространство. Если $\mathbf{x} \in R^m$, то через $x_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ обозначим i-ю координату $\mathbf{x}$. Таким образом $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_m)$. Аналогично $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_m)$, $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_m)$ и т. д.

Пусть $\mathbf{x} \in R^m$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $i_1, \cdots, i_k$ — произвольный набор попарно различных натуральных чисел, заключенны между 1 и m. Обозначим через $r^{i_1, \cdots,} (\mathbf{x})$ точку из R^{m-k}, полученную из $\mathbf{x}$ удалением координат $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ и через $t^{i_1, \cdots, i_k}(\mathbf{x})$ — точку из R^k, полученную из $\mathbf{x}$, сохранением указанных координат и удалением остальных.

Если $E \subset R^m$ и $\mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_k) \in R^k$, то мы полагаем

$$r^{i_1, \cdots, i_k} (E) = \{r^{i_1, \cdots, i_k} (\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}$$

$$t^{i_1, \cdots, i_k} (E) = \{t^{i_1, \cdots, i_k} (\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}$$

и

$$E_{\mathbf{w}}^{i_1, \cdots, i_k} = \{t^{i_1, \cdots, i_k} (\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E,\ t^{i_1, \cdots, i_k} (\mathbf{x}) = \mathbf{w}\}.$$

* В [1] эти функции названы обобщенно абсолютно непрерывными.

Наконец, если F—функция m переменных, определенная на множестве E, то через $F_{\mathbf{w}}^{i_1,\cdots,i_k}$ мы обозначим функцию $m-k$ переменных, определенную на $E_{\mathbf{w}}^{i_1,\cdots,i_k}$ равенством

$$F_{\mathbf{w}}^{i_1,\cdots,i_k}(r^{i_1,\cdots,i_k}(\mathbf{x}))=F(\mathbf{x}).$$

Иногда вместо $E_{\mathbf{w}}^{i_1,\cdots,i_k}$ и $F_{\mathbf{w}}^{i_1,\cdots,i_k}$ мы будем писать соответственно $E_{w_{i_1},\cdots,w_{i_k}}^{i_1,\cdots,i_k}$ и $F_{w_{i_1},\cdots,w_{i_k}}^{i_1,\cdots,i_k}$.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — две точки из R^m такие, что $a_i \neq b_i$ для всех $i=1,\cdots,m$. Положим

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=\{\mathbf{x}\in R^m : \min\ (a_i,\ b_i)\leqslant x_i\leqslant \max(a_i,\ b_i);\ i=1,\cdots,m\},$$

т. е $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$—это замкнутый m-мерный сегмент с ребрами, параллельными координатным осям, определенный точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Всюду в дальнейшем, имея дело с сегментами, мы будем подразумевать сегменты указанного вида. Вершины сегмента $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ — это те точки $\mathbf{v}\in R^m$, для которых при любом $i=1,\cdots,m$ либо $v_i=a_i$, либо $v_i=b_i$. Очевидно каждый m-мерный сегмент может быть задан любой парой своих вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ таких, что $u_i\neq v_i$, $i=1,\cdots,m$. В этом случае мы будем говорить, что пара вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ является определяющей для данного сегмента.

Пусть J—некоторый m-мерный сегмент. Будем говорить, что сегмент J маркирован, если каждой его вершине приписан знак $+$ или $-$ так, что знаки, приписанные соседним вершинам (т. е. вершинам, у которых все координаты кроме одной совпадают) различны. Если $\mathbf{v}$ — вершина маркированного сегмента J, то приписанный ей знак будем обозначать через $s(\mathbf{v};\ J)$.

Пусть $\mathbf{a}$—некоторая фиксированная вершина сегмента J. Каждой вершине $\mathbf{v}$ припишем знак $(-1)^{q(\mathbf{v},\mathbf{a})}$, где $q(\mathbf{v},\ \mathbf{a})$—число координат v_i вершины $\mathbf{v}$, совпадающих с соответствующими координатами a_i* выбранной вершины $\mathbf{a}$. Таким образом, выбор одной вершины задает определенную маркировку на данном сегменте. Справедливо и обратное. Каждая маркировка определяется некоторой вершиной. Для любых двух фиксированных вершин $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ сегмента J разность $q(\mathbf{v},\mathbf{a})-q(\mathbf{a},\ \mathbf{c})$ имеет постоянную четность ([1], лемма 4). Поэтому на каждом сегменте возможны только две маркировки. Будем говорить, что m-мерный сегмент J маркирован положительно, если его маркировка совпадает с маркировкой, определяемой вершиной с минимальными координатами. В противном случае J называется отрицательно маркированной.

Если m-мерный сегмент J маркирован по вершине $\mathbf{a}$, $1\leqslant k\leqslant m-1$ и $i_1,\cdots,i_k$ — попарно различные натуральные числа, заключенные между 1 и m, то $(m-k)$-мерный сегмент $r^{i_1,\cdots,i_k}(J)$ всегда будем считать маркированным по вершине $r^{i_1,\cdots,i_k}(a)$. Аналогично понимается выражение $t^{i_1,\cdots,i_k}(J)$. Маркированные сегменты $r^{i_1,\cdots,i_k}(J)$ и

* Для данного понятия в [1] был использован термин ориентация.

