ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXVI, № 1, 1991 Математика

УДК 517.51

М. Г. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКЕ L^1 И ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ И О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Широко известна следующая

Теорема А. (Н. Н. Лузин [1]). Для любой почти всюду конечной на $[0, 1]$ измеримой функции $f(x)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ и непрерывная на $[0, 1]$ функция, $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E.

Эта идея Лузина об исправлении функций с целью улучшения ее свойств получила в дальнейшем большое развитие. Здесь фундаментальные результаты были получены Д. Е. Меньшовым (см. [2], [3]).

Теорема В (Д. Е. Меньшов). Пусть $f(x)$—измеримая функция, конечная почти всюду на $[0, 2\pi]$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$ можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $|E| > 2\pi-\varepsilon$ и такую, что ее ряд Фурье сходится равномерно на $[0, 2\pi]$.

Теорема С (Д. Е. Меньшов). Пусть P —любое совершенное нигде не плотное множество на $[0, 2\pi]$. Тогда для любой $f(x) \in L[0, 2\pi]$ можно найти такую функцию $g(x) \in L[0, 2\pi]$, что $g(x) = f(x)$ на P и ее ряд Фурье сходится почти всюду.

В связи с этим в 1964 г. П. Л. Ульянов [4] поставил вопрос: нельзя ли исправленную функцию $g(x)$ выбрать так, чтобы последовательность коэффициентов Фурье по тригонометрической системе

$$\{a_k(g), b_k(g)\} \in l_p \text{ при некотором } p > 0?$$

Он высказал предположение, что случай $p = 1$ невозможен. Решение гипотезы П. Л. Ульянова было получено И. Кацнельсоном [5] в 1976 г., а в 1977 г. А. М. Олевский [6] установил, что существует функция $g_0(x) \in C[0, 2\pi]$ такая, что для любой функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$ с мерой $|\{x \in [0, 2\pi], f(x) = g_0(x)\}| > 0$ последовательность коэффициентов

$$\{a_k(f), b_k(f)\} \overline{\in} l_p \text{ при всех } p \in (0,2).$$

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \in [0, 2\pi]$, с $|E| > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L[0, 2\pi]$, $g(x) = f(x)$ на E и такую, что последовательность коэффициентов Фурье функции $g(x)$*

$$\{c_k(g)\} \in l_p \text{ для всех } p > 2.$$

Спрашивается, можно ли в теореме 1 обеспечить также сходимость почти всюду или сходимость в метрике L^1. Оказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ. Более того, справедлива

Теорема 2. *Для каждого* $\varepsilon>0$ *существует измеримое множество* $E\subset[0, 2\pi$ с $|E|>2\pi-\varepsilon$ *такое, что для любой функции* $f(x)\in\in L[0, 2\pi]$ *можно найти функцию* $g(x)\in L[0, 2\pi]$, $g(x)=f(x)$ *на* E,

$$\int_0^{2\pi}|g(x)-f(x)|\,dx<\varepsilon$$

и такую, что ее ряд Фурье сходится в метрике L^1 *и почти всюду на* $[0, 2\pi]$ *и последовательность коэффициентов Фурье*

$$|c_k(g)|_{k=-\infty}^{\infty}\in l_p \text{ для всех } p>2.$$

Отметим, что этой теоремой дается положительный ответ на следующий вопрос З. Чисельского: можно ли для любого $\varepsilon>0$ исправленную функцию $g(x)$ выбрать так, чтобы

$$\int_0^{2\pi}|g(x)-f(x|\,dx<\varepsilon?$$

Введем некоторые обозначения. Характеристическую функцию множества E будем обозначать через $\chi_E(t)$. Разобъем сегмент $[0, 2\pi]$ на 2^ν равных частей и обозночим эти отрезки через

$$\Delta_\nu^{(m)},\quad 0\leqslant m\leqslant 2^\nu.$$

n-ую частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ будем обозначать через $S_n(x, f)$:

$$S_n(x, f)=\sum_{0<|k|<n}a_k(f)\,e^{ikx}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt \tag{1}$$

$$\left(a_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-ikt}\,dt\right).$$

§ 2. Доказательства основных лемм

Лемма 1. *Для любых чисел* $\gamma\neq0$; $0<\varepsilon_0<1$; $0<\delta_0<1$; M_0 *и для любого интервала* $[a, b]\equiv\Delta\subset[0, 2\pi]$ *вида* Δ_ν^k *существуют функция* $g(x)$, *измеримы множества* G, $E\subset[0, 2\pi]$ *и полином* $P(x)$ *вида*

$$P(x)=\sum_{M_0<|k|<M}a_k e^{ikx},$$

удовлетворяющие условиям

1) $$g(x)=\begin{cases}\gamma, & x\in E\cap\Delta\\ 0, & x\overline{\in}\Delta\end{cases},\quad |E|>2\pi-\varepsilon_0,$$

2) $$\int_0^{2\pi}|P(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon_0,$$

