

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН

СВОЙСТВО СРАВНИМОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ
МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И РАССТОЯНИЙ
МЕЖДУ a -ТОЧКАМИ

Основной вывод теории распределения значений Р. Неванлинны и теории поверхностей наложения Л. Альфорса (см. [1]), образно выражаясь, можно сформулировать следующим образом: если значения a и $b \in \mathbb{C}$ являются «хорошими», не дефектными, для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$, то количества a -точек и b -точек функции $w(z)$ в кругах $|z| \leq r$ примерно равны, близки друг к другу. Как оказалось (см. [2], [3], [4]) этот вывод является частью более общей закономерности — свойства близости a -точек мероморфных функций описывающих уже не только количество a -точек и b -точек, но и их взаимное расположение. Именно, согласно свойству близости a -точек близки не только количества a -точек и b -точек в кругах $|z| \leq r$ (как это следует из теорий Неванлинны и Альфорса), но одновременно близки модули этих a -точек и b -точек и их аргументы.

В настоящей работе устанавливается новая закономерность, согласно которой схожесть поведения «хороших» a -точек и b -точек (обозначим их $z_k(a)$ и $z_k(b)$) распространяется на поведение производной функции $w(z)$, рассмотренной на множестве этих a -точек и b -точек. Именно, величины

$$|w'(z_k(a))|, |w'(z_k(b))|, \quad (*)$$

образно выражаясь, сравнимы друг с другом — «свойство сравнимости производных».

Далее оказывается, что сравнимы друг с другом также величины

$$|z_k(a) - z_k(b)|, |z_k(b) - z_k(c)|, \quad (**)$$

если значения a, b, c «хорошие».

Отметим, что в терминах характеристики $A(r)$ можно дать для произвольной функции $w(z)$ оценки величин (*) снизу или оценки величин (**) сверху («свойство близости a -точек»).

Однако, для заданного ρ (даже при $\rho = 0$) можно указать примеры функций $w(z)$ порядка ρ , для которых величины (*) могут расти сколь угодно быстро. Это показывает, что классические характеристики ($T(r)$, $A(r)$, $\ln M(r)$) не в состоянии контролировать рост $|w'(z)|$ или описывать расстояния между a -точками и b -точками (так как все они имеют порядок ρ).

Мы введем «контрольные» или «характеристические» наборы для функции $w(z)$, в терминах которых дадим точные количественные описания величин (*) и (**). Тем самым, эти наборы позволят судить о величинах производных функции $w(z)$ и расстояниях между различными a и b -точками заданных наперед $w(z)$.

§ 1. Результаты. Следствия. Обсуждения

Условимся насчет обозначений: $A(r)$ —характеристика Л. Альфорса*; $d(X)$ —диаметр множества; E —множество конечной логарифмической меры; $\varphi(r)$ —произвольная монотонная функция, $\varphi(r) \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$; $\bar{X}$ —замыкание; ∂X —граница X ; через $A \stackrel{\varphi}{\leq} B$ обозначается соотношение $A \leq B \leq \varphi A$.

Следующая теорема содержит в себе «свойство близости a -точек» «свойство сравнимости производных», «свойство сравнимости расстояний между a -точками».

Теорема 1. Пусть $w(z)$ —мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $\varphi(r) > 0$, $\varphi(r) \uparrow \infty$, $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$, попарно различны. Тогда в круге $|z| \leq r$ можно указать $\Phi(r)$ областей $E_k(r)$, $k = 1, 2, \dots, \Phi(r)$ таких, что

$$I \quad a) |\Phi(r) - A(r)| = o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E, \quad (1.1)$$

$$b) w(z) \text{ однолистка в } E_k(r), \quad k = 1, 2, \dots, \Phi(r),$$

$$c) d(E_k(r)) \leq \varphi(r) r / (A(r))^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, \Phi(r), \quad (1.2)$$

$$d) \sum_{i=1}^q n_0^*(r, a_i) \geq (q-4) A(r) - o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E, \quad (1.3)$$

где $n_0^*(r, a_i)$ —количество (простых) a_i -точек в $\bigcup_{k=1}^{\Phi(r)} E_k(r)$.

II е) для любых z' и $z'' \in E_k$ выполняются

$$|w'(z')| \stackrel{\varphi(r)}{\asymp} |w'(z'')| \stackrel{\varphi(r)}{\asymp} \frac{1}{d(E_k)}. \quad (1.4)$$

III ф) Для любых $w_1, w_2, w_3, w_4 \in w(E_k)$ ($w_1 \neq w_2, w_3 \neq w_4$) выполняется

$$\frac{|z_k(w_1) - z_k(w_2)|}{|w_1 - w_2|} \stackrel{\varphi(r)}{\asymp} \frac{|z_k(w_3) - z_k(w_4)|}{|w_3 - w_4|} \stackrel{\varphi(r)}{\asymp} d(E_k(r)), \quad (1.5)$$

где $z_k(a)$ —принадлежащая области $E_k(r)$, a -точка функции $w(z)$, (в силу в) такие a -точки простые).

Образно выражаясь, согласно первой части этой теоремы в каждой из областей $E_k(r)$ (число которых $\sim A(r)$) лежит, в среднем, от $q-4$ до q различных a_i -точек.