$J^{i_1,\cdots,i_k}(J)$ будем называть маркированными проекциями маркированного сегмента.

Пусть J—маркированный m-мерный сегмент и F-действительная функция m переменных, область определения которой содержит все вершины J. Положим

$$\Delta_m(F;\ J)=\sum s(\mathbf{v};\ J)F(\mathbf{v}),$$

где сумма берется по всем вершинам $\mathbf{v}$ сегмента J. Величину $\Delta_m(F,\ J)$ принято называть разностью (или смешанной разностью) F на J. Очевидно при переходе к противоположной маркировке разность меняет знак.

Если F—функция m переменных, J—k-мерный маркированный сегмент, причем $k<m$, и если $i_1<\cdots<i_k$—попарно различные натуральные числа, заключенные между 1 и m, то через $\Delta_k^{i_1,\cdots,i_k}(F,\ J)$ мы обозначим разность F на J, взятую относительно переменных с номерами $i_1,\cdots,i_k$. Таким образом, $\Delta_k^{i_1,\cdots,i_k}(F;\ J)$ будет функцией остальных переменных.

Далее интеграл

$$\int\limits_J f d\mu_m\ (\mu_m - m\text{-мерная мера Лебега})$$

от измеримой функции f по маркированному сегменту J полагается, по определению, равным обычному интегралу Лебега, умноженному на коэфициент $+1$ или -1 в зависимости от того, положительно или отрицательно маркирован J.

Теперь мы можем перейти к понятию существенно абсолютной непрерывности по Каратеодори.

Пусть Ω—область в E^m и F—действительная функция, заданная на Ω.

Определение 1. Функция F называется существенно абсолютно непрерывной по Витали в Ω, если существует множество $E\subset\Omega$ с $\mu_m(\Omega\setminus E)=0$, обладающее следующим свойством: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k;\ k=1,\cdots,n\}$ попарно неперекрывающихся m-мерных сегментов $J_k\subset\Omega$ с вершинами из E и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_m(J_k)<\delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta_m(F,\ J_k)|<\varepsilon.$$

Определение 2. Функция F называется локально существенно абсолютно непрерывной по Витали в Ω, если существует множество $E\subset\Omega$ с $\mu_m(\Omega\setminus E)=0$ такое, что для каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\overline{\Omega}_0\subset\Omega$ и каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что каково бы ни было конечное семейство $\{J_k;\ k=1,\cdots,n\}$ попарно неперекрывающихся m-мерных сегментов $J_k \subset \Omega_0$ с вершинами из $\Omega_0 \cap E$ и с суммой мер

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_m(J_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta_m(F;\ J_k)| < \varepsilon.$$

Заметим, что локальная существенно абсолютная непрерывность по Витали в Ω эквивалентна существенно абсолютной непрерывности по Витали в каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$.

Определение 3. Функция F называется существенно абсолютно непрерывной по Каратеодори в Ω, если

1. F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω.

2. Для каждого набора попарно различных натуральных чисел $i_1, \cdots, i_k$ таких, что $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $1 < i_p < m$; $p = 1, \cdots, k$ для μ_k — почти всех $u \in t^{i_1, \cdots, i_k}(\Omega)$ функция $F_u^{i_1, \cdots, i_k}$ существенно абсолютно непрерывна по Витали в $\Omega_u^{i_1, \cdots, i_k}$.

Определение 4. Функция F называется локально существенно абсолютно непрерывной по Каратеодори в Ω, если F существенно абсолютно непрерывна в каждой ограниченной области Ω_0 с замыканием $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть F-локально существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω. Тогда существует единственная локально интегрируемая в Ω функция f и множество $M \subset \Omega$ с $\mu(\Omega \setminus M) = 0$ такие, что для каждого замкнутого m-мерного сегмента $J \subset \Omega$, вершины которого принадлежат M, имеет место равенство*

$$\Delta_m(F;\ J) = \int_J f d\mu_m. \tag{1}$$

Если область Ω ограничена и F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω, то функция f из (1) будет интегрируемой в Ω.

Теорема 2. *Следующие условия равносильны:*

1. *F локально существенно абсолютно непрерывна по Каратеодори в Ω.*

2. *Для каждого мультииндекса α с компонентами, равными 0 или 1, в Ω существует обобщенная производная $D^\alpha F$.*

§ 2. Предварительные леммы

Лемма 1. *Пусть J-маркированный m-мерный сегмент и $c \in R^m$ — точка, не лежащая на $(m-1)$-мерных гиперплоскостях, определенных $(m-1)$-мерными гранями J. Тогда справедливы равенства*

$$\Delta_m(F;\ J) = \sum_{w} s(w;\ J)\, \Delta_m(F;\ [c,\ w]) \tag{2}$$

и

$$\int_J f d\mu_m = \sum_{w} s(w;\ J) \int_{[c,\ w]} f d\mu_m. \tag{13}$$

где суммирование производится по всем вершинам $\mathbf{w}$ *сегмента* J *и* $[\mathbf{c}, \mathbf{w}]$ *считается маркированным по вершине* $\mathbf{c}$.