3) $$\int_0^{2\pi}|g(x)|\,dx\leqslant 4|\gamma|\cdot|\Delta|,$$

4) $$\sum_{M_0<|k|<M}|a_k^{2+\varepsilon_0}|<\varepsilon_0,\quad |G|>2\pi-\delta_0|\Delta|,$$

5) $$\left|\sum_{M_0<|k|<m}a_k e^{ikx}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{c_0|\gamma|}{\delta_0}, & x\in G\cap\Delta\\ \varepsilon_0, & x\in G\setminus\Delta\end{cases},\quad M_0\leqslant m\leqslant M,$$
$$c_0=\mathrm{const}$$

6) $$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{M_0<|k|<m}a_k e^{ikx}\right|dx\leqslant 14|\gamma|\,|\Delta|,\quad M_0\leqslant m\leqslant M.$$

Доказательство. Положим

$$I_m(x)=\begin{cases}-m^{\frac{1}{2}}, & x\in\left[0,\ \dfrac{2\pi}{m+1}\right)\\ m^{-\frac{1}{2}}, & x\in\left[\dfrac{2\pi}{m+1},\ 2\pi\right],\\ I_m(x+2\pi),\end{cases}$$

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_0^2}{12}\ \frac{\delta\cdot|\Delta|}{2};\ \frac{1}{2}|\gamma|\,|\Delta|\right\}. \quad (2$$

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi}I_m(x)\,dx=0,\quad \int_0^{2\pi}I_m^2(x)\,dx=2\pi.$$

Нетрудно видеть, что существует натуральное число s_1 такое, что

$$\left|\int_\Delta\gamma\cdot I_1(2^{s_1}\cdot x)\,e^{inx}\,dx\right|<\frac{\varepsilon^2}{18N},\quad |n|\leqslant M. \quad (3)$$

Возьмем натуральное число $N_1>M_0$ настолько большим, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{|k|<N_1}a_k^{(1)}e^{ikx}-g_1(x)\right|dx<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2,$$

где

$$g_1(x)=\gamma\cdot\chi_\Delta(x)\,I_1(2^{s_1}\cdot x),$$

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Отсюда в силу (3) имеем

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{N<|k|<N_1} a_k^{(1)} e^{ikx} - g_1(x)\Big|\, dx < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2,$$

Следовательно

$$\left|\left\{x\in[0,2\pi],\ \Big|\sum_{N<|k|<N_1} a_k^{(1)} e^{ikx} - g_1(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Продолжая это рассуждение, мы можем по индукции определить последовательности чисел $S_1 < S_2 < \cdots$, $M_0 < N_1 < \cdots$, функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ множеств A_m и полиномов

$$P_m(x) = \sum_{N_{m-1}<|k|<N_m} a_k^{(m)} e^{ikx},$$

удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{2\pi} |P_m(x) - g_m(x)|\, dx < \left(\frac{\varepsilon}{4^m}\right)^2, \tag{4}$$

$$|P_m(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{4^m}, \text{ при } x\in A_m, \tag{5}$$

$$|A_m| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{4^m},\quad |a_k^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{4N_{m-1}},\quad |k| \leqslant N_{m-1}, \tag{6}$$

где

$$g_m(x) = \gamma\cdot\chi_\Delta^{(x)} I_m(2^{s_m}\cdot x),\quad a_k^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_m(x)\, e^{-ikx}\, dx. \tag{7}$$

Выберем натуральные числа q_0, q_1 так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$q_0 > \left(\frac{|\gamma||\Delta|^2}{\delta_0}\right)^2 + (10\delta_0)^{-1}, \tag{8}$$

$$\sum_{m=q_0}^{q} \frac{1}{m} < \varepsilon\left(4|\gamma|\sqrt{|\Delta|} + 22\right)^{-(2+\varepsilon)}, \tag{9}$$

$$0 < 1 - \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+\varepsilon}} < \varepsilon\left(2 + 2|\gamma||\Delta|\right)^{-1}. \tag{10}$$

Положим

$$E_m = \{x\in[0,2\pi];\ I_m(2^{s_m}x) = -\sqrt{m}\}, \tag{11}$$

$$\varphi_m(x) = \chi^{(x)}_{E_m\cap\Delta}, \tag{12}$$

Согласно лемме Д. Е. Меньшова (см. [7], стр. 440), в формулировке которой берется

$$q = 2^m;\ \nu = \left[\frac{m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\varepsilon}}}{\delta_0}\right],\ [c,\ d] = \Delta = [a,\ b],\ \delta = \frac{|\Delta|}{2^m\, m},$$

можно определить измеримое множество G_m такое, что

$$G_m \subset \Delta,\ |G_m| > \left(1 - 5\frac{\delta_0}{m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\varepsilon}}}\right), \tag{13}$$

$$\left|\int_0^{2\pi} \varphi_m(x)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dx\right| \leqslant \frac{c_1}{\delta_0\, m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\varepsilon}}},\ x \in G_m, \tag{14}$$

$$n = 1,\ 2,\ \cdots\ (c_1 = \text{const}).$$

Отсюда и из того, что

$$g_m(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{m}}\chi_\Delta(x) - \gamma\sqrt{m}\,\varphi_m(x)\ (\text{см. } (1), (7), (12)),$$

