ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 2, 1991 Математика

УДК 517. 53

А. И. ПЕТРОСЯН

ОЦЕНКА В C^m-НОРМЕ МИНИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ $\bar{\partial}$-УРАВНЕНИЯ В ПОЛИДИСКЕ

В работе Шарпантье [1] получено интегральное представление функций $u(z)$, гладких на замыкании полидиска (для упрощения записи рассматривается случай бидиска $D^2=\{z=(z_1, z_2): |z_1|<1,\ |z_2|<1\}$). Это представление имеет вид

$$u(z)=P_\alpha(u)(z)+T_\alpha(\bar{\partial}u)(z), \tag{1}$$

где $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1>-1$, $\alpha_2>-1$,

$$P_\alpha(u)(z)=\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{(2\pi i)^2}\int_{D^2}u(\zeta_1, \zeta_2)\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\alpha_1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1+2}}\times$$

$$\times\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\alpha_2}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2+2}}\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\bar{\zeta}_2\wedge d\zeta_2;$$

$$T_\alpha(\bar{\partial}u)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_1|<1}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_1}(\zeta_1, z_2)\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{\alpha_1+1}\frac{d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1}{z_1-\zeta_1}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_2|<1}\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_2}(z_1, \zeta_2)\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{\alpha_2+1}\cdot\frac{d\bar{\zeta}_2\wedge d\zeta_2}{z_2-\zeta_2}+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{D^2}\bar{\partial}u\wedge\left(\frac{1-|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right)^{\alpha_1+1}\left(\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}\right)^{\alpha_2+1}\times$$

$$\times\frac{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)\,d\bar{\zeta}_2-(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\,d\bar{\zeta}_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2+\frac{\alpha_2+1}{4\pi^2}\int_{D^2}\bar{\partial}u\wedge$$

$$\wedge\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\alpha_1+1}}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1+1}(z_1-\zeta_1)}\cdot\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\alpha_2}|\zeta_2-z_2|}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2+2}|\zeta-z|^2}\,d\bar{\zeta}_2\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2-$$

$$-\frac{\alpha_1+1}{4\pi^2}\int_{D^2}\bar{\partial}u\wedge\frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\alpha_2+1}}{(1-\bar{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2+1}(z_2-\zeta_2)}\times$$

$$\times\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\alpha_1}|\zeta_1-z_1|}{(1-\bar{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1+2}|\zeta-z|^2}\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2.$$

Оператор P_α является оператором ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве $L^2(d\sigma_\alpha)$ на подпространство функций, голоморфных в бидиске. Здесь $d\sigma_\alpha$ — мера в D^2, задаваемая равенством

$$d\sigma_\alpha = (1-|z_1|^2)^{\alpha_1}(1-|z_2|^2)^{\alpha_2}\, d\lambda(z_1, z_2),$$

где $d\lambda(z_1, z_2)$ — мера Лебега.

Интегральное представление (1) в круге впервые было получено в работах [2] и [3] М. М. Джрбашяна для голоморфных функций класса $H^p(\alpha)$ ($\alpha > -1$, $p \geqslant 1$), введенных в этих работах.

Формула (1) дает ортогональное разложение функции u в $L^2(d\sigma_\alpha)$. Это позволяет выписать решение u_α уравнения

$$\bar{\partial} u = f, \tag{2}$$

имеющее минимальную взвешенную L^2-норму, а именно, $u_\alpha = T_\alpha(f)$. Среди всех решений уравнения (2) u_α является в некотором смысле „каноническим", и для приложений нужны оценки этого решения в различных нормах. В [1] даны оценки u_α в L^p-норме, т. е.

$$\|u_\alpha\|_{L^p(D^2)} \leqslant \gamma\,(\|f_1\|_{L^p(D^2)} + \|f_2\|_{L^p(D^2)}), \tag{3}$$

где $p \in [1, +\infty]$ $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, константа γ зависит лишь от α и p. Несколько ранее в работе Ландуччи [4] была получена оценка (3) при $\alpha = (0, 0)$, $p = \infty$, а в [5] тем же автором дана оценка производных решения u_0. Настоящая работа посвящена оценке u_α в норме пространства $C^m(\overline{D}^2)$.