Поскольку диаметры $E_k(r)$ малы (согласно (1.2)), то эти a_i -точки из $E_k(r)$ близки друг к другу

* Предполагаем известными основные определения и результаты теории рас-
пределения значений (см. [1]).

$$|z_k(a_\nu) - z_k(a_\mu)| \leq \frac{\varphi(r)r}{A^{1/2}(r)}. \quad (1.6)$$

Это и есть отражение свойства близости a -точек в том из вариантов, в котором рассматриваются только простые a -точки. Отметим, что все пункты этой части (и вообще все пункты теоремы) точные, с точностью до фигурирующих в них произвольных величин $\varphi(r)$. В частности неравенство (1.3) совпадает с основным выводом теории распределения значений, относящимся к простым a -точкам. Отметим также, что в [3] и [4] приводятся общие варианты свойства близости (учитывающие наличие кратных a -точек), которые уже содержат в себе основные выводы теории распределения значений; в этих работах приводится также более подробный анализ свойства близости a -точек.

Части II и III теоремы 1 имеют очень простой смысл: они отражают «свойство сравнимости производных» функций $w(z)$ на множестве a -точек и свойство сравнимости расстояний между a -точками. Здесь заметим, что в (1.4) вместо z' и z'' можно взять значения $z_k(a_\nu)$ и $z_k(a_\mu)$, а в (1.5) значения w_1, w_2, w_3, w_4 можем взять из $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ и тогда в (1.4) и (1.5) будут фигурировать наши $a_1, a_2, \dots, a_q$ -точки.

Отметим одно непосредственное следствие из теоремы 1 (см. [5]).

Следствие 1. В условиях теоремы 1, в круге $|z| \leq r$ можно указать некоторое число $n_0(r, a_i)$ простых a_i -точек $z_k(a_i)$, $k = 1, 2, \dots, n_0(r, a_i)$, для которых выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^q n_0(r, a_i) \geq (q-1) A(r) o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E, \quad (1.7)$$

$$|w'(z_i(a_i))| \geq \frac{A^{1/2}(r)}{\varphi(r)r}, \quad i=1, 2, \dots, q, \quad k=1, 2, \dots, n_0(r, a_i). \quad (1.8)$$

Т. е. для произвольной мероморфной функций $w(z)$ дается оценка величины $|w'|$ на множестве простых a_i -точек, притом обе эти оценки точные.

В теории Р. Неванлинны значение a является «хорошим», если a -точек много ($N(r, a) \sim T(r)$) и они в основном простые. В теории поверхностей наложения Л. Альфорса роль значений a играют области D (положим кружки с центрами в a) и рассматривается вопрос о том, сколько простых островов D_j , $j=1, 2, \dots, n_0(r, D)$, над D имеет поверхность $F_r = \{w(z) : |z| \leq r\}$ — образ круга $|z| \leq r$ при отображении функцией $w(z)$. Напомним, что простой остров поверхности F_r над D — однолистная область поверхности F_r , проекция которой на плоскость совпадает с D .

Соответственно с этим набором хороших a -точек будем называть множество $\{z_j(a)\}_{j=1}^{n_0(r, D)}$, где $w(z_j(a)) \in D_j$.

Оказывается, что значение набора $\{w'(z_j(a))\}_{j=1}^{n_0(r, D)}$ дает много информации о распределении значений (описываются величины модулей производных, дистанции между a -точками, множества, в которых накапливаются a -точки), а предположение о том, что $n_0(r, D) \sim A(r)$, приведет к тому, что такое описание является полным.

Теорема 2. Пусть при условиях теоремы 1 задан набор хороших a -точек $\{z_j(a)\}_{j=1}^{n_0(r, D)}$. Тогда из областей $E_k(r)$, $k = 1, 2, \dots, \Phi(r)$, можно выделить такие $\Phi^{(a)}(r)$ штук областей $E_{j(\mu)}^{(a)}(r)$, $\mu = 1, 2, \dots, \Phi^{(a)}(r)$, что для любого z найдется такой номер $j(\mu)$ (соответствие между μ и $j(\mu)$ взаимно-однозначное), что

а) для любого $z \in E_{j(\mu)}^{(a)}(r)$ выполняются

$$|w'(z)| \asymp |w'(z_{j(\mu)}(a))|; \quad (1.9)$$

б) для любых b и $c \in w(E_{j(\mu)}^{(a)}(r))$ выполняется

$$\frac{|z_\mu(b) - z_\mu(c)|}{|b - c|} \asymp \frac{1}{|w'(z_{j(\mu)}(a))|}; \quad (1.10)$$

с) при этом для $\Phi^{(a)}(r)$ выполняется

$$|\Phi^{(a)}(r) - n_0(r, D)| = o[A(r)], \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. \quad (1.11)$$

Замечание к теореме 2. В связи с теоремой 1 наиболее интересными являются случаи, когда в а) вместо z рассматриваются $z_i(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, q$, а в б) вместо b и c — a_i и a_i , $i, t \in (1, 2, \dots, q)$.

Конечно эта теорема тем интереснее, чем ближе $n_0(r, D)$ к величине $A(r)$. Если $n_0(r, D)$ очень близко к $A(r)$, то теорема 2 описывает поведение производных и дистанций между a -точками для большинства областей $E_k(r)$, соответственно для большинства $a_1, a_2, \dots, a_q$ -точек.

В связи с этим будем брать области $D = D_r$ зависящими от r , что позволит прийти к желаемому результату, т. е. охватить в описании почти все области $E_k(r)$.

Набор $\{w'(z_j(a_r))\}_{j=1}^{n_0(r, D)}$ назовем контрольным (или характеристическим) набором, если диаметр D_r (с центром в a_r) не меньше чем $1/\ln \ln \Phi(r)$, и $\frac{n_0(r, D_r)}{A(r)} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E$.