при $x \in G_m$ будем иметь

$$|S_n(x,\ g_m)| < \frac{c_2\, m^{\frac{1}{2+\varepsilon}}\,|\gamma|}{\delta_0}\ (c_2 = \text{const}).$$

Следовательно

$$\sup_{N_{m-1} < n < N_m} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}\left|\sum_{N_{m-1} < |k| < n} a_k^{(m)} e^{ikx}\right| < \frac{c_2|\gamma|}{\delta_0},\ x \in G_m. \tag{15}$$

Определим множества E, G, функцию $g(x)$ и полином $P(x)$ следующим образом:

$$E = [0,\ 2\pi] \setminus \left(\bigcup_{m=q_0}^{q} E_m\right),$$

$$G = E \cap \left\{\bigcap_{m=q_0}^{q} A_m \cap \left(G_m \cup \left([0, 2\pi] \setminus \left[a - \frac{\delta_0}{2}|\Delta|;\ b + \frac{\delta_0}{2}|\Delta|\right]\right)\right)\right\}, \tag{16}$$

$$g(x) = \begin{cases} \gamma\chi_\Delta(x), & x \in E \\ \bar{g}(x), & x \in \bigcup_{m=q_0}^{q} E_m, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\bar{g}(x) = \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} g_m(x),$$

$$P(x) = \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} P_m(x) = \sum_{M_0 < |k| < M} a_k e^{ikx}, \tag{18}$$

а

$$a_k = m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} a_k^{(m)},\ N_{m-1} < |k| \leqslant N_m. \tag{18°}$$

$$M_0 < M_0 = N_{q_0-1},\ M = N_q.$$

Очевидно, что (см. (1), (7), (9), (11), (17), (16))

$$|E| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{2},\ g(x) = 0 \text{ вне } \Delta.$$

В силу (1), (4), (7), (10), (18), (17), имеем

$$\int_0^{2\pi} |P(x) - g(x)|\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} |g(x) - \bar{g}(x)|\, dx +$$

$$+ \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \int_0^{2\pi} |P_m(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + \int_{\Delta \cap E} |\gamma| \sum_{m=q_0}^{q} \left| m^{-\frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{1}{2}} - 1 \right| dx < \varepsilon.$$

Из (1), (2), (7), (9), (10), (17), (16) следует

$$\int_\Delta |g(x)|\, dx = \int_{\Delta \cap E} |g(x)|\, dx + \int_{\Delta \cap \left(\bigcup\limits_{m=q_0}^{q} E_m\right)} \left| \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} g_m \right| dx <$$

$$\leqslant |\gamma| \cdot |\Delta \cap E| + |\gamma| \sum_{k=q_0}^{q} \int_{E_k} \left| \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} I_m(2^{s_m} \cdot x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant [illegible] \sum_{k=q_0}^{q} \int_{\Delta \cap E_k} \left| k^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} + \sum_{\substack{m=q_0 \\ m \neq k}}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{1}{2}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant |\gamma|\, |\Delta| + |\gamma| \cdot \sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{1}{2}} \sum_{k=q_0}^{q} \int_{\Delta \cap E_k} dx + .$$

$$+ |\gamma| \cdot \sum_{m=q_0}^{q} \int_{\Delta \cap E_k} k^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} dx \leqslant |\gamma|\, |\Delta| \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{2} \cdot \varepsilon\right) +$$

$$+ |\gamma| \cdot \sum_{k=q_0}^{q} k^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot |\Delta| \cdot |E_k| \leqslant$$

$$\leqslant |\gamma|\, |\Delta|\, [2 + (2+\varepsilon) \cdot \varepsilon] \leqslant |\gamma| \cdot |\Delta|.$$

Ввиду того, что (см. (1), (7), (18))

$$\int_\Delta g_m^2(x)\, dx = \gamma^2 \int_\Delta I_m^2 (2^{s_m} \cdot x)\, dx = \gamma^2 \int_{\Delta \cap E_m} m\, dx +$$

$$+\gamma^2 \int\limits_{\Delta\setminus E_m} \frac{1}{m}\,dx = \gamma_m^2 |\Delta||E_m| + \qquad (1$$

$$+\gamma^2 \frac{1}{m}|\Delta\setminus E_m| \leqslant 3\pi\gamma^2|\Delta|,$$

из (7) для всех $m \geqslant 1$ получим

$$\left(\sum_{N_{m-1}<|k|<N_m} |a_k^{(m)}|^{2+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} < \left(\sum_{N_{m-1}<|k|<N_m} |a_k^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< 2\left(\int\limits_{\Delta} g_m^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\pi|\gamma|\sqrt{|\Delta|},$$