Ниже используются следующее обозначения:

$C^m(\overline{D}^2)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{D}^2$ функций h, $\|h\|_m$ — норма в $C^m(\overline{D}^2)$;

$C^m_{(0,1)}(\overline{D}^2)$ — пространство форм $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$ типа (0, 1), коэффициенты которых принадлежат $C^m(\overline{D}^2)$, $\|f\|_m = \|f_1\|_m + \|f_2\|_m$;

$C^{m+\sigma}_{(\,)}(\overline{D}^2)$ — пространство тех функций из $C^m(\overline{D}^2)$, у которых все производные порядка m удовлетворяют на D^2 условию Гельдера с показателем σ, $0 < \sigma < 1$;

$$\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} g\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} g\bar{z}_2.$$

Всюду в дальнейшем предполагается условие $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Лемма 1. *Пусть $u \in C^m(\overline{D}^2)$, $r + s \leqslant m$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 0$. Тогда имеет место следующее тождество:*

$$P_\alpha\left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial\zeta_1^r \partial\zeta_2^s}\right)(z) = P_\alpha\left(\bar{\zeta}_1 \zeta_2^{r-1} \zeta_r^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial\bar{\zeta}_1 \partial\zeta_1^{r-1} \partial\zeta_2^s}\right)(z) -$$

$$-(r-1) P_\alpha\left(\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial\zeta_1^{r-1}\partial\zeta_2^s}\right)(z) + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} P_\alpha\left(\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial\zeta_1^{r-1}\partial\zeta_2^s}\right)(z). \tag{4}$$

Аналогичное тождество имеет место и относительно переменной z_2 при условии $r \geqslant 0$, $s \geqslant 1$.

Смысл соотношения (4) заключается в том, что проекция P_α производной от u выражается через проекции производных порядка на единицу меньше от функции u и $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1}$. Сомножители типа $\zeta_1^r \zeta_2^s$ появляются здесь по чисто техническим причинам.

Доказательство. Обозначив

$$C_\alpha(\zeta,\ z)=\frac{(\alpha_1+1)\,(\alpha_2+1)}{(2\pi i)^2}\ \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{\alpha_1}}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1+2}}\ \frac{(1-|\zeta_2|^2)^{\alpha_2}}{(1-\overline{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2+2}},$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_1}(\zeta_1^r\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,\ z))=r\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,\ z)-\alpha_1\zeta_1^r\overline{\zeta}_1\zeta_2^s\frac{C_\alpha(\zeta,\ z)}{1-|\zeta_1|^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_1}(\overline{\zeta}_1\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,\ z))=\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,z)-\alpha_1\zeta_1^r\overline{\zeta}_1\zeta_2^s\frac{C_\alpha(\zeta,z)}{1-|\zeta_1|^2}+$$

$$+(\alpha_1+2)\,\zeta_1^{r-1}\overline{\zeta}_1\zeta_2^s z_1\frac{C_\alpha(\zeta,z)}{1-\overline{\zeta}_1 z_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}C_\alpha(\zeta,z)=(\alpha_1+2)\overline{\zeta}_1\frac{C_\alpha(\zeta,z)}{1-\overline{\zeta}_1 z_1}.$$

Из этих равенств следует

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_1}(\zeta_1^r\zeta_2^s(C_\alpha(\zeta,z))=\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_1}(\overline{\zeta}\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,z))+$$

$$+(r-1)\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,\ z)-\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s z_1\frac{\partial}{\partial z_1}C_\alpha(\zeta,\ z). \tag{5}$$

Далее

$$P_\alpha\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\,\partial\zeta_2^s}\right)(z)=\int_{D^2}\zeta_1^r\zeta_2^s\ \frac{\partial^{r+s}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^r\,\partial\zeta_2^s}\ C_\alpha(\zeta,z)\,d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge d\overline{\zeta}_2=$$

$$=\int_{D^2}\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left(\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\zeta_1^r\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,\ z)\right)d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta}_2\wedge d\zeta_2-$$

$$-\int_{D^2}\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\ \frac{\partial}{\partial\zeta_1}(\zeta_1^r\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,\ z))\ d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta}_2\wedge d\zeta_2. \tag{6}$$