Из теории поверхностей наложения Л. Альфорса следует, что для любой мероморфной в $\mathbb{C}$ функции контрольные наборы существуют. Достаточно взять $[\Phi(r)]$ штук кружков D_r с диаметрами $1/\Phi(r)$ и центрами в целых точках $0, 1, \dots, [\Phi(r)]$ и применить к ним первую и вторую основные теоремы Л. Альфорса.

Теорема 3. Пусть при условиях теоремы 1 задан контрольный набор. Тогда теорема 2 имеет место, если в ней соотношение (III) заменить следующим:

$$\frac{\Phi^{(a_r)}(r)}{A(r)} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E. \quad (1.12)$$

Итак, почти для всякой области $E_k(r)$ можно указать число $|w(z_{j(k)}(a_r))|$ из контрольного набора, которое характеризует величины $w'(z)$ в a_i -точках из $E_k(r)$ и контролирует расстояния между a_i и a_i -точками из $E_k(r)$. Из теоремы 1 следует, что в этом описании фигурирует такое же количество простых $a_1, a_2, \dots, a_q$ -точек, какое гарантируется теорией распределения значений.

Свойство сравнимости производных можно записать в форме второй основной теоремы или же соотношения дефектов.

Пусть

$$X = \{x_i\}_{i=1}^M, \quad Y = \{y_j\}_{j=1}^N, \quad x_i \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad \varphi \geq 1.$$

Составим всевозможные пары $(x_i, y_{j(i)})$, где соответствие между i и (j) взаимно-однозначное, и обозначим через $N(X, Y)$ максимальное число пар, для которых $x_i \neq y_{j(i)}$.

При $\varphi = \varphi(r)$ обозначим через $N(r, b, X)$ величину $N(X, Y)$ где X — контрольный набор, $Y = Y(r, b) = \{ |w'(z_j(b))| \}_{j=1}^{n(r, b)}$ где $z_j(b)$ — b -точки функции $w(z)$ в круге $|z| \leq r$.

Из теоремы 1.3 вытекает

Теорема 4. Справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{(b)} \Delta(b) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(b)} \left(1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, b, X)}{A(r)} \right) < 4, \quad (1.13)$$

где суммирование распространено на все b из $\mathbb{C}$.

Из (1.13) следует, что для любого $b \in \mathbb{C} \setminus P$, где P — не более чем счетное множество, выполняется $\Delta(b) = 0$. Это означает, что для большинства значений b величины $|w'(z)|$, взятые на множествах b -точек, сравнимы с величинами из контрольного набора. Величина $\Delta(b)$ показывает какая часть чисел из $Y(r, b)$ не сравнима с числами из контрольного набора, а (1.13) показывает сумму всех этих отклонений. Число 4 в (1.13) точное-пример функции Вейерштрасса.

Все приведенные выше теоремы справедливы также, если в них вместо функций, мероморфных в $\mathbb{C}$, рассматривать функции $w(z)$, мероморфные в $|z| < R < \infty$, удовлетворяющие условию $\overline{\lim}_{R-r} A(r)(R-r) = \infty$, а вместо $r \rightarrow \infty$, $r \in E$ рассматривать некоторые последовательности $r_n \rightarrow R$.

§ 2. Обобщенная теорема 1

Пусть $w(z)$ мероморфна в $\overline{K}$, где K — односвязная область с гладкой границей; $a_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, 2, \dots, q$, попарно различны; L — длина границы w -образа области K в сферической метрике; $\pi S(K)$ — площадь w -образа области K в сферической метрике; n — целое число ($n \geq 100$) K^μ ($\mu = 1, 2, \dots$) — постоянные, зависящие от $a_1, a_2, \dots, a_q$ и не зависящие от n и K .

Тогда из K можно выделить $\tilde{\Phi}$ штук односвязных областей $\tilde{E}_k$, $k = 1, 2, \dots, \tilde{\Phi}$, таких, что

$$a) \quad |\tilde{\Phi} - S(K)| \leq \frac{8}{n+2} S(K) + K_1 n^2 L; \quad (2.1)$$

$$b) \quad w(z) \text{ однолистка в } \tilde{E}_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tilde{\Phi};$$

$$c) \quad \sum_{i=1}^q n^*(K, a_i) > (b-4) S(K) - \left\{ \frac{8q}{n} S(K) + K_2 n^2 L \right\}, \quad (2.2)$$

где $n^*(K, a_i)$ — количество a_i -точек, лежащих в $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$ в силу в) эти a_i -точки являются простыми);

$$\begin{aligned} d) \quad \sum_{k=1}^{\infty} d(\tilde{E}_k) &\leq \frac{2n}{K_3} \int_K \int \frac{|w'|}{1+|w|^2} dx dy + 2d(K) \leq \\ &< \frac{2n}{K_3} \sqrt{\text{площадь } K} \cdot \sqrt{S(K)} + 2d(K); \end{aligned} \quad (2.3)$$

е) существуют постоянные K_4, K_4' такие, что для любых z_1 и z_2 из $\tilde{E}_k$ выполняются соотношения

$$|w'(z_1)| \asymp |w'(z_2)|, \quad \varphi_1 = 12^{K_4 n}, \quad (2.4)$$

$$|w'(z_1)| \asymp \frac{1}{d(\tilde{E}_k)}, \quad \varphi_2 = 12^{K_4' n}; \quad (2.4')$$

ф) существуют постоянные K_5, K_5' такие, что для любых $a_1 \neq a_2, a_3 \neq a_4$ из $w(\tilde{E}_k)$ выполняются соотношения

$$\frac{|z_k(a_1) - z_k(a_2)|}{|a_1 - a_2|} \asymp \frac{|z_k(a_3) - z_k(a_4)|}{|a_3 - a_4|}, \quad \varphi_3 = 12^{K_5 n}, \quad (2.5)$$

$$\frac{|z_k(a_1) - z_k(a_2)|}{|a_1 - a_2|} \asymp d(\tilde{E}_k), \quad \varphi_4 = 12^{K_5' n}. \quad (2.5')$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваем комплексные значения, линии и области на римановой сфере. При этом под отрезком будем понимать дугу большой окружности сферы, или дугу параллели, под четырехугольником понимаем область, ограниченную четырьмя такими отрезками под прямоугольником — область, ограниченную двумя дугами меридианов сферы и двумя дугами параллелей.