отсюда и из (9), (18°) имеем

$$\sum_{M_0<|k|<M} \left|a_k\right|^{2+\varepsilon} = \sum_{m=q_0}^{q}\left(\sum_{N_{m-1}<|k|<N_m}\left[m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}\cdot\left|a_k^{(m)}\right|\right]^{2+\varepsilon}\right) =$$

$$= \sum_{m=q_0}^{q}\frac{1}{m}\sum_{N_{m-1}<|k|<N_m}\left|a_k^{(m)}\right|^{2+\varepsilon} < (2\pi|\gamma|\sqrt{|\Delta|}+2)^{2+\varepsilon}\sum_{m=q_0}^{q}\frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Ввиду того, что

$$g_m(x) = 0 \text{ вне } \Delta \text{ (см. (7))}$$

при $x \in [0, 2\pi] \setminus \left[a - \frac{\delta_0}{2}|\Delta|;\ b + \frac{\delta_0}{2}|\Delta|\right]$, $q_0 \leqslant m \leqslant q$

будем иметь

$$|S_n(x, g_m)| \leqslant \frac{1}{\frac{\delta_0}{2}|\Delta|}|g_m(x)|\,dx < \frac{|\gamma|}{\sqrt{m}\,\delta_0} < \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ (см. (8))},$$

следовательно

$$\left|\sum_{N_{m-1}<|k|<n} a_k^{(m)} e^{ikx}\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \text{ при } x \overline{\in} \left[a - \frac{\delta_0|\Delta|}{2};\ b + \frac{\delta_0|\Delta|}{2}\right], \qquad (20)$$

$$n = N_{m-1}+1, \cdots, N_m.$$

Из (1), (2), (6), (10), (11), (13) и (16) следует

$$|G| > 2\pi - \delta_0|\Delta|.$$

Теперь проверим выполнение условий 5) и 6) леммы 1. Пусть $n \in [M_0, M]$, тогда для некоторого натурального $m_0 \in [q_0, q]$ имеем

$$\sum_{M_0<|k|<n} a_k e^{ikx} = \sum_{m=q_0}^{m_0-1}\frac{P_m(x)}{m^{\frac{1}{2+\varepsilon}}} + \sum_{N_{m_0-1}<|k|<n} a_k e^{ikx}. \qquad (21)$$

Отсюда и из (1), (2), (5), (7), (10), (13), (15), (16), (20), при $x \in G$ получим

$$\left|\sum_{M_0<|k|<n} a_k e^{ikx}\right| \leqslant \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} |P_m(x)-g_m(x)| +$$

$$+\sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} |g_m(x)| + \left|\sum_{N_{m_0-1}<|k|<n} a_k e^{ikx}\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} + |\gamma| \left[\sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}-\frac{1}{2}} + \frac{c_2|\gamma|}{\delta_0}\right] \chi_\Delta(x) <$$

$$\leqslant \begin{cases} \frac{c_0|\gamma|}{\delta_0}, & x \in G \cap \Delta \\ \varepsilon_0, & x \in G \setminus \Delta \end{cases}; \quad c_0 = \text{const}.$$

Учитывая соотношения (1), (2), (4), (7), (10), (19), (21) имеем

$$\int_0^{2\pi} \left|\sum_{M_0<|k|<n} a_k e^{ikx}\right| dx < \sum_{m=q_0}^{m_0-1} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \int_0^{2\pi} |P_m(x)-g_m(x)|\, dx +$$

$$+ m_0^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \cdot \left(\sum_{N_{m_0-1}<|k|<N_{m_0}} [a_k^{(m_0)}]^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{m=q_0}^{q} m^{-\frac{1}{2+\varepsilon_1}} \int_0^{2\pi} |g_m(x)|\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 4 m_0^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} |\gamma| \sqrt{|\Delta|} +$$

$$+\sum_{m=q_0}^{q} |\gamma|\, m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \left[\int_{E_m \cap \Delta} \sqrt{m}\, dx + \int_{\Delta \setminus E_m} \frac{dx}{\sqrt{m}}\right] <$$

$$\leqslant \varepsilon + |\gamma| \sum_{m=q_0}^{q} \left(\sqrt{m}\,|\Delta|\,|E_m| + \frac{|\Delta|}{\sqrt{m}}\right) m^{-\frac{1}{2+\varepsilon}} \leqslant 13|\gamma|\,|\Delta|.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любой функции* $f(x) \in L[0, 2\pi]$, $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < 1$ *и для любых чисел* $0<\varepsilon<1$, $N_0>2$ *существуют функция* $g(x) \in L[0, 2\pi]$, *множества* G, $E \in [0, 2\pi]$ *и полином* $P(x)$ *вида*

$$P(x) = \sum_{N_0<|k|<N} c_k e^{ikx},$$

удовлетворяющие условиям

$$f(x) = g(x); \quad x \in E, \quad |E| > 2\pi - \varepsilon,$$

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|\, dx \leqslant 4 \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx, \quad \int_0^{2\pi} |P(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon, \quad \sum_{N_0 < |k| < N} |c_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon,$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_0 < |k| < n} c_k e^{ikx} \right| dx \leqslant 14 \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx, \quad N_0 < n \leqslant N,$$

$$\max_{N_0 < n < N} \left| \sum_{N < |k| < n} c_k e^{ikx} \right| < \frac{B\,|f(x)|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx}} + \varepsilon, \quad x \in G,$$

$$|G| > 2\pi - \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx}\,, \quad B = \text{const}.$$