Доказательство. Пусть $J=[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ маркирован по вершине $\mathbf{a}$. По условию $c_i \neq a_i$ и $c_i \neq b_i$ для всех $i=1, \cdots, m$. Каждая вершина $\mathbf{v}$ сегмента J является вершиной только для одного сегмента $[\mathbf{c}, \mathbf{w}]$, при $\mathbf{w}=\mathbf{v}$. Следовательно $F(\mathbf{v})$ входит в правую часть (2) с коэффициентом $s(\mathbf{v}; J)$. Пусть теперь $\mathbf{v}$ — вершина некоторого сегмента $[\mathbf{c}, \mathbf{w}]$, участвовавшего в (2), отличен от вершин J. Пусть $i_1, \cdots, i_n$ — все те натуральные числа между 1 и m, для которых $v_{i_k}=c_{i_k}$; $i=1, \cdots, n$. В рассматриваемом случае $n \geqslant 1$. Очевидно $\mathbf{v}$ будет вершиной сегмента $[\mathbf{c}, \mathbf{w}]$ для всех 2^n вершин $\mathbf{w}$ сегмента J, для которых $w_{i_k}=a_{i_k}$ или $w_{i_k}=b_{i_k}$, $k=1, \cdots, n$ и в $\Delta_m(F; [\mathbf{c}, \mathbf{w}])$ $F(\mathbf{v})$ входит с одним и тем же коэффициентом $(-1)^n$. С другой стороны, суммируя по всем указанным $\mathbf{w}$, будем иметь

$$\sum \{s(\mathbf{w}; J) : w_{i_k}=a_{i_k} \text{ или } w_{i_k}=b_{i_k};\ k=1, \cdots, n\}=0.$$

Таким образом, для рассматриваемой вершины $\mathbf{v}$ коэффициент при $F(\mathbf{v})$ в правой части (2) равен нулю. Этим равенство (2) доказано.

Далее заметим, что для каждой вершины $\mathbf{w}$ сегмента J с координатами

$$w_i=\begin{cases} \min(a_i, b_i), \text{ если } \max(a_i, b_i)<c_i \\ \max(a_i, b_i), \text{ если } c_i<\min(a_i, b_i) \\ a_i \text{ или } b_i \text{ — для остальных } i \end{cases} \tag{4}$$

маркировка сегмента $[\mathbf{c}, \mathbf{w}]$ совпадает с маркировкой сегмента $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в зависимости от того положителен или нет знак $s(\mathbf{w}; J)$.

Действительно, для данной вершины $\mathbf{w}$, удовлетворяющей (4), рассмотрим следующие подмножества отрезка натурального ряда $\{1, \ldots, m\}$.

$$A_1=\{i: c_i<a_i<b_i\},\ A_2=\{i: a_i<c_i<b_i,\ w_i=a_i\},$$

$$A_3=\{i: a_i<c_i<b_i,\ w_i=b_i\},\ A_4=\{i: a_i<b_i<c_i\},$$

$$A_5=\{i: a_i>b_i>c_i\},\ A_6=\{i: a_i>c_i>b_i,\ w_i=a_i\}.$$

Пусть n_k — это число элементов A_k; $k=1, \cdots, 6$. Тогда $p=n_1+n_3+n_5+n_6$ есть число тех значений i, при которых $c_i<w_i$, $q=n_2+n_4+n_5+n_6$ есть число тех значений i, при которых $w_i=a_i$ и $l=n_1+n_2+n_3+n_4$ есть число тех значений i, при которых $a_i<b_i$. Имеем $p+q+l=2n_3+2n_6$, откуда получаем, что p и l имеют одинаковую четность в том и только в том случае, когда q — четное число или, что то же самое, сегменты $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $[\mathbf{c}, \mathbf{w}]$ одинаково маркированы тогда и только тогда, когда $s(\mathbf{w}, J)=(-1)^q$ положителен.

Таким образом, для указанных вершин $\mathbf{w}$ выражение

$$s(\mathbf{w}; J)\int\limits_{[\mathbf{c}, \mathbf{w}]} f\, d\mu_m$$

представляет собой интеграл по сегменту, маркировка которого согласована с маркировкой J. Для остальных вершин имеем $\mu_m(J \cap [c, w]) = 0$. Отсюда

$$\sum s(w; J) \int\limits_{[c, w] \cap J} f d\mu_m = \int\limits_J f d\mu_m. \tag{5}$$

С другой стороны, легко видеть, что интегралы по множествам $[c, w] \setminus J$ под знаком суммы в (3) взаимно сокращаются, откуда получаем

$$\sum_w s(w; J) \int\limits_{[c, w] \setminus J} f d\mu_m = 0. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует (3). Лемма 1 доказана.