Пусть $a_i \in \mathbb{C}$, ($i = 1, 2, \dots, q$), — конечный набор попарно различных комплексных значений. Далее мы полагаем, что $a_i \neq 0, \infty$. Это, понятно, не ограничивает общность теорем, так как в противном случае мы придем к результатам посредством рассмотрения функции $W(w)$, где W — преобразование вращения сферы.

Пусть C_i ($i = 1, 2, \dots, q$) — такие непересекающиеся прямоугольники, что $a_i \in C_i$ ($i = 1, 2, \dots, q$) и $0, \infty \notin C_i$, $i = 1, 2, \dots, q$. Обозначим через c_i ($i = 1, 2, \dots, q$) ближайшую к нулю сторону прямоугольника. Соединим c_i и c_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, q-1$) ломаными, состоящими из некоторой цепочки отрезков $c_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, k_i$), такими, что выполняются следующие условия: каждому отрезку $c_1, c_{1,1}, \dots, c_{1,k_1}, c_2, c_{2,1}, c_{2,k_2}, \dots, c_q$ можно сопоставить такой отрезок $c'_1, c'_{1,1}, \dots, c'_{1,k_1}, c'_2, c'_{2,1}, \dots, c'_{2,k_2}, c'_q$, что

а) отрезки $c_i \subset \bar{C}_i$, ($i = 1, 2, \dots, q$) и отсекают от прямоугольников C_i прямоугольники C_i^* , одной из сторон которых являются отрезки c_i , притом $a_i \in C_i \setminus C_i^*$;

б) при всех i и j отрезки c_{ij} (c_{ij}^*) не имеют общих точек с множеством $\bigcup_{i=1}^q \bar{C}_i$, за исключением, быть может, одного из концов, лежащего на границе одного из прямоугольников C_i или двух концов, принадлежащих в этом случае границам, соответственно, двух соседних прямоугольников C_i ;

в) система отрезков $c_1^*, c_{1,1}^*, \dots, c_{1,k_1}^*, c_2^*, c_{2,1}^*, \dots, c_{2,k_2}^*, \dots, c_q^*$ составляет такую ломанную, что эта ломанная не имеет общих точек с ломанной $c_1, c_{1,1}, \dots, c_{1,k_1}, c_2, c_{2,1}, \dots, c_{2,k_2}, \dots, c_q$;

г) соединив отрезками начала отрезков c_1 и c_1^* , $c_{1,1}$ и $c_{1,1}^*$, $\dots$, c_q и c_q^* и концы отрезков c_q и c_q^* (обозначим эти отрезки $c_1^*, c_{1,1}^*, \dots, c_1^*$ и c_q^*) получим систему четырехугольников, примыкающих один к другому только по отрезкам $c_{1,j}^*$ и составляющих вместе односвязную область G^* .

Следующий рисунок поясняет построения, проводимые в этом пункте (Будем помнить, что построения проводятся на сфере Римана)

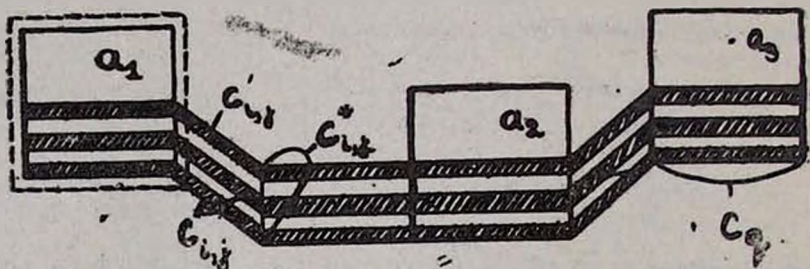


Рис. 1.

(Пунктирной линией обведен прямоугольник C_1 , жирной линией обведена область G^* , заштрихованные области — области G_m^*).

Разделим каждый из отрезков $c_1^*, c_{1,1}^*, \dots, c_{1,k_1}^*, c_2^*, c_{2,1}^*, \dots, c_{2,k_2}^*, \dots, c_q^*$ на $n+1$ равных частей при некотором четном n . Пусть $\gamma_{1,v}^*$, ($\gamma_{1,1}^*, \dots, \gamma_{q,v}^*$, $\gamma_{q,n+1}^*$, $v = 0, 1, \dots, n+1$) — соответствующие точки разбиения c_1^* , ($c_{1,1}^*, \dots, c_{1,k_1}^*, c_2^*, c_{2,1}^*, \dots, c_{2,k_2}^*, \dots, c_q^*$), притом $\gamma_{1,0}^*$ лежит на c_1 , а $\gamma_{1,n+1}^*$ лежит на c_1^* (так же нумеруем остальные деления). Соединим точки $\gamma_{1,0}^*, \gamma_{1,1}^*, \dots, \gamma_{1,k_1}^*, \dots, \gamma_{q,0}^*, \gamma_{q,1}^*, \dots, \gamma_{q,n+1}^*$ отрезками. Получим новые системы ломаных $c_1^*, c_{1,1}^*, \dots, c_{1,k_1}^*, \dots, c_q^*, v = 0, 1, \dots, n+1$ (здесь при $v=0$ и $v=n+1$ обозначены соответственно системы ломаных $c_1, c_{1,1}, \dots, c_{1,k_1}, \dots, c_q$ и $c_1^*, c_{1,1}^*, \dots, c_{1,k_1}^*, \dots, c_q^*$, относительно которых в дальнейшем будем помнить, что они зафиксированы — не зависят от числа n). Область G^* при этом окажется разбитой на $n+1$ „подобных“ областей G_N^* .

