ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95.

А. А. АНДРЯН

К ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ СОСТАВНОГО ТИПА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим систему первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu, \tag{1}$$

где A и B—действительные постоянные матрицы порядка n, $u=(u_1, \ldots, u_n)$—искомая вектор-функция. Предположим, что собственные значения $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ матрицы A различны и $\lambda_j = \overline{\lambda}_{j+m}$ ($\mathrm{Im}\,\lambda_j < 0$, $j \leqslant m$), $\lambda_{2m+1}, \cdots, \lambda_n \in R$.

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (1), имеет вид

$$\det(\lambda J - Ap - B) = 0, \tag{2}$$

где $p=\sigma+i\tau$—комплексный параметр, а I—единичная матрица. Для корня $\lambda_j(p)$ уравнения (2) имеем представление [1]

$$\lambda_j(p) = p\left(\lambda_j + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{jk} p^{-k}\right), \quad |p| \gg 1, \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что существуют полуплоскости $\mathrm{Re}\,p<a$ и $\mathrm{Re}\,p>b$, вне которых корни $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p)$ различны и следовательно аналитичны.

В работе при помощи двустороннего преобразования Фурье-Лапласа [2] в полуплоскости $\pi_+ = \{(x, y)\,|\,x \in R,\ y > 0\}$ и полосе $D = \{x, y)|x \in R,\ 0 < y < 1\}$ для системы (1) изучаются различные граничные задачи.

§ 1. Граничная задача в полуплоскости

Пусть α, β, $a \in R$. Введем классы функций

$$H^m_{\alpha,\beta}(\pi_+) = \left\{ u(x, y) \,\Bigg|\, \sup_{\substack{y>0 \\ \sigma\in[\alpha,\beta]}} \exp(-ay) \sum_{j=0}^{m} \|\exp(-\sigma x)\, D^j_x u\|_{L_2} < \infty \right\},$$

$$H^m_{\alpha,\beta}(R) = \left\{ u(x) \,\Bigg|\, \sup_{\sigma\in[\alpha,\beta]} \sum_{j=0}^{m} \|\exp(-\sigma x)\, D^j_x u\|_{L_2} < \infty \right\},$$

$$A^a_m(\Omega) = \left\{ F(p, y) \,\Bigg|\, \sup_{\substack{y>0 \\ \sigma\in[\alpha,\beta]}} \exp(-ay) \|(1+|p|)^m F(p, y)\|_{L_2} < \infty \right\},$$

где $F(p, y)$ аналитична в полосе $\Delta: \alpha < \mathrm{Re}\,p < \beta$, $p = \sigma + i\tau$, если же $F(p, y)$ не зависит от y, то соответствующее пространство обозначим через $A_m(\Omega)$.

Через $l_j(p)$ обозначим собственный вектор матрицы $Ap+B$, соответствующий собственному значению $\lambda_j(p)$. Из (3) вытекает, что аналитическая вектор-функция $l_j(p)$ представляется в виде

$$l_j(p) = p\left(\alpha_j + \sum_{k=1}^{+\infty} d_{jk} p^{-k}\right), \ |p| \gg 1,$$

где α_j—собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_j. Пусть $u \in H^{m,a}_{\alpha,\beta}$ — решение системы (1), а $\hat{u}(p, y) = \,=< u(x, y), \exp(-px) >$—его образ Лапласа [2]. Из (1) имеем следующее представление:

$$\hat{u}(p, y) = \sum_{j=1}^{n} g_j(p)(\exp(\lambda_j(p)\cdot y)\, l_j(p), \ \alpha < \mathrm{Re}\,p < \beta, \tag{1.1}$$

где $g_j(p)$—произвольные аналитические функции.