В следующей лемме и далее, через 1_m обозначен m-мерный мультииндекс, все компоненты которого равны 1.

Лемма 2. *Пусть $\Omega \in R^m$ — некоторая область и F — действительная функция, обладающая в Ω обобщенной производной $D^{1_m} F = f$. Тогда F локально существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω.*

Доказательство. Так как, по условию, F и f локально суммируемы в Ω, то имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon = F \text{ и } \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = f \text{ в } L^1_{loc}(\Omega), \tag{7}$$

где F_ε и f_ε — это ε-усреднения F и f соответственно.

Для каждого $x \in \Omega$ при $\varepsilon < \operatorname{dis}(x, \partial\Omega)$ справедливо также равенство

$$D^{1_m} F_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x). \tag{8}$$

Исходя из (7), с помощью диагонального процесса можно построить последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и множество $E \subset \Omega$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\mu_m(\Omega \setminus E) = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{n \to \infty} F_{\varepsilon_n}(x) = F(x), \ x \in E \tag{10}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} f_{\varepsilon_n}(x) = f(x), \ x \in E. \tag{11}$$

Далее, для каждого m-мерного сегмента $J \subset \Omega$, вершины которого принадлежат E, справедливо равенство

$$\Delta_m(F; J) = \int\limits_J f d\mu_m. \tag{12}$$

Действительно. Пусть a, b — определяющая пара вершин для J, причем a — это вершина с минимальными координатами. В силу (8) для достаточно больших n имеем

$$\int_J f_{\varepsilon_n} d\mu_m = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} dx_{m-1} \int_{a_m}^{b_m} \frac{\partial^m F_{\varepsilon_n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_{m-1} \partial x_m} (x_1, \cdots, x_{m-1}, x_m)\, dx_m =$$

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{m-0}}^{b_{m-1}} \Delta_1^m \left(\frac{\partial^m F_{\varepsilon_n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_{m-1}} ;\ [a_m, b_m] \right) dx_{m-1} =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{m-2}}^{b_{m-2}} \Delta_2^{m-1, m} \left(\frac{\partial^{m-2} F_{\varepsilon_n}}{\partial x_1 \cdots \partial x_{m-2}} ;\ [a_{m-1}, b_{m-1}] \right.$$

$$\left. \times [a_m, b_m] \right) dx_{m-2} = \cdots = \Delta_m (F_{\varepsilon_n};\ J). \tag{13}$$

Так как вершины J принадлежат E, то в силу (10)

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_m (F_{\varepsilon_n};\ J) = \Delta_m (F;\ J). \tag{14}$$

Равенство (12) следует из (11), (13) и (14), в силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Пусть теперь Ω_0—произвольная ограниченная область с замыканием $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Тогда интеграл

$$\int_A f d\mu_m$$

является абсолютно непрерывной функцией на измеримых подмножествах $A \subset \Omega_0$. Отсюда, а также из равенств (9) и (12) следует, что F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω_0.

Лемма 3. *Пусть Ω — область в R^m, F — действительная измеримая функция, заданная в Ω, $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $i_1, \cdots, i_k$ — попарно различные натуральные числа, заключенные между 1 и m, занумерованные по возрастанию. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ — мультииндекс с компонентами*

$$c_j = \begin{cases} 0, & \text{при } j = i_1, \cdots, i_k \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{15}$$

Тогда, если в Ω существует обобщенная производная $D^\alpha F$, то для μ_k-почти всех $u = (u_1, \cdots, u_k) \in t^{i_1, \cdots, i_k}(\Omega)$ в $\Omega_u^{i_1, \cdots, i}$ существует обобщенная производная

$$D^{1_{m-1}} F_u^{i_1, \cdots, i_k} = (D^\alpha F)_u^{i_1, \cdots, i_k}. \tag{16}$$

Доказательство. Надо доказать, что μ_k-почти все точки $u \in t^{i_1, \cdots, i_k}(\Omega)$ обладают тем свойством, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty (\Omega_u^{i_1, \cdots, i_k})$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega_u^{i_1,\ldots,i_k}} F_u^{i_1,\ldots,i_k} D^1{}^{m-k}\varphi d\mu_{m-k} = (-1)^{m-k} \int\limits_{\Omega_u^{i_1,\ldots,i_k}} (D^\alpha F)_u^{i_1,\ldots,i_k} \varphi d\mu_{m-k}. \quad (17)$$

Сначала докажем, что если J есть m-мерный сегмент с замыканием $\bar{J}\subset\Omega$, то для почти всех $u\in t^{i_1,\ldots,i_k}(J)$ равенство

$$\int\limits_{r^{i_1,\ldots,i_k}(J)} F_u^{i_1,\ldots,i_k}(v) \frac{\partial^{m-k}\varphi(v)}{\partial v_1\cdots\partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v) =$$

$$= (-1)^{m-k} \int\limits_{r^{i_1,\ldots,i_k}(J)} (D^\alpha F)_u^{i_1,\ldots,i_k}(v)\,\varphi(v)\,d\mu_{m-k}(v) \quad (18)$$

выполняется для каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(r^{i_1,\ldots,i_k}(J))$. (Заметим, что $J_u^{i_1,\ldots,i_k} = r^{i_1,\ldots,i_k}(J)$ для каждого $u\in t^{i_1,\ldots,i_k}(J)$).

