ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 2, 1991 Математика

УДК 517.53

Н. Е. ТОВМАСЯН

ПРИНЦИП АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ ДУГУ ЭЛЛИПСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Аналитическое продолжение через дугу эллипса

Пусть D—область, ограниченная эллипсом Γ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0), \tag{1}$$

а $\varphi(z)$—аналитическая функция в области D, непрерывная в $D\cup\gamma$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\varphi(z)=0 \text{ при } z=x+iy\in\gamma, \tag{2}$$

где γ—открытая дуга на эллипсе Γ.

Цель данной работы—построить аналитическое продолжение функции $\varphi(z)$ через дугу эллипса γ и получить разложения функций, отображающих внутренности эллипса на единичный круг и полуплоскость, на простейшие дроби.

Как известно

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

является параметрическим уравнением эллипса (1), которое в комплексном виде записывается следующим образом:

$$z=\mu_0\left(t+\frac{\mu}{t}\right),\ t=e^{i\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \tag{3}$$

где $\mu_0=\dfrac{a+b}{2}$, $\mu=\dfrac{a-b}{a+b}$.

Обозначим $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Точки $z=\pm c$ являются фокусами эллипса (1).

Известно, что функция Жуковского $z=\mu_0\left(t+\dfrac{\mu}{t}\right)$ конформно отображает область $|t|>\sqrt{\mu}$ $(t=\xi+i\eta)$ на всю комплексную плоскость без отрезка $[-c, c]$. В частности, эта функция конформно отображает кольцо $\sqrt{\mu}<|t|<1$ на внутренность эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ без отрезка $[-c, c]$. Обратное отображение к отображению $z=\mu_0\left(t+\dfrac{\mu}{t}\right)$ определяется формулой

$$t=\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}, \tag{4}$$

где $\sqrt{z^2-c^2}=\sqrt{z-c}\cdot\sqrt{z+c}$, а под $\sqrt{z-c}$ и $\sqrt{z+c}$ понимается главная ветвь этих корней.

Обозначим через

$$\psi(t)=\varphi\left(\mu_0\left(t+\frac{\mu}{t}\right)\right). \tag{5}$$

Так как $\varphi(z)$ аналитична в области D, то $\psi(t)$ аналитична в кольце $\sqrt{\mu}<|t|<1$. Легко проверить, что

$$\psi(\sqrt{\mu}\,t)=\psi\left(\frac{\sqrt{\mu}}{t}\right) \text{ при } |t|=1. \tag{6}$$

Равенство (6) можно записать в виде

$$\psi(t)=\psi\left(\frac{\mu}{t}\right) \text{ при } |t|=\sqrt{\mu}. \tag{7}$$

Исходя из (7) определим функцию $\psi(t)$ в кольце $\mu<|t|<\sqrt{\mu}$ по формуле

$$\psi(t)=\psi\left(\frac{\mu}{t}\right),\quad \mu<|t|<\sqrt{\mu}. \tag{8}$$

Тогда из равенства (7) следует, что функция $\psi(t)$ аналитична в кольце $\mu<|t|<1$.

Обозначим через δ_0 образ дуги γ при отображении

$t=\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}$ $(z\in\gamma,\ t\in\delta_0)$, а через $\tilde{\delta}_0$ — образ δ_0 при отображении $\zeta=\frac{\mu}{t}$ $(t\in\delta_0,\ \zeta\in\tilde{\delta}_0)$. Ясно, что δ_0 и $\tilde{\delta}_0$ — дуги окружностей $|t|=1$ и $|\zeta|=\mu$ соответственно.

Из условия (2) и равенства (8) следует, что

$$\operatorname{Re}\varphi(t)=0 \text{ при } t\in\delta_0\cup\tilde{\delta}_0. \tag{9}$$

Пусть δ_k и $\tilde{\delta}_k$ $(k=1,2\cdots)$ — образы δ_0 и $\tilde{\delta}_0$ при отображении $\zeta=t\mu^{-2k}$ $(t\in\delta_0,\ \zeta\in\delta_k$ и $t\in\tilde{\delta}_0,\ \zeta\in\tilde{\delta}_k)$. Очевидно, что δ_k — дуга окружности $|\zeta|=\mu^{-2k}$, а $\tilde{\delta}_k$ — дуга окружности $|\zeta|=\mu^{-2k+1}$. Обозначим через G_0 кольцо $\sqrt{\mu}<|t|<1$, а G_k — кольцо $\mu^{-k+1}<|t|<\mu^{-k}$ $(k=1,2,\cdots)$.