По формуле Стокса первое слагаемое в правой части (6) равно

$$\int_{D^2}d_{\zeta_1}\left(\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\zeta_1^r\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,\ z)\ d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_2\wedge d\overline{\zeta}_2\right)=$$

$$=\int_{\substack{|\zeta_1|=1\\ |\zeta_2|<1}}\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\ \zeta_1^r\zeta_2^s\ C_\alpha(\zeta,\ z)\ d\overline{\zeta}_1\wedge d\overline{\zeta}_2=0,$$

так как $C_\alpha(\zeta,\ z)=0$ при $|\zeta_1|=1$. С учетом этого, а также равенства (5), из (6) имеем

$$P_\alpha\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\,\partial\zeta_2^s}\right)(z)=-\int_{D^2}\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\ \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_1}(\overline{\zeta}_1\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,z))\,d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge$$

$$\wedge d\overline{\zeta}_2\wedge d\zeta_2-(r-1)\int_{D^2}\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,z)\,d\overline{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge d\overline{\zeta}_2\wedge d\zeta_2+$$

$$+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\int\limits_{D^2}\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta_1^{r-1}\partial\zeta_2^s}\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,z)\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2=$$

$$=-\int\limits_{D^2}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_1}\left(\frac{\partial^{r-1+s}u(\zeta)}{\partial\zeta^{r-1}\partial\zeta_2^s}\bar\zeta_1\zeta^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,z)\right)d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2+$$

$$+\int\limits_{D^2}\frac{\partial^{r+s}u(\zeta)}{\partial\bar\zeta_1\partial\zeta_1^{r-1}\partial\zeta_2^s}\bar\zeta_1\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s C_\alpha(\zeta,z)\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2-$$

$$-(r-1)P_\alpha\left(\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s\frac{\partial^{r-1+s}u}{\partial\zeta_1^{r-1}\partial\zeta_2^s}\right)(z)+z_1\frac{\partial}{\partial\zeta_1}P_\alpha\left(\zeta_1^{r-1}\zeta_2^s\frac{\partial^{r-1+s}u}{\partial\zeta_1^{r-1}\partial\zeta_2^s}\right)(z). \qquad (7)$$

Равенство нулю первого слагаемого в правой части (7) доказывается с помощью формулы Стокса как выше. Таким образом, из (7) следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $u\in C^{m+\sigma}(\bar D^2)$, $0<\sigma<1$. *Тогда*

$$T_\alpha(\bar\partial u)\in C^{m+\sigma}(\bar D^2).$$

Доказательство. Согласно (1) имеем

$$T_\alpha(\bar\partial u)(z)=u(z)-P_\alpha(u)(z).$$

Тот факт, что $P_\alpha(u)\in C^{m+\sigma}(\bar D^2)$ при $m=0$, доказывается элементарно с привлечением леммы Харди—Литтльвуда. При $m>0$ следует использовать соотношение

$$z_1\frac{\partial}{\partial z_1}P_\alpha(u)(z)=P_\alpha\left(\zeta_1\frac{\partial u}{\partial\zeta_1}\right)(z)-P_\alpha\left(\bar\zeta\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_1}\right)(z),$$

(а также аналогичное по z_2), которое является частным случаем (4) и следует из него при $r=1$, $s=0$.

Следствие. Если $u\in C^{m+1}(\bar D^2)$, то $T_\alpha(\bar\partial u)\in C^m(\bar D_2)$.

Всюду ниже через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ обозначены константы, зависящие только от r, s и α.

Лемма 3. *Пусть*

а) $u\in C^m(\bar D^2)$, $\bar\partial u\in C^m_{(0,1)}(\bar D^2)$;

б) $P_\alpha(u)(z)\equiv z\in D^2$.

Тогда для $r+s\leqslant m$ *имеет место оценка*

$$\left\|\frac{\partial^{r+s}u}{\partial z_1^r\partial z_2^s}\right\|_0\leqslant\gamma_1\|\bar\partial u\|_{r+s}. \qquad (8)$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $r\geqslant 1$. Применяя рекуррентную формулу (4) последовательно r раз, получим

$$P_\alpha\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\partial\zeta_2^s}\right)(z)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{p=0}^{k-1}a_{kp}z_1^p\frac{\partial^p}{\partial z_1^p}P_\alpha\left(\bar\zeta_1\zeta_1^{r-k}\zeta_2^s\frac{\partial^{r+1-k+s}u}{\partial\bar\zeta_1\partial\zeta_1^{r-k}\partial\zeta_2^s}\right)(z)+$$

$$+\sum_{p=0}^{r}c_p z_1^p\frac{\partial^p}{\partial z_1^p}P_\alpha\left(\zeta_2^s\frac{\partial^s u}{\partial\zeta_2^s}\right)(z).$$