Доказательство. Возьмем ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu} \; (\Delta_\nu \text{ имеет вид } \Delta_n^{(k)})$$

такую, что

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon_0^2}{4^2} \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx, \quad \int_0^{2\pi} |\varphi(x)|\, dx < 1, \tag{24}$$

где

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}\,;\ \frac{\delta}{2}\right\}, \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx}. \tag{25}$$

Пусть

$$B_0 = \left\{ x \in [0,\, 2\pi];\ |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\delta \varepsilon_0}{2} \right\}. \tag{26}$$

Очевидно, что

$$|B_0| > 2\pi - \frac{\delta \varepsilon_0}{2}. \tag{27}$$

Последовательным применением леммы 1 можно определить функции $g_\nu(x)$, множества E_ν, G_ν; $1 \leqslant \nu \leqslant \varepsilon_0$ и полиномы $P_\nu(x)$

$$P_\nu(x) = \sum_{N_{\nu-1} < |k| < N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{ikx}, \quad N_0 < N_1 < \cdots < N_{\nu_0},$$

которые удовлетворяют условиям

$$g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma_\nu, & x \in E_\nu \cap \Delta_\nu, \\ 0, & x \overline{\in} \Delta_\nu, \end{cases} \quad |E_\nu| > 2\pi - \frac{\varepsilon_0}{2^{\nu+1}}, \tag{28}$$

$$\int_0^{2\pi} |P_\nu(x) - g_\nu(x)|\, dx < \frac{\varepsilon_0^2}{4^{\nu+1}}. \tag{29}$$

$$\int_0^{2\pi} |g_\nu(x)|\, dx < 4\,|\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu|, \tag{30}$$

$$\max_{N_{\nu-1} < n < N_\nu} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_{\nu-1} < |k| < n} c_k^{(\nu)} e^{ikx} \right| dx \leqslant 13\,|\gamma_\nu|\,|\Delta_\nu|, \tag{31}$$

$$\max_{N_{\nu-1} < n \leqslant N_\nu} \left| \sum_{N_{\nu-1} < |k| < n} c_k^{(\nu)} e^{ikx} \right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{c_0 |\gamma_\nu|}{\delta}, & x \in G_\nu \cap \Delta_\nu \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}, & x \in G_\nu \setminus \Delta_\nu, \end{cases} \tag{32}$$

$$|G_\nu| > 2\pi - \delta \cdot |\Delta_\nu|, \tag{33}$$

$$\sum_{N_{\nu-1} < |k| \leqslant N_\nu} |c_k^{(\nu)}|^{2+\varepsilon_0} < \frac{\varepsilon_0}{2^{\nu+1}}. \tag{34}$$

Положим

$$B_\nu = \left\{ x \in [0, 2\pi],\ |P_\nu(x) - g_\nu(x)| < \frac{\varepsilon_0}{2^\nu} \right\}, \tag{35}$$

$$E = \bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu,\quad G = \bigcap_{\nu=1}^{\nu_0} (G_\nu \cap B_\nu) \cap E \cap B_0, \tag{36}$$

$$g(x) = f(x) - [\bar g(x) - \varphi(x)],\quad \bar g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x), \tag{37}$$

$$P(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} P_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left(\sum_{N_{\nu-1} < |k| < N_\nu} c_k^{(\nu)} e^{ikx} \right) = \tag{38}$$

$$= \sum_{N_0 < |k| < N} c_k e^{ikx},$$

где

$$c_k = c_k^{(\nu)},\ \text{при}\ N_{\nu-1} < |k| \leqslant N_\nu,\ N = N_{\nu_0}. \tag{39}$$

В силу (29) и (35) имеем

$$|B_\nu^{(c)}| \frac{\varepsilon_0}{2^\nu} < \int_{B_\nu^{(c)}} |P_\nu(x) - g_\nu(x)|\, dx < \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0^2}{4^{\nu+1}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$|B_\nu| > 2\pi - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0}{2^\nu} \quad (B_\nu^{(c)} = [0, 2\pi] \setminus B_\nu).$$

Очевидно, что (см. (27), (33), (35), (36))

$$|E| > 2\pi - \varepsilon,\quad |G| > 2\pi - \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx}.$$

Из (24) — (30), (34), (37), (39) вытекает, что $g(x) = f(x),\ x \in E$.

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|\,dx \leqslant 4\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} |P(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \sum_{N_0 < |k| < N} |c_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon.$$

Пусть $n \in [N_0, N]$, тогда для некоторого $\nu_1 < \nu_0$ $N_{\nu_1 - 1} < n \leqslant N_{\nu_1}$ из (38) имеем

$$\sum_{N_0 < |k| < n} c_k e^{ikx} = \sum_{\nu=1}^{\nu_1 - 1} P_\nu(x) + \sum_{N_{\nu_1 - 1} < |k| < n} c_k^{(\nu_1)} e^{ikx}. \tag{38}$$