Известно [1], что если $\Phi(t)$ аналитична в кольце $\rho<|t|<R$ и на некоторой дуге Γ_0 окружности $|t|=R$ принимает чисто мнимые значения, то она аналитически продолжается через эту дугу в кольцо $R<|t|<\frac{R^2}{\rho}$ по формуле

$$\Phi(t)=-\overline{\Phi\left(\frac{R^2}{\bar{t}}\right)},\quad R<|t|<\frac{R^2}{\rho}. \tag{10}$$

Черта над комплексным числом означает переход к комплексно сопряженным величинам.

Согласно условию (9) аналитическая в кольце $\mu < |t| < 1$ функция $\psi(t)$ аналитически продолжается через дугу δ_0 в область G_1 по формуле (10) при $R = 1$, причем продолженная функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \psi(t) = 0 \text{ при } t \in \delta_0 \cup \tilde{\delta}_1. \tag{11}$$

Из условия (11) в свою очередь следует, что функция $\psi(t)$ аналитически продолжается через дугу $\bar{\delta}_1$ в область G_2 по формуле (10) при $R = \dfrac{1}{\mu}$, причем

$$\operatorname{Re} \psi(t) = 0,\ t \in \tilde{\delta}_1 \cup \delta_1. \tag{12}$$

Рассуждая аналогично мы получим аналитическое продолжение функции $\psi(t)$ через δ_0 в область

$$\bar{D}_0 = \overset{\infty}{\underset{k=0}{\cup}} G_k \overset{\infty}{\underset{k=0}{\cup}} \delta_k \overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} \tilde{\delta}_k,$$

т. е. $\psi(t)$ аналитична вне круга $|t| < \sqrt{\mu}$, кроме счетного числа дуг окружностей.

Пусть D_0 — образ $\tilde{D}_0$ при отображении $z = \mu_0 \left(t + \dfrac{\mu}{t}\right) (t \in \tilde{D}_0$, $z \in D_0)$. Областью D_0 является вся комплексная плоскость без счетного числа эллипсов и отрезка $[-c, c]$, причем дуга γ входит в область D_0.

Теперь в функции $\psi(t)$, делая замену $t = \dfrac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}$, мы получим функцию

$$\varphi(z) = \psi\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}\right),$$

которая аналитична в области D_0 и совпадает с первоначальной аналитической функцией $\varphi(z)$ в области D.

Следовательно получена

Теорема 1. *Если $\varphi(z)$ аналитична внутри эллипса D и на дуге эллипса γ принимает чисто мнимые значения, то она аналитически продолжается через эту дугу на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа дуг эллипсов.*

Следующая теорема аналогична теореме 1.

Теорема 2. *Если $\varphi(z)$ аналитична внутри эллипса, за исключением конечного числа точек и принимает на эллипсе чисто мнимые значения, также за исключением конечного числа точек, то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа изолированных точек.*

Пусть D^-—дополнение замкнутой области $D + \gamma$ до полной комплексной плоскости. Если область D—круг и аналитическая в области D функция $\varphi(z)$ принимает на дуге окружности $\gamma \in \Gamma$ чисто мнимые значения, то, как известно, это функция аналитически продолжается через дугу γ в область D^-. Из метода доказательства теоремы 1 следует, что это утверждение для эллипса справедливо тогда и только тогда, когда аналитическая функция постоянна.

Если аналитическая в круге функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением конечного числа точек.

Это говорит о том, что аналитическое продолжение через дугу окружности и эллипса существенно отличаются друг от друга.

§. Разложения функций, конформно отображающих внутренность эллипса на полуплоскость и круг, на простейшие дроби

В работах [1] и [2] получены конформные отображения внутренности эллипса на плоскость и круг, а также обратные отображений с помощью элементарных преобразований через эллиптические интегралы. Здесь мы получаем конформные отображения эллипса на полуплоскость и круг в явном виде, через простейшие дроби, причем полученные ряды сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии.

Пусть $t=\omega(z)$ и $\zeta=\eta(z)$ конформно отображают внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} t>0$ и круг $|\zeta|<1$ соответственно и удовлетворяют условиям

$$\omega(-a)=0,\ \lim_{z\to a}(a-z)\,\omega(z)=1, \tag{13}$$

$$\eta(0)=0,\ \eta(a)=1. \tag{14}$$

Имеют место следующие две теоремы.