Если $s=0$, то второе слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу условия б). Если же $s\geqslant 1$, то, применяя аналог (4) по переменной z_2 последовательно s раз и учитывая б), из последнего равенства получим

$$P_\alpha\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\partial\zeta_2^s}\right)(z)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{p=0}^{k-1}a_{kp}z_1^p\frac{\partial^p}{\partial\zeta_1^p}P_\alpha\left(\overline{\zeta}_1\zeta^{r-k}\zeta_2^s\frac{\partial^{r+1-k+s}u}{\partial\overline{\zeta}_1\partial\zeta_1^{r-k}\partial\zeta_2^s}\right)(z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{s}\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{p=0}^{r}b_{kpq}z_1^pz_2^q\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p\partial z_2^q}P_\alpha\left(\overline{\zeta}_2\zeta_2^{s-k}\frac{\partial^{s-k+1}u}{\partial\overline{\zeta}_2\partial\zeta^{s-k}}\right)(z). \tag{9}$$

Здесь коэффициенты a_{kp}, c_p и b_{kpq} зависят от r и s. Используя (1) и (9), получим

$$z_1^rz_2^s\frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial z_1^r\partial z_2^s}=P_\alpha\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\partial\zeta_2^s}\right)-T_\alpha\left(\overline{\partial}\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\partial\zeta_2^s}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\sum_{p=0}^{k-1}a_{kp}z_1^p\frac{\partial^p}{\partial z_1^p}\left[\overline{z}_1z_1^{r-k}z_2^s\frac{\partial^{r+1-k+s}u(z)}{\partial\overline{z}_1\partial z_1^{r-k}\partial z_2^s}-\right.$$

$$\left.-T_\alpha\left(\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_1\zeta_1^{r-k}\zeta_2^s\frac{\partial^{r+1-k+s}u}{\partial\overline{\zeta}_1\partial\zeta_1^{r-k}\partial\zeta_2^s}\right)\right)\right]+\sum_{k=1}^{s}\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{p=0}^{r}b_{kpq}z_1^pz_2^q\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p\partial z_2^q}\times$$

$$\times\left[\overline{z}_2z_2^{s-k}\frac{\partial^{s+1-k}u(z)}{\partial\overline{z}_2\partial z_2^{s-k}}-T_\alpha\left(\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_2\zeta_2^{s-k}\frac{\partial^{s+1-k}u}{\partial\overline{\zeta}_2\partial\zeta_2^{s-k}}\right)\right)\right]-$$

$$-T_\alpha\left(\overline{\partial}\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\partial\zeta_2^s}\right)\right). \tag{10}$$

Отметим при этом, что для справедливости формулы (I) достаточно, чтобы функция u и коэффициенты формы $\overline{\partial}u$ (понимаемые в обобщенном смысле), были бы непрерывны на $\overline{D}^2$. Доказывается это утверждение стандартным способом регуляризации, как это сделано, к примеру, в [6] в отношении формулы Коши—Грина. Из (10) имеем

$$\left\|z_1^rz_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial z_1^r\partial z_2^s}\right\|_0\leqslant\gamma_2\|\overline{\partial}u\|_{r+s-1}+$$

$$+\gamma_3\sum_{k=1}^{r}\sum_{p=0}^{k-1}\left\|z_1^p\frac{\partial^p}{\partial z_1^p}T_\alpha\left(\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_1\zeta_1^{r-k}\zeta_2^s\frac{\partial^{r+1-k+s}u}{\partial\zeta_1\partial\zeta_1^{r-k}\partial\overline{\zeta}_2^s}\right)\right)\right\|_0+$$

$$+\gamma_4\sum_{k=1}^{s}\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{p=0}^{r}\left\|z_1^pz_2^q\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p\partial z_2^q}T_\alpha\left(\overline{\partial}\left(\overline{\zeta}_2\zeta_2^{s-k}\frac{\partial^{r+1-k}u}{\partial\overline{\zeta}_2\partial\zeta^{s-k}}\right)\right)\right\|_0+$$

$$+\left\|T_\alpha\left(\overline{\partial}\left(\zeta_1^r\zeta_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\zeta_1^r\partial\zeta_2^s}\right)\right)\right\|_0. \tag{11}$$