Отсюда и из (28), (30), (34), при $x \in G$ будем иметь

$$\left| \sum_{N_0 < |k| < n} c_k e^{ikx} \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\nu_1 - 1} |P_\nu(x) - g_\nu(x)| +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu_1} |g_\nu(x)| + \left| \sum_{N_{\nu_1 - 1} < |k| \leqslant n} c_k^{(\nu_1)} e^{ikx} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + |\varphi(x)| + \frac{\varepsilon_0}{2^{\nu_1}} + \frac{c_0 |\gamma_{\nu_1}|}{\delta} \chi_{\Delta_1}(x) < \frac{B|f(x)|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx}} + \varepsilon.$$

Учитывая соотношения (24)—(31), (38) получим

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_0 < |k| \leqslant n} c_k e^{ikx} \right| dx \leqslant \sum_{\nu=1}^{\nu_1 - 1} \int_0^{2\pi} |P_\nu(x) - g_\nu(x)|\,dx +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu_1} \int_0^{2\pi} |g_\nu(x)|\,dx + \int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_{\nu_1 - 1} < |k| < n} c_k^{(\nu_1)} e^{ikx} \right| dx \leqslant 10 \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\varepsilon > 0$, если обозначим через

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots. \tag{39}$$

последовательность тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами и последовательно применим лемму 2 можно найти последовательности функций $\{\overline{g}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, множеств $\{\overline{E}_k\}$, $\{\overline{G}_k\}$ и полиномов $\overline{P}_k(x)$ вида

$$\overline{P}_s(x) = \sum_{N_{s-1} < |k| < N_s} c_k^{(s)} e^{ikx}, \quad 1 < N_0 < N_1 < \cdots < N_s,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\overline{g}_s(x) = f_s(x), \ x \in \overline{E}_s, \ |\overline{E}_s| > 2\pi - \frac{\varepsilon}{2^{s+1}}, \tag{40}$$

$$\int_0^{2\pi} |\overline{g}_s(x)|\, dx \leqslant 4 \int_0^{2\pi} |f_s(x)|\, dx, \tag{41}$$

$$\int_0^{2\pi} |\overline{P}_s(x) - \overline{g}_s(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4^{s+1}}, \tag{42}$$

$$\sum_{N_{s-1} < |k| < N_s} |c_k^{(s)}|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2^{s+1}}, \tag{43}$$

$$\max_{N_{s-1} < n \leqslant N_s} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{N_{s-1} < |k| < n} c_k^{(s)} e^{ikx} \right| dx < 24 \int_0^{\pi} |f_s(x)|\, dx, \tag{44}$$

$$\max_{N_{s-1} < n < N_s} \left| \sum_{N_{s-1} < |k| < n} c_k^{(s)} e^{ikx} \right| \leqslant \frac{B\,|f_s(x)|}{\sqrt{\int_0^{2\pi} |f_s(x)|\, dx}} + \frac{\varepsilon}{2^s};\ x \in \overline{G}_s, \tag{45}$$

$$|\overline{G}_s| < 2\pi - \sqrt{\int_0^{2\pi} |f_s(x)|\, dx}\,. \tag{46}$$

Положим

$$E = \bigcap_{s=1}^{\infty} \overline{E}_s. \tag{47}$$

Очевидно, что (см. (40)) $|E| > 2\pi - \varepsilon$. Покажем, что множество E удовлетворяет требованиям теоремы 2. Пусть $f(x) \in L[0, 2\pi]$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ из последовательности (39) такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{s=1}^{N} f_{k_s}(x) - f(x) \right| dx = 0,\ f_{k_1}(x) = \sum_{|k| < N_1} b_k e^{ikx}, \tag{48}$$

$$\frac{\varepsilon}{2^{4(s+1)}} < \int_0^{2\pi} |f_{k_s}(x)|\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{4s}},\ s \geqslant 2, \tag{49}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 < \nu_1 < \cdots < \nu_{q-1}$, функции $g_j(x)$, f_{ν_j}, $j < q$, множества E_j, G_j и полиномы

$$P_j(x) = \sum_{M_{j-1} < |k| < \overline{M}_j} a_k^{(j)} e^{ikx},\ M_{j+1} = N_{\nu_{j+1}} > \overline{M}_j = N_{\nu_j + 1}, \tag{50}$$

удовлетворяющие условиям

$$g_j(x) = f_{k_j}(x),\ x \in E_j = \overline{E}_{k_j}, \tag{51}$$

$$\int_0^{2\pi} |g_j(x)|\, dx < 2^{-2j},\ j < q, \tag{52}$$

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=2}^{q_0}[P_j(x)-g_j(x)]\right|dx<2^{-2q_0},\quad q_0<q, \tag{53}$$

$$\sum_{M_{j-1}<|k|<\overline{M}_j}|a_k^{(j)}|^{2+\varepsilon/2^j}<\frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{54}$$

$$\max_{M_{j-1}<n<\overline{M}_j}\left|\sum_{M_{j-1}<|k|<n}a_k^{(j)}e^{ikx}\right|<2^{-j},\quad x\in G_j, \tag{55}$$

$$\max_{M_{j-1}<n<\overline{M}_j}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{M_{j-1}<|k|<n}a_k^{(j)}e^{ikx}\right|dx<2^{-j}, \tag{56}$$

$$|G_j|>2\pi-2^{-j+1}. \tag{57}$$

Возьмем функцию $\varphi(x)=f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (39) такую, что $\nu_q>q+10$

$$\int_0^{2\pi}\left|\varphi(x)-\left\{f_{k_q}(x)-\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)-g_j(x)]\right\}\right|dx<\frac{\varepsilon}{B2^{16(q+1)}}. \tag{58}$$