Имеет место

Лемма 1. *В представлении* (1.1) *функции* $g_1(p), \ldots, g_{2m}(p)$ *равны тождественно нулю.*

Доказательство. В силу равенства Парсеваля преобразование Лапласа устанавливает изоморфизм между пространствами $H^{m,a}_{\alpha,\beta}$ и A^a_m. Отсюда и из линейной независимости векторов $l_1(p), \cdots, l_n(p)$ вытекает, что $g_j(p) \exp(\lambda_j(p)\cdot y) \in A^a_{m+1}$, поэтому

$$\|(1+|p|)^{m+1} g_j(p) \exp(\lambda_j(p)\, y)\|_{L_2} < \mathrm{cte} \exp(a\cdot y) \ \forall y > 0.$$

Согласно лемме Фату, устремляя $y \to 0^+$, получим $\|(1+|p|)^{m+1} g_j(p)\|_{L_2} < \, < \mathrm{cte}$, т. е. $g_j(p) \in A_{m+1}$. Из представления (3) вытекает существование чисел $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ таких, что для $j \leqslant m$

$$\int_{\tau > \gamma} (1+|p|)^{2(m+1)} |g_j(p)|^2 d\tau \leqslant \mathrm{cte} \exp(-\delta\cdot y),$$

что приводит, ввиду аналитичности $g_j(p)$, к $g_j(p) \equiv 0$, $j = 1, \cdots, m$. Точно также устанавливается, что $g_{m+1}(p), \cdots, g_{2m}(p) \equiv 0$. Лемма доказана.

Пусть $a \in R$ такое, что $\mathrm{Re}\,\lambda_j(p) \leqslant a$, $j \geqslant 2m+1$, а $N = \|\alpha_{2m+1}, \cdots, \alpha_n\|$.

Граничная задача А. Требуется найти решение $u \in H^{0,a}_{\alpha,\beta}$ системы (1), удовлетворяющее граничному условию

$$Mu(x, 0) = f(x) \text{ в } H^0_{\alpha,\beta}(R), \tag{1.2}$$

где M — постоянная матрица размерности $(n-2m, n)$, а $f = (f_1, \cdots, f_{n-2m}) \in H^0_{\alpha,\beta}(R)$. Справедлива следущая

Теорема 1. *Существуют числа α и β $(\alpha<\beta)$ такие, что для корректности задачи A необходимо и достаточно, чтобы* $\det MN\neq 0$. *имеет место оценка*

$$\|u\|_{H^0_{*,\beta}}\leqslant \mathrm{cte}\|f\|_{H^0_{*,\beta}}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Подставим $\hat{u}(p, y)$ из (1.1) в (1.2). Так как $|\exp(\lambda_j(p)\cdot y)|\leqslant \mathrm{cte}$, $y\in[0, 1]$, то в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и равенства Парсеваля, получим

$$M(p)\,g(p)=\hat{f}(p),\ \alpha<\mathrm{Re}\,p<\beta, \tag{1.4}$$

где $\hat{f}(p)=\langle f(x), \exp(-px)\rangle$, $g(p)=(g_{2m+1}(p),\cdots, g_n(p))$, $M(p)=$ $=p\cdot MN+D+o(1)$, $|p|\gg 1$, D — вполне определенная постоянная матрица. Пусть $\det MN\neq 0$. Тогда $\det M(p)=c\cdot p^{n-2m}+o(p^{n-2m})$, где $c=\det MN$. Выбирая α и β мы добьемся того, что $\det M(p)\neq 0$, $p\in\Omega$. Отсюда для элементов $M^{ij}(p)$ обратной матрицы $M^{-1}(p)$ имеем оценку $|M_{ij}(p)|<\mathrm{cte}\,|p|$. Из (1.4) имеем $g(p)=M^{-1}(p)\hat{f}(p)\in A_1(\Omega)$. Очевидно соответствующее решение $\hat{u}\in A_0^*(\Omega)$ и справедлива оценка (1.3).