Действительно, пусть $\varphi\in C_0^\infty(r^{i_1,\ldots,i_k}(J))$ задано. Так как F и $D^\alpha F$ суммируемы на J, то для произвольной функции $\psi\in C_0^\infty(t^{i_1,\ldots,i_k}(J))$ в силу теоремы Фубини имеем

$$\int\limits_{t^{i_1,\ldots,i_k}(J)} \left(\int\limits_{r^{i_1,\ldots,i_k}(J)} F_u^{i_1,\ldots,i_k}(v) \frac{\partial^{m-k}\varphi(v)}{\partial v_1\cdots\partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v)\right)\psi(u)\,d\mu_k(u) =$$

$$= \int\limits_{t^{i_1,\ldots,i_k}(J)} \left(\int\limits_{r^{i_1,\ldots,i_k}(J)} F_u^{i_1,\ldots,i_k}(v) \frac{\partial^{m-k}(\varphi(v)\psi(u))}{\partial v_1\cdots\partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v)\right) d\mu_k(u) =$$

$$= \int\limits_J FD^\alpha(\varphi\psi)\,d\mu_m = (-1)^{m-k}\int\limits_J D^\alpha F\cdot\varphi\psi d\mu_m =$$

$$= (-1)^{m-k} \int\limits_{t^{i_1,\ldots,i_k}(J)} \left(\int\limits_{r^{i_1,\ldots,i_k}(J)} (D^\alpha F)_u^{i_1,\ldots,i_k}(v)\,\varphi(v)\,d\mu_{m-k}(v)\right)\psi(u)\,d\mu_k(u) =$$

$$= \int\limits_{t^{i_1,\ldots,i_k}(J)} \left((-1)^{m-k} \int\limits_{r^{i_1,\ldots,i_k}(J)} (D^\alpha F)_u^{i_1,\ldots,i_k}(v)\,\varphi(v)\,d\mu_{m-k}(v)\right)\psi(u)\,d\mu_k(u).$$

Отсюда, в силу произвольности ψ получаем, что при заданном $\varphi\in C_0^\infty(r^{i_1,\ldots,i_k}(J))$ равенство (18) выполняется μ_k-почти всюду на $t^{i_1,\ldots,i_k}(J)$. Наконец, используя сепарабельность пространства $C_0^\infty(r^{i_1,\ldots,i_k}(J))$ (2, § 27, 2 (5)) легко доказать, что для μ_k-почти всех $u\in t^{i_1,\ldots,i_k}(J)$ равенство (18) выполняется для каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(r^{i_1,\ldots,i_k}(J))$.

Теперь приступим непосредственно к доказательству (17). Для этого заметим, что из (18) следует, что для μ_k-почти всех $u\in t^{i_1,\ldots,i_k}(\Omega)$ имеет место следующее: для каждого m-мерного сегмента $J\subset\Omega$ с рациональными вершинами (точку из R^m назовем рациональной, если все ее координаты рациональны) такого, что $u \in t^{l_1, \ldots, l_k}(J)$ и для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(r^{l_1, \ldots, l_k}(J))$ имеет место равенство (18).

Пусть u принадлежит указанному множеству полной меры в $i^{l_1, \ldots, l_k}(\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_u^{l_1, \ldots, l_k})$. Построив разбиение единицы на supp (φ) (supp (φ) — это носитель φ), подчиненное покрытию конечным числом $(m-k)$-мерных открытых сегментов с рациональными вершинами, замыкания которых содержатся в $\Omega_u^{l_1, \ldots, l_k}$, мы можем представить φ в виде

$$\varphi = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l; \quad \varphi_l \in C_0^\infty(\Omega_u^{l_1, \ldots, l_k}), \tag{19}$$

где для каждого $l = 1, \ldots, n$ существует m-мерный сегмент $J_l \subset \Omega$ с рациональными вершинами такой, что

$$u \in t^{l_1, \ldots, l_k}(J_l) \text{ и } \operatorname{supp}(\varphi_l) \subset r^{l_1, \ldots, l_k}(J_l); \quad l = 1, \cdots, n.$$

Тогда, в силу (17), для каждого $l = 1, \ldots, n$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_u^{l_1, \ldots, l_k}} F_u^{l_1, \ldots, l_k} D^{1^{m-k}} \varphi_l \, d\mu_{m-k} \quad \int\limits_{r^{l_1, \ldots, l_k}(J_l)} F_u^{l_1, \ldots, l_k} \frac{\partial^{m-k} \varphi_l(v)}{\partial v_1 \cdots \partial v_{m-k}} d\mu_{m-k}(v) =$$

$$= (-1)^{m-k} \int\limits_{r^{l_1, \ldots, l_k}(J_l)} (D^\alpha F)_u^{l_1, \ldots, l_k}(v) \, \varphi_l(v) \, d\mu_{m-k}(v) =$$

$$= (-1)^{m-k} \int\limits_{\Omega_u^{l_1, \ldots, l_k}} (D^\alpha F)_u^{l_1, \ldots, l_k} \varphi_l \, d\mu_{m-k}. \tag{20}$$

Суммируя по l от 1 до n обе части равенства (20) и учитывая (19), получим (17), что и требовалось.