Пусть G_m^* ($m = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} + 1$) — чередующиеся через одну области G_N^* , граничными кривыми которых являются: ломаные

$$c_{1,1}^{2m-2}, c_{1,1}^{2m-2}, \dots, c_{1,k_1}^{2m-2}, \dots, c_q^{2m-2}, \\ c_{1,1}^{2m-1}, c_{1,1}^{2m-1}, \dots, c_{1,k_1}^{2m-1}, \dots, c_q^{2m-1};$$

часть отрезка c_1^* , лежащая между точками $\gamma_{1,2m-2}^*$, $\gamma_{1,2m-1}^*$; часть отрезка c_q^* , лежащая между точками $\gamma_{q,2m-2}^*$, $\gamma_{q,2m-1}^*$.

Пусть $F = w(K)$ — риманова поверхность, являющаяся w -образом области K . Ее мы будем рассматривать на римановой сфере. Обозначим через $n_0(D)$ число простых (с кратностью единица) островов поверхности F над областью D ; через $G(n)$ обозначим ту из областей G_m^* , для которой достигается минимум выражения $S(K) - n_0(G_m^*)$ (если таких областей несколько, то обозначим $G(n)$ произвольную из них). В [3] доказано, что

$$-\frac{8}{n+2} S(K) - K_1 n^2 L \leq n_0(G(n)) - S(K) < \frac{8}{n+2} S(K) + K_1 n^2 L^*. \quad (2.6)$$

Проведем разбиения, рассмотренные выше, и выбор области $G(n)$ для поверхности F . Пусть, например, частями граничной кривой области $G(n)$ являются ломаные

$$c_{1,1}^{2m_1-2}, c_{1,1}^{2m_1-2}, \dots, c_{1,k_1}^{2m_1-2}, \dots, c_q^{2m_1-2} \\ c_{1,1}^{2m_1-1}, c_{1,1}^{2m_1-1}, \dots, c_{1,k_1}^{2m_1-1}, \dots, c_q^{2m_1-1},$$

D_i — тот из двух прямоугольников, образованных сечением прямоугольника C_i отрезком $C_i^{2m_1-1}$, который содержит точку a_1 .

Нам далее удобно пользоваться следующим символом $\sqcup$. Соединением $C = A \sqcup B$ двух открытых множеств A и B назовем множество $C = \text{int}(\overline{A \sqcup B})$, где черта обозначает замыкание, а int внутренность множества (термин и символ встречаются в одной работе А. А. Гольдберга и А. Э. Еременко).

Пусть $M_k(K, \cup D_i)$ — односвязная область, являющаяся соединением простого острова $G_k(n)$ над $G(n)$ и примыкающих к нему простых островов над D_i , $i = 1, 2, \dots, q$ (k — номер области). Построим по заданной области $M_k(K, \cup D_i)$ область $\tilde{M}_k(K, \cup D_i)$. Для этого нам придется предварительно построить области $\tilde{D}_i$, D_i , $i = 1, 2, \dots, q$ и $\tilde{G}(n)$.

Пусть C_i' — такой прямоугольник, что 1) $C_i' \subset C_i$, 2) стороны прямоугольника C_i' , являющиеся дугами меридианов; 3) сторона прямоугольника C_i' , являющаяся ближайшей к нулю дугой параллели, лежит на ближайшей к нулю стороне прямоугольника C_i ; 4) оставшаяся сторона прямоугольника C_i' не имеет общих точек с ∂C_i .

* Правая и левая части неравенства (2,6), соответственно, неравенства (4*) и (2,3) из [3]. Обозначим $n_0(G(n))$ через Φ , получим (2,1). В дальнейшем тексте мы сохраняем обозначение $n_0(G(n))$ как отражающее сущность рассматриваемого объекта.

Обозначим $\tilde{D}_i = C'_i \cup D_i$. Очевидно $a_i \in \tilde{D}_i$. Разделим каждый из отрезков $c'_1 \cup G(n)$, $c'_{1,1} \cap G(n)$, $\dots$, $c'_{1,q} \cap G(n)$, $\dots$, $c'_q \cup G(n)$, $c'_q \cap G(n)$ на три равные части (см. рис. 2).

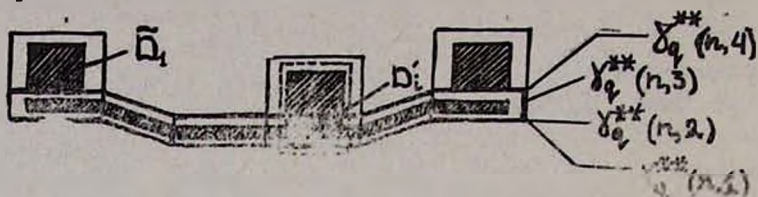


Рис. 2.

(Жирной линией обведена область $G(n)$; пунктирной линией—прямоугольник C'_2 ; заштрихованная область внутри $G(n)$ —область $\tilde{G}(n)$).