Пусть теперь $\det MN=0$. Тогда, приводя матрицу MN к трапецоидальному виду нетрудно заметить, что либо система (1.4) не имеет решения, либо некоторые из компонент $g(p)$ принадлежат $A_0(\Omega)$, но не принадлежат $A_1(\Omega)$. А это приводит к тому, что $\hat{u}\,\overline{\in}\,(\Omega)$.

Замечание. Из вышеизложенного вытекает, что для корректности задачи Коши в классах $H^{m,\alpha}_{*,\beta}$ необходимо, чтобы собственные значения матрицы A были вещественны. Обратное не всегда верно. Действительно, легко проверить, что для оператора $L_1=\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-$ $-k^2$ корректна задача Коши, а для оператора $L_2=\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-$ $-\frac{\partial}{\partial x}$ — задача Дирихле.

§ 2. Смешанная граничная задача

Введем классы функций

$$H^m_{\alpha,\beta}(R_\pm)=\{f\,|\,f\in H^m_{\alpha,\beta}(R),\ \mathrm{supp}^*f\subset\overline{R}_\pm\}.$$

Пусть M_1, M_2 — матрицы размерности $(n-2m, n)$ такие, что $\det M_1N\neq 0$, $\det M_2N\neq 0$.

Граничная задача B. Требуется найти решение $u(x, y)$ системы (1), принадлежащее классу $H^{0,\alpha}_{*,\beta}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$M_1 u(x,\ 0) = h_+(x) \quad \text{в} \quad H^0_{\alpha,\beta}(R_+),$$
$$M_2 u(x,\ 0) = h_-(x) \quad \text{в} \quad H^0_{\alpha,\beta}(R_-), \tag{2.1}$$

где $h_\pm \in H^0_{\alpha,\beta}(R_\pm)$ — заданные вектор-функции.

Перепишем (2.1) в следующем виде:

$$M_1 u = h_+ + f_-, \ M_2 u = h_- + f_+, \tag{2.2}$$

где $f_\pm \in H^0_{\alpha,\beta}(R_\pm)$ — неизвестные вектор-функции. Переходя в (2.2) к образам Лапласа и подставляя $\hat{u}(p,\ g)$ из (1.1) ($g_1 = \cdots = g_{2m} = 0$), получим

$$M_1(p)\, g(p) = \hat{h}_+(p) + \hat{f}_-(p), \ M_2(p)\, g(p) = \hat{h}_-(p) + \hat{f}_+(p), \tag{2.3}$$

где $M_1(p) = pM_1 N + D_1 + o(1)$, $M_2(p) = p M_2 N + D_2 + o(1)$, $g(p) = (g_{2m+1}(p), \cdots, g_n(p))$.

Выберем α и β так, чтобы $\det M_1(p) \neq 0$, $\det M_2(p) \neq 0 \ \forall\, p \in \Omega$.

Исключая $g(p)$ из (2.3), получим следующую задачу сопряжения:

$$\hat{f}_-(p) = K(p)\hat{f}_+(p) + F(p), \ p \in \Omega, \tag{2.4}$$

где $K(p) = M_1(p) \cdot M_2^{-1}(p)$, $F(p) = M_1(p)\, M_2^{-1}(p)\, \hat{h}_-(p) - \hat{h}_+(p) \in H^0_{\alpha,\beta}(R)$, $|K(p)| \leqslant \mathrm{cte}$.

Пусть $A(p)$ — некоторая невырожденная в полосе $\alpha < \mathrm{Re}\, p < \beta$ матрица с элементами $A_{ij}(p)$, непрерывными в ней, включая точку $p = \infty$.