В полученном неравенстве справа участвуют производные $T_\alpha(\overline{\partial}(\cdots))$ порядка не выше, чем $r+s-1$. Это позволяет проводить индуктивные рассуждения относительно порядка производной. Докажем неравенство

$$\left\|z_1^rz_2^s\frac{\partial^{r+s}u}{\partial z_1^r\partial z_2^s}\right\|_0\leqslant\gamma_5\|\overline{\partial}u\|_{r+s}. \tag{12}$$

Из (10) при $r=1$, $s=0$ имеем

$$\left\| z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_0 \leqslant \gamma_3 \|\bar{\partial} u\|_0 + \gamma_3 \left| T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) \right) \right|_0 + \left| T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right) \right) \right|_0. \tag{13}$$

Заметим теперь, что из (3) при $p=\infty$ и для непрерывной на $\overline{D}_2$ формы f следует оценка

$$\| T_\alpha f \|_0 < \gamma \| f \|_0, \tag{14}$$

согласно которой имеем

$$\left| T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) \right) \right|_0 \leqslant \gamma \left| \bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) \right|_0 \leqslant \gamma_6 \|\bar{\partial} u\|_1, \tag{15}$$

$$\left\| T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right) \right) \right\|_0 < \gamma \left| \bar{\partial} \left(\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right) \right|_0 \leqslant \gamma_7 \|\bar{\partial} u\|_1. \tag{16}$$

Из (13), (15) и (16) следует

$$\left\| z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_0 \leqslant \gamma_8 \|\bar{\partial} u\|_1.$$

Аналогичное неравенство верно и для $z_2 \frac{\partial u}{\partial z_2}$. Итак, для производных первого порядка оценка (12) справедлива. Предположим, что (12) имеет место для всех производных порядка меньше, чем $r+s$. Применяя это индуктивное предположение к функциям $T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right)$ и $T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \left(\frac{\partial^{s+1-k} u}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right) \right)$ (при этом учитываем, что соответствующее условие гладкости а) обеспечивается в силу следствия леммы 2, а условие б) следует из того, что $P_\alpha \circ T_\alpha = 0$), будем иметь

$$\left| z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right) \right|_0 <$$

$$< \gamma_9 \left\| \bar{\partial} \left(\bar{z}_1 z_1^{r-k} z_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1^{r-k} \partial z_2^s} \right) \right\|_p \leqslant \gamma_9 \|\bar{\partial} u\|_{p+r+1-k+s} \leqslant \gamma_9 \|\bar{\partial} u\|_{r+s}, \tag{17}$$

так как $p+r+1-k+s \leqslant r+s$,

$$\left| z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right) \right|_0 < \gamma_{10} \|\bar{\partial} u\|_{r+s}, \tag{18}$$

так как $p+q+s+1-k \leqslant r+s$. Из (14) следует

$$\left| T_\alpha \left(\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right) \right|_0 \leqslant \gamma_{11} \left| \bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right|_0 \leqslant \gamma_{11} \|\bar{\partial} u\|_{r+s}. \tag{19}$$

Подставляя (17)—(19) в (11), получаем оценку (12). Отметим, что сомножитель $z_1^r z_2^s$ в левой части этой оценки не связан с существом дела и возник он из тождества (4) леммы I. Освободимся от этого сомножителя. Применяя при фиксированном z_2 формулу Коши—Грина к функции $\frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s}$, получим

$$\frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial z_1^r\,\partial z_2^s}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|=1}\frac{\partial^{r+s}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\zeta_1^r\,\partial\zeta_2^s}\,\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|<1}\frac{\partial^{r+s+1}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\bar\zeta_1\,\partial\zeta_1^r\partial\zeta_2^s}\,\frac{d\zeta_1\wedge d\bar\zeta_1}{\zeta_1-z_1}=J_1(z)+J_2(z). \tag{20}$$