Ввиду того, что (см. (49), (53))

$$\int_0^{2\pi}\left|f_{k_q}(x)-\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)g_j(x)]\right|dx<\frac{\varepsilon}{2^{3q}}, \tag{59}$$

из (58) вытекает

$$\int_0^{2\pi}|f_{\nu_q}(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}|\varphi(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2^{2q}}, \tag{60}$$

Положим

$$P_q(x)=\overline{P}_{\nu_q}(x)=\sum_{N_{\nu_q-1}<|k|<N_{\nu_q}}c_k^{(\nu_q)}e^{ikx}=\sum_{M_q<|k|<\overline{M}_q}a_k^{(q)}e^{ikx}, \tag{61}$$

где

$$a_k^{(q)}=c_k^{(\nu_q)}.\ M_q=N_{\nu_q-1}<|k|<N_{\nu_q}=\overline{M}_q, \tag{62}$$

$$g_q(x)=f_{k_q}(x)+[\overline{g}_{\nu_q}(x)-f_{\nu_q}(x)], \tag{63}$$

$$F_s=\left\{x\in[0,2\pi],\ |f_{k_s}(x)|<\frac{\varepsilon}{2^{3s}}\right\}.\ s\geqslant 2, \tag{64}$$

где

$$G_q=\overline{G}_{\nu_q}\cap F_q,\ E_q=\overline{E}_{\nu_q}.$$

Ввиду того, что (см. (49))

$$\frac{\varepsilon}{2^{3s}}|F_s^{(c)}|<\int_{F_s^{(c)}}|f_{k_s}(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2^{4s}}\ (F_s^{(c)}=[0,2\pi]\setminus F_s)\ (s\geqslant 2)$$

будем иметь

$$|F_s| > 2\pi - 2^{-s}, \quad s \geqslant 2. \tag{65}$$

Учитывая соотношения (40)—(51), (53), (58)—(65), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \text{ при } x \in E_q, \tag{66}$$

$$\int_0^{2\pi} |g_q(x)|\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} \left| \varphi(x) - \left\{ f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} [P_j(x) - g_j(x)\right\} \right| dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} |\bar{g}_{\nu_q}(x)|\, dx + \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=2}^{q-1} [P_i(x) - q_j(x)] \right| dx < \frac{\varepsilon}{2^q}, \tag{67}$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=2}^{q} \right| [P_j(x) - g_j(x)] \Big| dx < \int_0^{2\pi} |\bar{g}_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x)|\, dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left| \varphi(x) - \left\{ f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} [P_j(x) - g_j(x)] \right\} \right| dx < \frac{\varepsilon}{2^{2q}}, \tag{68}$$

$$\underset{M_q < n < \overline{M}_q}{\text{mux}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{M_q < |k| < n} a_k^{(q)} e^{ikx} \right| dx < 2^{-q}, \tag{69}$$

при $x \in G_q$,

$$\max_{M_q < n < \overline{M}_q} \left| \sum_{M_q < |k| < n} a_k^{(q)} e^{ikx} \right| <$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2q}} + B |f_{\nu_q}^{(x)}| \cdot \left(\int_0^{2\pi} |f_{\nu_q}(x)|\, dx \right)^{-1/2} \leqslant 2^{-q}, \tag{70}$$

$$|G_q| > 2\pi - \sqrt{\int_0^{2\pi} |f_{\nu_q}(x)|\, dx}, \tag{71}$$

$$\sum_{M_q < |k| < \overline{M}_q} \left| a_k^{(q)} \right|^{2 + \frac{\varepsilon}{2q}} < \frac{\varepsilon}{2^q}. \tag{72}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}$, множеств $\{E_q\}$, $\{G_q\}$ и полиномов $\{P_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (66)—(72) для всех $q \geqslant 2$. Из (67) вытекает

$$\sum_{q=2}^{\infty} \int_0^{2\pi} |g_q(x)|\, dx < \infty. \tag{73}$$

Определим функцию $g(x)$ и ряд $\sum_{|k| \geqslant 0} c_k e^{ikx}$ следующим образом:

$$g(x)=\sum_{q=2}^{\infty} g_q(x)+f_{k_1}(x)\;\left(f_{k_1}(x)=\sum_{|k|<M_1} b_k e^{ikx}\right), \tag{74}$$

$$\sum c_k e^{ikx}\sum_{|k|<M_1} b_k e^{ikx}+\sum_{q=2}^{\infty}\left(\sum_{M_q<|k|<\overline{M}_q} a_k^{(q)} e^{ikx}\right), \tag{75}$$