Пусть $\gamma_i^*(n, \tau)$, ($\tau = 1, 2, 3, 4$) — соответствующие точки разбиения отрезка $c'_i \cap \overline{G(n)}$, причем $\gamma_i^*(n, 1)$ и $\gamma_i^*(n, 4)$ являются концами отрезка $c'_i \cap \overline{G(n)}$ (аналогично, точки разбиения отрезка $c'_q \cap \overline{G(n)}$ обозначим $\gamma_q^{**}(n, \tau)$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$)). Точно также $\gamma_{i,j}^{**}(n, \tau)$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$) — точки разбиения отрезка $c'_{i,j} \cap \overline{G(n)}$, причем точки $\gamma_{i,j}^*(n, 1)$ и $\gamma_{i,j}^*(n, 4)$ — концы отрезка $c'_{i,j} \cap \overline{G(n)}$. Соединим при $\tau = 2$ точки $\gamma_1^*(n, 2)$ и $\gamma_{1,1}^*(n, 2)$, $\gamma_{1,1}^*(n, 2)$ и $\gamma_{1,2}^*(n, 2)$, $\dots$, $\gamma_q^*(n, 2)$ и $\gamma_q^{**}(n, 2)$ отрезками (отрезки, лежащие в прямоугольниках C_i , полагаем дугами параллелей). Ту же процедуру проделаем при $\tau = 3$. Область $G(n)$ разобьется при этом на три „подобные“ области $G_1(n)$, $G_2(n)$, $G_3(n)$ (здесь $G_3(n)$ ограничена отрезками, соединяющими точками $\gamma_1^*(n, 2)$, $\gamma_1^*(n, 3)$ и точки $\gamma_q^{**}(n, 2)$, $\gamma_q^{**}(n, 3)$ и двумя ломаными, состоящими из отрезков, соединяющих точки

$$\gamma_1^*(n, 2), \gamma_{1,1}^*(n, 2), \dots, \gamma_q^*(n, 2), \gamma_q^{**}(n, 2)$$

и

$$\gamma_1^*(n, 3), \gamma_{1,2}^*(n, 3), \dots, \gamma_q^*(n, 3), \gamma_q^{**}(n, 3).$$

Пусть T_1^* , (T_q^{**}) — та из двух дуг меридианов, являющихся граничными сторонами прямоугольника C_1 , (C_q), которая встречается первой с отрезком, соединяющим точки $\gamma_{1,1}^*(n, 2)$, ($\gamma_q^{**}(n, 2)$, $\gamma_q^*(n, 2)$) при движении по этим отрезкам в направлении от точки $\gamma_1^*(n, 2)$ к ($\gamma_{1,1}^*(n, 2)$) (в направлении от точки $\gamma_q^{**}(n, 2)$ к $\gamma_q^*(n, 2)$); точки $\gamma_1^*(n, 2)$, ($\gamma_1^*(n, 3)$, ($\gamma_q^*(n, 2)$, $\gamma_q^*(n, 3)$) — точки пересечения указанных отрезков с дугами T_1^* , (T_q^{**}). Обозначим $G_2^*(n)$ прямоугольник с вершинами $\gamma_1^*(n, 2)$, $\gamma_1^*(n, 2)$, $\gamma_1^*(n, 3)$, $\gamma_1^*(n, 3)$; $G_2^{**}(n)$ — прямоугольник с вершинами $\gamma_q^{**}(n, 2)$, $\gamma_q^{**}(n, 1)$, $\gamma_q^*(n, 3)$, $\gamma_q^{**}(n)$; $\tilde{G}(n) = G_2(n) \setminus [G_2^*(n) \cup G_2^{**}(n)]$; D_i , ($i = 1, 2, \dots, q$) — тот из двух прямоугольников, из которых состоит множество $C'_i \setminus [\tilde{D}_i \cup \tilde{G}(n)]$, который граничит, одновременно, и с прямоугольником $\tilde{D}_i$ и с областью $\tilde{G}(n)$.

Положим, что $M_k(K, \cup D_i)$ является соединением простого острова над $G(n)$ и примыкающих к нему простых островов над D_{i_k} (в частности, для заданного простого острова над $G(n)$ может не найтись примыкающих к нему простых островов над D_i , $i = 1, 2, \dots, q$).

Область $\tilde{M}_k(K, \cap D_i)$ определим как часть области $M_k(K, \cup D_i)$, проектирующуюся в области

$$\tilde{G}(n) \cap \left(\bigcup_{i_k} (\tilde{D}_{i_k} \cap D_{i_k}') \right).$$

Очевидно, 1) $a_{i_k} \in \tilde{M}_k(K, \cup D_i)$; 2) $\tilde{M}_k(K, \cap D_i) \subset M_k(K, \cup D_i)$; 3) существует такое число K_0 , что сферическое расстояние $\rho(\tilde{M}_k, M_k)$ между граничными кривыми областей $\tilde{M}_k(K, \cap D_i)$ и $M_k(K, \cup D_i)$ не меньше, чем K_0 ; 4) любые две точки из $\tilde{M}_k(K, \cup D_i)$ можно соединить кривой $l \in \tilde{M}_k(K, \cup D_i)$ (на сфере), которую можно покрыть $[K, n]$ кружками (на сфере) со сферическими диаметрами K_0/n , притом так, что центры двух таких кружков, имеющих общие точки, находятся на расстоянии, не большем K_0/n .

Обозначим $E_k, \tilde{E}_k$, соответственно, прообразы в плоскости z областей $M_k(K, \cup D_i), \tilde{M}_k(K, \cup D_i)$. Поскольку последние области представляют собой однолистные области римановой поверхности Γ (рассмотренной на римановой сфере), то 5) функция $F(w)$, обратная к $w(z)$, однолистка в области $w(E_k)$, являющейся стереографической проекцией области $M_k(K, \cup D_i)$.