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что каков бы ни был замкнутый m-мерный сегмент $I \subset \Omega$, существует функция $f_I \in L^1(I)$ и множество $M_I \subset I$ с $\mu_m(I \setminus M_I) = 0$ такие, что для каждого сегмента $J \subset I$ с вершинами из M_I, имеет место равенство

$$\Delta_m(F; (J) = \int\limits_J f_I \, d\mu_m, \tag{21}$$

Действительно. Согласно [1] (теорема 1) существует точка $c \in I$ и функция $f \in L^1(I)$ такие, что для почти всех $x \in I$

$$\Delta_m(F; [c, x]) = \int\limits_{[c, x]} f d\mu_m. \tag{22}$$

Положим $f_I = f$ и в качестве M_I возьмем множество всех тех точек $x \in I$, для которых справедливо (22) и кроме того $x_i \neq c_i$ для всех $i = 1, \cdots, m$.

Пусть теперь $J \subset I$—произвольный сегмент с вершинами из M_I. Тогда применяя последовательно (2), (22) и (3), будем иметь

$$\Delta_m(F;\ J) = \sum_{\mathbf{w}} s(\mathbf{w};\ J)\, \Delta_m(F;\ [\mathbf{c},\ \mathbf{w}]) =$$

$$= \sum_{\mathbf{w}} s(\mathbf{w};\ J) \int_{[\mathbf{c},\ \mathbf{w}]} f_I\, d\mu_m = \int_J f_I\, d\mu_m.$$

Таким образом, равенство (21) доказано.

Далее представим Ω в виде

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k. \qquad (23)$$

где каждое Q_k есть замкнутый m-мерный двоичный куб, причем различные Q_k не перекрываются и каждое компактное подмножество Ω покрывается объединением конечного числа кубов Q_k. Пусть для каждого $k = 1, 2\cdots, f_{Q_k}$ и $M_{Q_k} \subset \operatorname{int}(Q_k)$ построены согласно (21). Положим

$$f(\mathbf{x}) = f_{Q_k}(\mathbf{x}), \text{ если } \mathbf{x} \in Q_k. \qquad (24)$$

Перейдем к построению множества M. Пусть $E \subset \Omega$—множество, удовлетворяющее условию локальной существенно абсолютной непрерывности по Витали F. Применяя теорему Фубини и удаляя из $E \cap (\bigcup Q_k)$ подходящее множество нулевой меры, можно построить множество M такое, что

$$M \subset E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_{Q_k}\right), \quad \mu_m(\Omega \setminus M) = 0 \qquad (25)$$

и для каждого действительного t и $i = 1, \ldots, m$

$$M_t^i = \varnothing \text{ или } \mu_{m-1}(\Omega_t^i \setminus M_t^i) = 0. \qquad (26)$$

Очевидно $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ и $\mu_m(\Omega \setminus M) = 0$. Докажем, что f и M удовлетворяют (1).

Пусть $J \subset \Omega$—замкнутый m-мерный сегмент с вершинами из M. Для каждого заданного $\delta > 0$, выбирая n настолько большим, чтобы

$$J \subset \bigcup_{k=1}^{n} Q_k$$

и воспользуясь условиями (25) и (26), сегмент J можно представить в виде конечного объединения попарно неперекрывающихся сегментов

$$J = \left(\bigcup_{l=1}^{p} J_l'\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{q} J_l''\right) \qquad (27)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) Каждый сегмент J_l' содержится в некотором кубе Q_k, $k \leqslant n$ и его вершины принадлежат соответствующему множеству M_{Q_k}.

2) Вершины каждого сегмента J_l'' принадлежат множеству E и

$$\sum_{l=1}^{q} \mu_m(J_l'') < \delta. \qquad (28)$$

Пусть задано $\varepsilon>0$. Выберем число $\delta>0$ так, чтобы оно удовлетворяло условию локальной существенно абсолютной непрерывности по Витали функции F и, чтобы при $A\subset J$ и $\mu_m(A)<\delta$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_A f d\mu_m\right| < \varepsilon. \tag{29}$$

Для выбранного δ построим разложение (27). Тогда, рассматривая на сегментах J'_l и J''_l маркировки, согласованные с маркировкой J, в силу (21), (24)—(29) и лемме 6 работы [1], будем иметь

$$\begin{gathered}\left|\Delta_m(F;\,J)-\int_J f d\mu_m\right| \leqslant \left|\sum_{l=1}^{p}\Delta_m(F;\,J'_l)-\sum_{l=1}^{p}\int_{J'_l} f d\mu_m\right|+ \\ +\left|\sum_{l=1}^{q}\Delta_m(F;\,J''_l)\right|+\left|\int_{\cup J''_l} f d\mu_m\right|\leqslant 2\varepsilon.\end{gathered} \tag{30}$$

В силу произвольности ε, из (30) получим (1). Единственность функции f следует из теоремы Фубини и теоремы о точках Лебега интегрируемой функции.