где

$$c_k=\begin{cases} b_k, \text{ при } |k|\leqslant M_1\\ a_k^{(q)}, \text{ при } M_q<|k|\leqslant \overline{M}_q,\ q\geqslant 2\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \tag{76}$$

Из (48), (66), (73), (74) вытекает $g(x)\in L_{[0,2\pi]}$, $g(x)=f(x)$ на $E=\bigcap=\overline{E}_q$. Пусть n—произвольное натуральное число. Тогда для некоторого натурального числа q, $M_q<n\leqslant M_{q+1}$, из усолвий (62), (67), (69), (70), (74)—(76) следует

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{|k|<n} c_k e^{ikx}-g(x)\right|dx\leqslant\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)-g_j(x)]\right|dx+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|\sum_{M_q<|k|<n} a_k^{(q)} e^{ikx}\right|dx+\sum_{j=q}^{\infty}\int_0^{2\pi}|g_j(x)|\,dx<2^{-q+2},$$

т. е. ряд (75) является рядом Фурье функции $g(x)$ и сходится к ней в метрике L^1. Теперь докажем, что ряд (75) сходится также почти всюду на $[0, 2\pi]$. Положим

$$A_q=\left\{x\in[0,2\pi],\ \left|\sum_{j=2}^{q}[P_j(x)-g_j(x)]\right|<2^{-q}\right\}, \tag{77}$$

$$B_q=\left\{x\in[0,2\pi],\ \left|\sum_{j=q}^{\infty} g_j(x)\right|<2^{-q}\right\}, \tag{78}$$

$$B=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{q=m}^{\infty}(A_q\cap B_q\cap G_q). \tag{79}$$

В силу (67), (68), (77), (78), имеем

$$|A_q|>2\pi-2^{-q},\quad |B_q|>2\pi-2^{-q}.$$

Отсюда и из (71)—(79) следует, что $|B|=2\pi$.

Пусть $x\in B$, тогда существует натуральное число q_0 такое, что $x\in A_q\cap B_q\cap G_q$, при $q\geqslant q_0$.

Пусть, далее, $M_q<n\leqslant M_{q+1}$, $q\geqslant q_0$. Учитывая соотношения (70), (74), (75), получим

$$\left|\sum_{|k|<n} c_k e^{ikx}-g(x)\right|\leqslant\left|\sum_{j=2}^{q-1}[P_j(x)-g_j(x)]\right|+$$

$$\left|\sum_{M_q<|k|<n} a_k^{(q)} e^{ikx}\right|+\left|\sum_{j=q}^{\infty} g_j(x)\right|<3\cdot 2^{-q}\to 0.$$

Из (48), (54), (67), (74) вытекает

$$\int_0^{2\pi} |g(x)-f(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \sum_{|k|>0} |c_k|^{2+\varepsilon} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22. III. 1989

Մ. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Ինտեգրելի ֆունկցիաների Ֆուրիեի շարքերի համարյա ամենուրեք և L^1 մետրիկայով զուգամիտության և Ֆուրիեի գործակիցների մասին *(ամփոփում)*

Ցանկացած ε *թվի համար կառուցվում է չափելի* $E\subset[0, 2\pi]$ *բազմություն* $|E|>2\pi-\varepsilon$ *այնպիսին, որ յուրաքանչյուր* $f(x)\in L_{[0, 2\pi]}$ *ֆունկցիայի համար հնարավոր լինի գտնել E-ի վրա f(x)-ին հավասար արժեքներ ընդունող* $g(x)\in L_{[0, 2\pi]}$ *ֆունկցիա, որի Ֆուրիեի շարքը համարյա ամենուրեք և* L^1 *մետրիկայով զուգամիտի և Ֆուրիեի գործակիցների հաջորդականությունը* $\{c_k(g)\}\in l_p$ *բոլոր* $p>2$ *համար։*

M. G. GRIGORJAN. *On the conwergence in L^1 metric and almost everywhere of the Fourier series and on the Fourier coefficients of integrable functions* (summary)

The following theorem in proved. Theorem. For every $\varepsilon>0$ there exists a measureble set $E\subset[0, 2\pi]$, $|E|>2\pi-\varepsilon$ such that for every function $f(x)\in L$ exists an integrable function $g(x)$, $(g)x)=f(x)$ for $x\in E$ such that the trigonometric Fourier series of $g(x)$ converges almost everywhere and in L^1 metric and

$$\{c_k(g)\}\in l_p, \text{ for all } p>2,$$

$$c_k(g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,e^{-ikt}\,dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Лузин.* К основной теореме интегрального исчисления, Мат. сб., т. 28, № 2, 1912, 266—294.
2. *Д. Е. Меньшов.* Sur la representation des fonctiors mes. par series trigonometrikes, M. c. 9, (51), 1941, 667—692.
3. *Д. Е. Меньшов.* О рядах Фурье от суммируемых функций, Труды ММО, 1, 1932, 5—38.
4. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, вып. I, 1964, 3—68.
5. *Y. Katznelson.* On a theorem of Menchoff, A. M. c., 1975, 53, № 2, 396—398.
6. *А. М. Олевский.* Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана, ДАН СССР, 238, № 4, 1978, 796—799.
7. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.