Оценка

$$\|J_2\|_0\leqslant\gamma_{12}\left\|\frac{\partial^{r+s+1}u}{\partial\bar z_1\,\partial z_1^r\,\partial z_2^s}\right\|_0\leqslant\gamma_{12}\|\bar\partial u\|_{r+s} \tag{21}$$

известна еще со времен Данжуа. Далее

$$J_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|=1}\frac{\partial^{r+s}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\zeta_1^r\,\partial\zeta_2^s}\,\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|=1}d_{\zeta_1}\left(\frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\,\frac{1}{\zeta_1-z_1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|=1}\frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\,\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\,\frac{\partial\zeta_1}{\zeta_1-z_1}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|=1}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_1}\,\frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\,\frac{d\bar\zeta_1}{\zeta_1-z_1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|=1}\frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\,\frac{\partial\zeta_1}{(\zeta_1-z_1)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1|=1}\frac{\partial^{r+s}u(\zeta_1,\ z_2)}{\partial\bar\zeta_1\,\partial\zeta_1^{r-1}\,\partial\zeta_2^s}\,\frac{d\bar\zeta_1}{\zeta_1-z_1}, \tag{22}$$

Оценку $J_1(z)$ будем проводить отдельно для $|z_1|<\frac{1}{2}$ и для $|z_1|>\frac{1}{2}$.

Из (22) имеем

$$\max_{|z_1|<\frac{1}{2}}|J_1(z)|\leqslant\gamma_{13}\left\|\frac{\partial^{r+s-1}u}{\partial z_1^{r-1}\,\partial z_2^s}\right\|_0+\gamma_{14}\left\|\frac{\partial^{r+s}u}{\partial\bar z_1\,\partial z_1^{r-1}\,\partial z_2^s}\right\|_0<$$

$$\leqslant\gamma_{13}\left\|\frac{\partial^{r+s-1}u}{\partial z_1^{r-1}\,\partial z_2^s}\right\|_0+\gamma_{14}\|\bar\partial u\|_{r+s-1}. \tag{23}$$

Из (20), (21) и (23) следует

$$\max_{|z_1|<\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial z_1^r\,\partial z_2^s}\right|<\gamma_{15}\left(\left\|\frac{\partial^{r+s-1}u}{\partial z_1^{r-1}\partial z_2^s}\right\|_0+\|\bar\partial u\|_{r+s}\right). \tag{24}$$

Неравенство (24) позволяет доказать утверждение (8) леммы индукцией по $r+s$. При $r=s=0$ (8) следует из (12). Предположим, что (8) справедливо для всех производных порядка $r+s-1$. Далее различаем 2 случая:

1) Если $s=0$, то

$$\max_{|z_1|>\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial^r u(z)}{\partial z_1^r}\right|\leqslant 2^r\left\|z_1^r\,\frac{\partial^r u}{\partial z_1^r}\right\|_0\leqslant\gamma_{16}\|\bar\partial u\|_r$$

согласно (12). Вместе с (24) и индуктивным предположением отсюда получаем (8).

2) Если $s>0$, то имеем оценку

$$\max_{|z_2|<\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial z_1^r\,\partial z_2^s}\right|<\gamma_{17}\left(\left\|\frac{\partial^{r+s-1}u}{\partial z_1^r\,\partial z_2^{s-1}}\right\|_0+\|\bar\partial u\|_{r+s}\right), \tag{25}$$

аналогичную (24). Далее

$$\max_{\substack{|z_1|>\frac{1}{2}\\ |z_2|>\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right| \leqslant 2^{r+s} \left\| z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leqslant \gamma_{18} \|\bar\partial u\|_{r+s} \tag{26}$$

согласно (12). Из (24)—(26) и индуктивного предположения следует (8). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть f — $\bar\partial$-замкнутая форма типа* (0, 1), $f \in C^m_{(0,1)}(\bar D^2)$, u_α — *решение уравнения* (2), *имеющее минимальную норму в* $L^2(d\sigma_\alpha)$, *т. е.* $u_\alpha = T_\alpha(f)$, *и* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. *Тогда*

1) $u_\alpha \in C^m(\bar D^2)$;

2) $\|u_\alpha\|_m \leqslant \gamma \|f\|_m$.