Теорема 3. *Функция $\omega(z)$ разлагается на простейшие дроби*

$$\omega(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{b}\cdot\frac{1-\mu^{2k+1}}{1+\mu^{2k+1}}\cdot\frac{z}{z_k-z}+c_0, \tag{15}$$

где

$$\mu_0=\frac{a+b}{2},\ \mu=\frac{a-b}{a+b},\ z_k=\mu_0(\mu^{-k}+\mu^{k+1}),$$

$$c_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{b}\cdot\frac{1-\mu^{2k+1}}{1+\mu^{2k+1}}\cdot\frac{a}{a+z_k}.$$

Теорема 4. *Функция $\eta(z)$ разлагается на простейшие дроби*

$$\eta(z)=\frac{1}{\tilde{c}_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+\mu^{4k+2}}{\mu^{2k+1}}\cdot\frac{z}{z^2+\tau_k^2}, \tag{16}$$

где

$$\tau_k=\mu_0\sqrt{\mu}\,(\mu^{-2k+1}-\mu^{2k+1}),$$

$$\tilde{c}_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1+\mu^{4k+2}}{\mu^{2k+1}}\cdot\frac{a}{a^2+\tau_k^2}.$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $\omega(z)$—функция, конформно отображающая внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$ и удовлетворяет условиям (13), а

$$\psi(t) = \omega\left(\mu_0\left(t + \frac{\mu}{t}\right)\right), \sqrt{\mu} < |t| < 1. \tag{17}$$

Ясно, что

$$\operatorname{Re} \psi(t) = 0 \text{ при } |t| = 1, \ t \neq 1. \tag{18}$$

Из второго условия (13) следует, что

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ |t| < 1}} (1 - t)\,\psi(t) = b. \tag{19}$$

При доказательстве теоремы 1 мы показали, что функция $\psi(t)$ аналитически продолжается в область $|t| > \mu$, за исключением точек $t = \mu^{-k}(k = 0, 1, \ldots)$, в которых имеет простые полюсы. Обозначим через $Q_k(z)$ главную часть разложения ряда Лорана функции $\psi(t)$ в окрестности точки $t = \mu^{-k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Из (19) следует, что

$$Q_0(t) = \frac{1}{b(1 - t)}. \tag{20}$$

Используя метод построения аналитического продолжения функции $\psi(t)$, указанный в доказательстве теоремы 1 и равенство (20), мы получим, что

$$Q_k(t) = \frac{(-1)^k}{b(1 - \mu^t)}, \ k = 1, 2, \cdots. \tag{21}$$

Следовательно функция

$$\omega_1(z) = \psi\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}\right) \tag{22}$$

аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением отрезка $[-c, c]$ и точек

$$z_k = \mu_0(\mu^{-k} + \mu^{k+1}), \ k = 0, 1, \cdots, \tag{23}$$

причем главная часть $\tilde{Q}_k(z)$ разложения ряда Лорана функции $\omega_1(z)$ в окрестности точки z_k определяется формулой

$$\tilde{Q}_k(z) = \frac{(-1)^k (1 - \mu^{2k+1})\,\mu_0}{b\,\mu^k} \cdot \frac{1}{z_k - z}, \ k = 0, 1, \cdots. \tag{24}$$

При получении формулы (24) мы использовали формулы (20) и (21).

Из равенства (17) и (22) следует, что

$$\omega_1(z) = \omega(z) \text{ при } z \in D. \tag{25}$$

Следовательно функция $\omega(z)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением точек z_k $(z_k = 0, 1, \ldots)$, в окрестности которых главная часть разложения ряда Лорана определяется формулой (24). Это продолжение также будем обозначать через $\omega(z)$.

Пусть l_k—эллипс, который является образом круга $|t| = \mu^{-k}\sqrt{\mu}$ $(k = 0, 1, \cdots)$ при отображении $z = \mu_0\left(t + \frac{\mu}{t}\right)$. Из построения аналитического продолжения функции $\omega(z)$ следует, что

$$\max_{z \in l_k} |\omega(z)| = \max_{z \in [-c, c]} |\omega(z)|. \tag{26}$$

Поэтому функция $\omega(z)$ равномерно ограничена на эллипсах l_k. Следовательно, согласно теореме Коши о разложении мероморфной функции (см. [1], стр. 426), мы имеем

$$\omega(z) = \omega(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{Q}_k(z) - \tilde{Q}_k(0)). \tag{27}$$

Подставляя в (27) $z = -a$ и используя условие $\omega(-a) = 0$, получим

$$\omega(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{Q}_k(0) - \tilde{Q}_k(-a)). \tag{28}$$

Подставляя $\tilde{Q}_k(z)$ из (24) в (27) и (28), мы получим формулу разложения (15). Теорема 3 доказана.