Наконец, рассмотрим случай, когда область Ω ограничена и функция F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω. Представим Ω в виде объединения счетного числа попарно неперекрывающихся сегментов с вершинами из M: $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_k$. Положим

$$\Omega_n=\bigcup_{k=1}^{n} J_k;\ n=1, 2, \cdots.$$

Имеем

$$\left|\int_{\Omega_q} f d\mu_m-\int_{\Omega_p} f d\mu_m\right|=\left|\sum_{k=p+1}^{q}\int_{J_k} f d\mu_m\right|=\left|\sum_{k=p+1}^{q}\Delta_m(F;\,J_k)\right|. \tag{31}$$

Так как $\mu_m(\Omega_p)\to\mu_m(\Omega)$ при $p\to\infty$, то из (31) следует, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n} f d\mu_m$$

существует и конечен для любой последовательности областей Ω_n указанного вида. Отсюда следует интегрируемость f в Ω.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть выполняется 2) и Ω_0 есть ограниченная область в R^m с замыканием $\Omega_0\subset\Omega$. Так как в Ω существует обобщенная производная $D^{1_m}F$, то согласно лемме 2 функция F существенно абсолютно непрерывна по Витали в Ω_0.

Далее, пусть заданы натуральные числа $i_1,\cdots, i_k$ $(1<k\leqslant m-1$, $1\leqslant i_1,\cdots, i_k\leqslant m)$. Определим мультииндекс α согласно (15). Так как

на Ω существует обобщенная производная $D^{\alpha}F$, то по лемме 3 для μ_k-почти для всех $u \in t^{i_1,\cdots,i_k}(\Omega)$ в $\Omega_{u_1}^{i_1,\cdots,i_k}$ существует обобщенная производная $D^{1_{m-k}}F_u^{i_1,\cdots,i_k}$. Применяя лемму 1 к $F_u^{i_1,\cdots,i_k}$ и $\Omega_u^{i_1,\cdots,i_k}$ мы получаем, что $F_u^{i_1,\cdots,i_k}$ локально существенно абсолютно непрерывна по Витали в $\Omega_u^{i_1,\cdots,i_k}$. Следовательно, для μ_k-почти всех $u \in t_u^{i_1,\cdots,i_k}(\Omega)$ функция $F_u^{i_1,\cdots,i_k}$ существенно абсолютно непрерывна по Витали в $(\Omega_0)_u^{i_1,\cdots,i_k}$.

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Сначала докажем, что на каждом сегменте J с замыканием $\bar{J} \subset \Omega$ существует интегрируемая обобщенная производная $D^{\alpha}F$.

Действительно, пусть $J = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, где $a_i < b_i$; $i = 1, \cdots, m$ и $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, где

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j = l_1, \cdots, l_n \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{32}$$

Как доказано в [1] существует постоянная C и функции $f \in L^1(J)$ и $f_{i_1,\cdots,i_k} \in L^1(r^{i_1,\cdots,i_k}(J))$ для всех наборов попарно различных натуральных чисел $1 < i_1, \cdots, i_k \leqslant m$, такие, что для почти всех $\mathbf{x} \in J$ имеет место равенство

$$F(\mathbf{x}) = \int\limits_{[\mathbf{a},\, \mathbf{x}]} f\, d\mu_m + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{1 < i_1, \cdots, i_k < m} \int\limits_{r^{i_1,\cdots,i_k}([\mathbf{a},\, \mathbf{x}])} f_{i_1,\cdots,i_k}\, d\mu_{m-k} + C. \tag{33}$$

Пусть $\varphi \in C_0^{\infty}(J)$. В силу (33) имеем следующее равенство, в котором сумма берется по всем $\{i_1, \cdots, i_k\}$ таким, что $\{i_1, \cdots, i_k\} \cap \cap \{l_1, \cdots, l_n\} = \varnothing$,

$$\int\limits_J F D^{\alpha}\varphi\, d\mu_m = \int\limits_J D^{\alpha}\Big(\int\limits_{[\mathbf{a},\, \mathbf{x}]} f\, d\mu_m + \sum \int\limits_{r^{i_1,\cdots,i_k}([\mathbf{a},\, \mathbf{x}])} f_{i_1,\cdots,i_k}\, d\mu_{m-k}\Big)\varphi\, d\mu_m =$$

$$= \int\limits_J \Big(\int\limits_{r^{l_1,\cdots,l_n}([\mathbf{a},\, \mathbf{x}])} f_{x_{l_1},\cdots,x_{l_n}}^{l_1,\cdots,l_n}\, d\mu_{m-n} +$$

$$+ \sum \int\limits_{r^{i_1,\cdots,i_k,\, l_1,\cdots,l_n}([\mathbf{a},\, \mathbf{x}])} (f_{i_1,\cdots,i_k})_{x_{l_1},\cdots,x_{l_n}}^{l_1,\cdots,l_n}\, d\mu_{m-k-n}\Big)\varphi\, d\mu_m. \tag{34}$$