Из 2), 3), 5) и того, что метрические характеристики областей

$$M_k(K, \cup D_i), \tilde{M}_k(K, \cup D_i)$$

и их стереографических проекций $w(E_k), w(\tilde{E}_k)$ сравнимы друг с другом (так как по построению область $M_k(K, \cup D_i)$ ограничена), получаем следующее

Предложение 1. Любые две точки b' и b'' области $w(\tilde{E}_k)$ могут быть соединены жордановой гладкой кривой ($\subset w(\tilde{E}_k)$) с концами в точках b' и b'' так, что эта кривая может быть покрыта $[K, n]$ кружками радиуса K_0/n таким образом, что центры двух кружков, имеющих общие точки, находятся на расстоянии не большем $K_0/(2n)$, причем функция $F(w)$ однолистка в каждом таком кружке.

Согласно теореме Кебе (см. [6], гл. II) для регулярной и однолистной в $|w| < 1$ функции $F(w) = w + a_1 w^2 + \dots$ выполняется ($w = \rho d^{1/3}$)

$$\frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} \leq |F'(w)| \leq \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3},$$

откуда для регулярной и однолистной в $|w - w_0| < R$ функции $F(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots$ получаем

$$\frac{R^2(R-\rho)}{(R+\rho)^3} \leq \left| \frac{F'(w)}{F'(w_0)} \right| < \frac{R^2(R+\rho)}{(R-\rho)^3} \quad (2.7)$$

В силу последнего предложения и однолиственности $F(w)$ применяя (2.7) в каждом из описанных кружков, получаем

$$|F'(b'')| \stackrel{\varphi_1}{\leq} |F'(b')|, \quad \varphi_0 = 12^{K_1 n + 2}, \quad (2.8)$$

откуда, учитывая, что $w'(z) = 1/F'(w)$, получаем (2.4).

Докажем неравенство (2.5). Предположим сначала, что $|a_1 - a_2| \leq \frac{K_9}{10n}$. По предложению 1, если a_1 или $a_2 \in w(\tilde{E}_k)$, то $w(\tilde{E}_k)$ принадлежит кружок $|w - a_1| \leq \frac{K_9}{n}$ и $F(w)$ однолистна в этом кружке. По теореме Кебе об $\frac{1}{4}$ выполняется

$$|a_1 - a_2| |F'(a_1)| \leq 4 |z_k(a_1) - z_k(a_2)|. \quad (2.9)$$

Из (2.7) следует, что для значений w (из этого кружка), принадлежащих отрезку γ , соединяющему точки a_1 и a_2 , выполняется

$$|F'(w)| \leq |F'(a_1)| \frac{\left(1 + \frac{1}{10}\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^3}.$$

Проинтегрировав это соотношение получим

$$|z_k(a_1) - z_k(a_2)| \leq \int_{\gamma} |F'(w)| ds \leq |a_1 - a_2| \cdot |F'(a_1)| \cdot \frac{1100}{729}. \quad (2.10)$$

Пусть теперь для a_1 и a_2 из $w(\tilde{E}_k)$ выполняется $|a_1 - a_2| > \frac{K_9}{10n}$. Ясно,

что любые две точки области $w(\tilde{E}_k)$ можно соединить кривой длины не более чем K_9 (где K_9 не зависит от выбора области $G(n)$). Из (2.8), обозначив через γ кратчайшую кривую ($\subset w(\tilde{E}_k)$), соединяющую точки a_1 и a_2 , получим

$$\begin{aligned} |z_k(a_1) - z_k(a_2)| &\leq \int_{\gamma} |F'(w)| dS \leq K_9 12^{K_1 n + 2} \cdot \\ &\cdot |F'(a_1)| \leq |a_1 - a_2| \frac{K_9}{K_8} \cdot 10 \cdot n \cdot 12^{K_1 n + 2} |F'(a_1)|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Опять же по теореме Кебе

$$|z_k(a_1) - z_k(a_2)| \geq |F'(a_1)| \cdot \frac{K_9}{40n} \geq |F'(a_1)| |a_1 - a_2| \frac{K_9}{K_8 40n}. \quad (2.12)$$

Теперь из (2.9)—(2.12) имеем: для любых a_1 и $a_2 \in w(\tilde{E}_k)$ выполняется

$$\frac{|z_k(a_1) - z_k(a_2)|}{|a_1 - a_2|} \underset{\varphi_0}{\asymp} |F'(a_1)|, \quad \varphi_0 = K_{10} n \cdot 12^{K_1 n + 2}, \quad (2.13)$$

откуда, учитывая также (2.8), получим неравенство (2.5).

Выбрав теперь в соотношениях (2.11) и (2.12) $z_k(a_1)$ и $z_k(a_2)$

такими, чтобы, $|z_k(a_1) - z_k(a_2)| \geq \frac{d(\tilde{E}_k)}{2}$, получим

$$\frac{K_3}{40n} |F'(a_1)| < d(\tilde{E}_k) \leq K_9 12^{K_1 n + 2} |F'(a_1)|.$$

Учитывая равенство $w'(z) = 1/F'(w)$, применим последнее соотношение к (2.12) и (2.13), получим, соответственно, неравенства (2.4') и (2.5'), чем и заканчивается доказательство пунктов e) и f) обобщенной теоремы 1.