Доказательство. Положим $f_n(z) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) z\right)$. Формы f_n $\bar\partial$-замкнуты в некоторой окрестности $\bar D^2$ (каждая в своей). Пусть v_n — какое-либо решение уравнения $\bar\partial v = f_n$ в упомянутой окрестности. В силу эллиптичности оператора $\bar\partial$ v_n принадлежит $C^{m+\sigma}(\bar D^2)$ для любого σ, $0 < \sigma < 1$. Возьмем функцию $u_{\alpha n} = v_n - P_\alpha(v_n)$. Очевидно

$$P_\alpha(u_{\alpha n}) = 0. \tag{27}$$

Так как функция $P_\alpha(v_n)$ голоморфна в D^2, то

$$\bar\partial u_{\alpha n} = f_n. \tag{28}$$

По формуле (1) с учетом (27) $u_{\alpha n} = T_\alpha(\bar\partial v_n)$ и, как следует из леммы 2, $u_{\alpha n} \in C^{m+\sigma}(\bar D^2)$. (Для наших целей достаточно того, чтобы $u_{\alpha n} \in C^m(\bar D^2)$). Из леммы 3 следует, что

$$\|u_{\alpha n}\|_m \leqslant \gamma_{19} \|f_n\|_m, \tag{29}$$

$$\|u_{\alpha n} - u_{\alpha k}\|_m \leqslant \gamma_{20} \|f_n - f_k\|_m. \tag{30}$$

Поскольку правая часть (30) стремится к нулю при $k, n \to \infty$, то последовательность $u_{\alpha n}$ имеет предел $u_\alpha^* \in C^m(\bar D^2)$. Переходя к пределу в равенствах (27) и (28), будем иметь $P_\alpha(u_\alpha^*) = 0$ и $\bar\partial u_\alpha^* = f$ (при $m = 0$ это равенство понимается в обобщенном смысле). Это означает, что u_α^* является минимальным решением (2) в $L^2(d\sigma_\alpha)$, т. е. $u_\alpha^* = u_\alpha$. Предельный переход в (29) дает оценку 2). Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 17. I. 1990

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Բազմաշրջանում $\bar\partial$-հավասարման մինիմալ լուծումների C^m-նորմով գնահատումը (ամփոփում)

Այս աշխատանքում հետազոտվում է բազմաշրջանում $\bar\partial u = f$ հավասարման այն u_α լուծումը, որը $(1-|z_1|^2)^{\alpha_1}, \cdots, (1-|z_n|^2)^{\alpha_n}$ կշռով L^2 տարածության մեջ ունի մինիմալ նորմ: Պարզության համար դիտարկվում է երկշրջանի դեպքը: Ապացուցվում է, որ եթե $f \in C^m_{(0,1)}(\bar D^2)$, ապա $u_\alpha \in C^m(\bar D^2)$, և տեղի ունի $\|u_\alpha\|_m \leqslant \gamma \|f\|_m$ անհավասարությունը, որտեղ γ-ն միայն α-ից և m-ից կախված հաստատուն է:

A. I. PETROSIAN. *The estimate in C^m-norm of the minimal solutions of $\bar{\partial}$-equation in polydisk* (summary)

The article is devoted to the investigation of the solution u_α of equation $\bar{\partial}u = f$ in polydisk, which has the minimal norm in the space L^2 with the weight $(1-|z_1|^2)^{\alpha_1}, \cdots, (1-|z_n|^2)^{\alpha_n}$. For simplicity the case of bidisk D^2 is considered. It is proved that if $f \in C^m_{(0,1)}(\overline{D^2})$, then $u_\alpha \in C^m(\overline{D^2})$ and we have the estimate $\|u_\alpha\|_m \leqslant \gamma \|f\|_m$, where γ is a constant, which depends only on α and m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Charpetier.* Formules explecites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n, Ann. Inst. Forier, 30, № 4, 1989, 121—154.
2. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
3. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та матем. и мех. АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—40.
4. *M. Landucci.* On the projection on $L^2(D)$ into $H(D)$, Duke Math. J., 42, 1975, 231—237.
5. *M. Landucic.* Uniform bounds on derivatives for the $\bar{\partial}$-problem in the polydisk, Proc. Symp. Pure Math., 30, 1977, 177—180.
6. *G. M. Henkin, J. Leiterer.* Theory of functions on complex manifolds, Akademie—Verlag, Berlin, 1984.