В силу теоремы Фубини для каждого набора $\{i_1, \cdots, i_k\}$ ($\{i_1, \cdots, i_k\} \cap \cap \{l_1, \cdots, l_n\} = \varnothing$) имеем

$$\int\limits_J \Big| \int\limits_{r^{i_1,\cdots,i_k,\, l_1,\cdots,l_n}([\mathbf{a},\, \mathbf{x}])} (f_{i_1,\cdots,i_k})_{x_{l_1},\cdots,x_{l_n}}^{l_1,\cdots,l_n}\, d\mu_{m-k-n}\Big|\, d\mu_m \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{r^{l_1,\cdots,l_n}(J)} d\mu_{m-n} \int\limits_{t^{l_1,\cdots,l_n}(J)} d\mu_n \int\limits_{r^{i_1,\cdots,i_k,\, l_1,\cdots,l_n}([\mathbf{a},\, \mathbf{x}])} \Big|(f_{i_1,\cdots,i_k})_{x_{l_1},\cdots,x_{l_n}}^{l_1,\cdots,l_n}\Big|\, d\mu_{m-k-n} \leqslant$$

$$< \int\limits_{r^{l_1,\dots,l_n}(J)} d\mu_{m-n} \int\limits_{r^{l_1,\dots,l_k}(J)} |f_{l_1,\dots,l_k}|\, d\mu_{m-k} = \mu_{m-n}\left(r^{l_1,\dots,l_n(J)}\right) \int\limits_{r^{l_1,\dots,l_k}(J)} |f_{l_1,\dots,l_k}|\, d\mu_{m-k}. \qquad (35)$$

Аналогично

$$\int\limits_J \left| \int\limits_{r^{l_1,\dots,l_n}([a,x])} f^{l_1,\dots,l_n}_{x_{l_1},\dots,x_{l_n}}\, d\mu_{m-k} \right| d\mu_m \leqslant \mu_{m-n}\left(r^{l_1,\dots,l_n(J)}\right) \int\limits_J |f|\, d\mu_m. \qquad (36)$$

Наконец, в силу (34), (35), (36), будем иметь

$$D^\alpha F(x_1,\dots,x_m) =$$

$$= (-1)^k \Big(\int\limits_{r^{l_1,\dots,l_n}([a,x])} f^{l_1,\dots,l_n}_{x_{l_1},\dots,x_{l_n}}\, d\mu_{m-n} + \sum \int\limits_{r^{l_1,\dots,l_k,l_1,\dots,l_n}([a,x])} (f_{l_1,\dots,l_k})^{l_1,\dots,l_n}_{x_{l_1},\dots,x_{l_n}}\, d\mu_{m-k-n}.$$

и $D^\alpha F \in L^1(J)$, что и требовалось доказать.

Общий случай легко следует из рассмотренного частного случая.

Институт прикладных проблем физики
АН Армении

Поступила 3. IV. 1990

Ֆ. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ. Բազմաթիվ փոփոխականների էապես բացարձակ անընդհատ ֆունկցիաների մասին. *(ամփոփում)*

Աշխատանքը նվիրված է (1)-ում մտցված Վիտալիի իմաստով և Կարաթեոդորիի իմաստով էապես բացարձակ անընդհատության գաղափարների հետագա ուսումնասիրությանը։ Թեորեմ 1-ը հանդիսանում է (1)-ում ապացուցված թեորեմ 1-ի ընդհանրացումը։ Թեորեմ 2-ը բացահայտում է ըստ Կարաթեոդորիի էապես բացարձակ անընդհատության և դիտարկվող f ֆունկցիայի ըստ որոշակի տեսքի α մուլտիինդեքսների $D^\alpha f$ ընդհանրացված ածանցյալների գոյության միջև եղած կապը։

F. A. TALALYAN. *On the essentially absolutely continuous functions of several vaviables* (summary)

This paper is devoted to further investigation of notion of the essentially absolutely continuity both in sense of Vitali and in sense of Caratheodory introduced in (1). The Theorem 1 is a generalization of the Theorem 1 in (1). The Theorem 2 concerned to the conecction between the generalized abtoluec continuity of function f in the sense of Caratheodory and the existence of generalized derivatives $D^\alpha f$ with with some multi indices α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Талалян* и *Ф. А. Талалян*. О представлении абсолютно непрерывных функций многих переменных, Изв. АН АрмССР, Математика, 23, № 1, 1989, 3—21.
2. *G. Kothe*. Topological vector speces, I, Springer, 1983.