Определение. Правой канонической факторизацией матрицы $A(p)$ называется представление её в виде

$$A(p) = A_-(p)\, D(p)\, A_+(p) \tag{2.5}$$

с диагональной матрицей $D(p) = \left\{ [(p - p_0)/(p - p_1)]^{\varkappa_j} \right\}_{jk}$, $\mathrm{Re}\ p_0 > \beta$, $\mathrm{Re}\ p_1 < \alpha$, где $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ — целые числа, а $A_\pm(p)$ — квадратные матрицы порядка n, допускающее аналитические продолжения, соответственно, в области $\mathrm{Re}\ p > \alpha$ и $\mathrm{Re}\ p < \beta$, причем $\det A_+(p) \neq 0 (\mathrm{Re}\ p > \alpha)$, $\det A_-(p) \neq 0\ (\mathrm{Re}\ p < \beta)$, $\sup |A^{ij}_\pm(p)| \leqslant \mathrm{cte}$. Имеет место

Лемма 2. *Матрица $K(p)$ в (2.4) допускает правую каноническую факторизацию.*

Доказательство. Дробно-линейное преобразование $t = \dfrac{p - p^1}{p - p_1}$ отображает полуплоскость $\mathrm{Re}\, p > \alpha$ в круг $C_1 \ni 0$. При этом полуплоскость $\mathrm{Re}\, p > \beta$ отображается в круг C_2, касающийся окружности ∂C^1 и содержащий точку 0. Очевидно функции $\det M_1(p)$ и $\det M_2(p)$ в области $\mathrm{Re}\, p > \alpha$ имеют конечное число нулей, которые обозначим соответственно, через $p_{11}, \cdots, p_{1k_1}$ и $p_{21}, \cdots, p_{2k_2}$. Тем самым функция $\det K(p)$ имеет в точках $p_{11}, \cdots, p_{1k_1}$ полюсы, а в точках $p_{21}, \cdots, p_{2k_2}$ — нули. Их кратности обозначим, соответственно, через $m_1, \cdots, m_{k_1}$ и $r_1, \cdots, r_{k_2}$. Образы точек $p_{11}, \cdots, p_{2k_2}$ обозначим через $t_{11}, \cdots, t_{2k_2}$. Рассмотрим матрицу $N(t) = (t - t_{11})^{q_1} \cdots (t - t_{1k_1})^{q_{k_1}} K(\alpha(t))$, где $\alpha(t)=\frac{tp_1-p_0}{t-1}$, $q_1,\cdots,q_{k_1}$ такие, что в точках $t_{11},\cdots,t_{1k_1}$ элементы $N(t)$ аналитичны. Таким образом, функция $\det N(t)$ в области C_1 аналитична и имеет нули $t_{11},\cdots,t_{1k_1},t_{21},\cdots,t_{2k_2}$ с кратностями $nq_1-m_1,\cdots,nq_{k_1}-m_{k_1}$, $r_1,\cdots,r_{k_2}$. Согласно работе [3] матрица $N(t)$ допускает факторизацию вида

$$N(t)=N_-(t)\,D_0(t)\,N_+(t), \tag{2.6}$$

где $N_\pm(t)$ аналитичны и ограничены, соответственно, внутри и вне круга C_1, $\det N_\pm(t)\neq 0$, а $D_0(t)=\left\| t^{\varkappa_j^0}\delta_{jk}\right\|_1^n$ — диагональная матрица, при этом $\sum\limits_{j=1}^{n}\varkappa_j^0=\sum\limits_{j=1}^{k_1}(nq_j-m_j)+\sum\limits_{j=1}^{k_2}r_j$. Заметим, что из процедуры построения факторизации (2.6) вытекает, что матрица $N_-(t)$ в действительности аналитична вне круга C_2. Таким образом, для матрицы $K(\alpha(t))$ будем иметь

$$K(\alpha(t))=K_-(t)\,D_1(t)\,K_+(t),$$

где

$$K_-(t)=\left(\frac{t}{t-t_{11}}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{t}{t-t_{1k_1}}\right)^{q_{k_1}}N_-(t),\ K_+(t)=N_+(t),\ D_1(t)=$$

$$=\| t^{\varkappa_j}\delta_{jk}\|_1^n,\ \varkappa_j=\varkappa_j^0-\sum_{j=1}^{k_1}q_j,\ \sum_{j=1}^{n}\varkappa_j=\sum_{j=1}^{k_2}r_j-\sum_{j=1}^{k_1}m_j.$$

Возвращаясь к переменной p, мы получим утверждение леммы.