Из определения функции $\omega(z)$ следует, что $\operatorname{Re}\omega(0) > 0$. Поэтому из (15) имеем $\omega(0) = c_0 > 0$.

Пусть теперь функция $t = \Omega(z)$ конформно отображает внутренность эллипса D на полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$, $\Omega(a) = \infty$, $\Omega(0) = t_0$. Тогда

$$\Omega(z) = \frac{\operatorname{Re} t_0}{c_0}\,\omega(z) + i \operatorname{Im} t_0, \tag{29}$$

где $\omega(z)$ определяется формулой (15).

Теперь приведем схему доказательства теоремы 4. Известно, что $\zeta = \frac{t-1}{t+1}$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$ на единичный круг $|\zeta| < 1$. Поэтому.

$$\eta(z) = \frac{\Omega(z) - 1}{\Omega(z) + 1}, \tag{30}$$

где $t = \Omega(z)$ конформно отображает внутренность эллипса D на полу плоскость $\operatorname{Re} t > 0$, $\Omega(0) = 1$, $\Omega(a) = \infty$.

Так как $\Omega(0) = 1$ и $\operatorname{Re}\Omega(z) > 0$ при $z \in D$, то из метода аналитического продолжения функции $\Omega(z)$, указанного при доказательстве теоремы 1, непосредственно следует, что

$$\Omega(z) = -1 \text{ при } z = \pm i\tau_k,\ k = 0, 1, \cdots, \tag{31}$$

$$\Omega'(\pm i\tau_k) = c\,\frac{\mu^{2k+1}}{1 + \mu^{4k+2}}, \tag{32}$$

где c—некоторая постоянная, не зависящая от k, $c \neq 0$.

Используя формулы (30), (31) и (32), мы получим главную часть разложения ряда Лорана функции $\eta(z)$ в окрестности точек $z = \pm i\tau_k$

($k=0, 1, \ldots$). Дальше доказательство теоремы 4 не отличается от доказательства теоремы 3.

Аналогично можно получить разложение на простейшие дроби функции $\eta(z)$, когда условия (14) заменены условиями $\eta(0)=z_0, \eta(a)=z_1$, где $z_0 \in D$, $z_1 \in \Gamma$.

Теорема 5. *Если функция* $\varphi(z)$ *аналитична внутри эллипса* D, $|\varphi(z)|=1$ *при* $z \in \gamma$ *и имеет конечное число нулей внутри* D, *то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа дуг эллипсов и счетного числа изолированных особых точек.*

Доказательство. Пусть $z_1, \ldots, z_n$—нули функции $\varphi(z)$ в области D, а $k_1, \ldots, k_n$—их кратности. Пусть, далее, $\xi=\omega_j(z)$ конформно отображает область D на единичный круг и $\omega_j(z_j)=0$. Применяя теорему 1 для функции $\ln[\varphi(z)\omega_1^{-k_1}(z)\cdots\omega_n^{-k_n}(z)]$ и имея в виду теорему 4, мы получим теорему 5.

Замечание. Если в теореме 5 $|\varphi(z)|=1$ при $z \in \Gamma$, то $\varphi(z)$ аналитичечски продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа изолированных особых точек; если же $\varphi(z)=1$ при $z \in \gamma$ и $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in D$, то она аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением счетного числа дуг эллипсов.

В заключение поставим следующую задачу:

Задача А. Найти область аналитиечского продолжения конформного отображения круга на внутренность эллипса и внутренность эллипса D на внутренность эллипса D_1 и построить эти отображения.

Инженерный
университет Армении

Поступила 10. IV. 1990

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ. Անալիտիկ շարունակության սկզբունքը էլիպսի աղեղով և նրա կիրառությունները *(ամփոփում)*

Հոդվածում կառուցված է անալիտիկ ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակությունը էլիպսի աղեղով և ստացված է էլիպսով սահմանափակված տիրույթների կոնֆորմ արտապատկերումը շրջանի և կիսահարթության վրա պարզագույն կոտորակների միջոցով։

N. E. TOVMASIAN. *Prinsipe of the analgtical continuation of frought ellipse arc its applications* (summary)

In this parer analytical contination of analytical functions beyond an ellipse arc is built and the conform maffing of the inferior of the ellipse on a disc and a halfplane by means of simplest fractions is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного, Изд. «Наука», Москва, 1973.
2. *Б. Коппенфельс. Ф. Штальман.* Практика конформных отображений, Изд. «Наука». М., 1963.