Пользуясь леммой нетрудно доказать, что

Теорема 2. *Задача сопряжения (2.4) является нетеровой, её индекс равен*

$$\varkappa=\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j=\frac{1}{2\pi}[\arg\det K(p)]_{\operatorname{Re}p=\alpha}.$$

Далее, подставляя решение $\hat f_+(p)$ или $\hat f_-(p)$ задачи сопряжения (2.4) в (2.3), мы найдем вектор-функцию $g(p)=(g_{2m+1},\cdots,g_n)$, а затем и $u(x,y)$.

Тем самым получена

Теорема 3. *Граничная задача B является нетеровой.*

§ 3. Граничная задача в полосе

Введем классы функций

$$H^m_{\alpha,\beta}(D)=\left\{u(x,y)\,\Big|\,\sup_{\substack{\sigma\in[\alpha,\beta]\\ 0<y<1}}\sum_{j=0}^{m}\|\exp(-\sigma x)D_x^j u\|_{L_2}<\infty\right\}.$$

Пусть $f_1,\cdots,f_m$ — номера строк, реализующих базисный минор матрицы $\|\alpha_1,\cdots,\alpha_m\|$, а $j_{m+1},\cdots,j_n$ — матрицы $\|\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\|$.

Граничная задача C. Требуется найти решение $u\in H^0_{\alpha,\beta}(D)$ системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_{j_k}(x, 0) = f_{j_k}(x), \quad k = m+1, \cdots, n,$$

$$u_{j_k}(x, 1) = f_{j_k}(x), \quad k = 1, \cdots, m,$$

где $f_{j_k} \in H^0_{\alpha, \beta}(R)$, $k = 1, \cdots, n$.

Поступая так же как и в § 1 относительно неизвестных функций $g_1(p), \cdots, g_n(p)$, получим систему

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(p)\, l_j^{j_k}(p) = \hat{f}_{j_k}(p), \quad \sum_{j=1}^{n} g_j(p)\, l_j^{j_k}(p) \exp(\lambda_j(p)) = \hat{f}_{j_k}(p),$$

$$(k = m+1, \cdots, n) \qquad\qquad (k = 1, \cdots, m)$$

матрицу которой обозначим через $L(p)$.

Используя теорему Лапласа об определителях нетрудно показать, что существуют числа α и β такие, что функция $\det L(p)$ в полосе $\alpha < \mathrm{Re}\, p < \beta$ не обращается в нуль, а элементы $L^{ij}(p)$ матрицы $L^{-1}(p)$, обратной к $L(p)$, удовлетворяют оценкам

$$|L^{ij}(p)| < \mathrm{cte}/|p|, \quad |L^{ij}(p)| \leqslant \frac{\mathrm{cte}}{|p|}(1 + |\exp \lambda_j(p)|)^{-1}.$$

$$(j = 2m+1, \cdots, n) \qquad\qquad (j = 1, \cdots, 2m)$$

Теперь нетрудно доказать, что справедлива

Теорема 4. *Существуют числа α и β такие, что граничная задача C имеет решение и притом единственное, при этом*

$$\|u\|_{H^0_{\alpha,\beta}(D)} \leqslant \mathrm{cte} \|f\|_{H^0_{\alpha,\beta}(R)}.$$

Ереванский политехнический институт

Поступила 16. VI. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 2, М., «Мир», 1986.
2. *А. Г. Земанян.* Интегральные преобразования обобщенных функций, М., «Наука», 1974.
3. *З. Прёсдорф.* Некоторые классы сингулярных уравнений, М., «Мир», 1979.