Соотношения (2.1), (2.2), (2.3) установлены в работе [3]. Здесь надо учитывать следующее: результаты в [3] излагаются для случая когда функция $w(z)$ мероморфна в круге $|z| < R \leq \infty$, однако все приведенные построения верны для случая, когда $w(z)$ мероморфна в области K ; соответственно, $\tilde{\Phi}$ в [3] записывается как $\tilde{\Phi}(r)$, $S(K)$ — как $A(r)$, неравенство (2.1) — неравенства (4*), (2.3) из [3]; неравенство (2.2) — неравенство (6*) из [3], неравенство (2.3) получается дословным повторением доказательства неравенства (3.10) из [3], если там вместо круга $|z| \leq r$ рассматривать область K . Доказательство обобщенной теоремы 1 завершено.

§ 3. Обобщенная теорема 2

В условиях обобщенной теоремы 1 пусть задан набор хороших a -точек $\{z_j(a)\}_{j=1}^{n_1(D)}$ (где в определении этого набора вместо F , берется F). Тогда из областей $\tilde{E}_k$, $k=1, 2, \dots$, $\tilde{\Phi}$ можно выделить некоторое число Φ_1 областей $\tilde{E}_\mu$, $\mu=1, 2, \dots$, Φ_1 таких, что для любого μ найдется такой номер $j(\mu)$, притом соответствие между μ и $j(\mu)$ взаимно-однозначное, что

а) для любого $z \in \tilde{E}_\mu$ выполняется

$$|w'(z)| \underset{\varphi}{\asymp} |w'(z_{j(\mu)}(a))|, \quad \varphi = 12^{K_1 c n^2}; \quad (3.1)$$

б) для любых значений b и $c \in w(\tilde{E}_\mu)$ выполняется

$$\frac{|z_\mu(b) - z_\mu(c)|}{|b - c|} \underset{\varphi}{\asymp} \frac{1}{|w'(z_{j(\mu)}(a))|}, \quad \varphi = 12^{K_1 c n^2}; \quad (3.2)$$

в)

$$|\Phi_1 - n_0(D)| \leq c \frac{S(K)}{n} + c n^{14} L. \quad (3.3)$$

* Здесь и в дальнейшем c — абсолютные постоянные, не обязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки соотношений.

Пусть $D = D(n)$ — некоторый кружок на сфере радиуса $2\pi/n$. Мы всегда можем выбрать кружок D таким, чтобы для него выполнялось бы соотношение

$$|S(K) - n_0(D)| \leq \frac{c}{n} S(K) + c n^2 L, \quad n > n_0, \quad (3.4)$$

где $n_0(X)$ (напоминаем) — количество простых островов поверхности F над областью X .

Это следует из первой основной теоремы Л. Альфорса (см. [1], гл. XIII), согласно которой

$$n_0(D) \leq S(K) + \frac{c}{(\text{площадь } D)} L = S(K) + c n^2 L \quad (3.5)$$

и того, что D можно выбрать таковым, чтобы выполнялось неравенство

$$n_0(D) \geq S(K) - \frac{c}{n} S(K) - c n^2 L.$$

В последнем можно убедиться так. Если бы диаметр D был бы равен не $\frac{2\pi}{n}$, а $\frac{c}{n}$, то последнее неравенство выполнялось бы, если бы мы взяли $D \subset G(n)$ (тогда $n_0(D) \geq n_0(G(n))$) и применили неравенство (2.6). То, что 2π не обязательно равно c отражается, очевидно, лишь на постоянных перед $S(K)$ и L .

Нам понадобятся описания областей $\tilde{G}'(n)$, $G'(n)$, для чего будем пользоваться полярными координатами в трехмерном пространстве — (φ, θ, ρ) , где φ показывает угол в горизонтальной плоскости, θ — угол в вертикальной плоскости, ρ — модуль точки. В дальнейшем у нас n — четное число ($n \geq 100$).

Определим $\Gamma(k)$ как кривые со следующими параметрическими представлениями

$$\Gamma(k) = \{\varphi(t), \theta(t), \rho(t)\},$$

где

$$\varphi(t) = 2\pi t + \frac{\pi k}{n^5 - 1}, \quad \theta(t) = \frac{\pi}{2n} t, \quad \rho(t) = \frac{1}{2},$$

$$t \in [-(n-5), n-5], \quad k = 0, 1, \dots, n^5 - 1.$$

Пусть $D(\tau, 0)$ и $D(\tau, \infty)$ — τ -окрестности точек 0 и ∞ на сфере:

$$\Gamma^*(k) = \Gamma(k) \setminus \left\{ D\left(\frac{9}{n}, 0\right) \cup D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n^5 - 1;$$

G — та из двух односвязных областей на сфере, ограниченных кривыми $\Gamma^*(0)$, $\Gamma^*(n^5 - 1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$, $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(0)$ и $\Gamma^*(n^5 - 1)$, которая содержит кривые $\Gamma(k)$, $k = 1, 2, \dots, n^5 - 2$. Обозначим через $\tilde{G}_m$

$m = 1, 2, \dots, n^5/2$ области, принадлежащие G и ограниченные кривыми $\Gamma^*(2m-2)$, $\Gamma^*(2m-1)$ и частями границы $D(\frac{9}{n}, 0)$, $D(\frac{9}{n}, \infty)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(2m-2)$, $\Gamma^*(2m-1)$; через G_m обозначим подобласть $\bar{G}_m$, ограничиваемую кривыми $\Gamma^*(2m-2 + \frac{1}{3})$, $\Gamma^*(2m-2 + \frac{2}{3})$ и частями кривых $\partial D(\frac{9}{n}, 0)$, $\partial D(\frac{9}{n}, \infty)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(2m-2 + \frac{1}{3})$, $\Gamma^*(2m-2 + \frac{2}{3})$. В [4] показано, что существует такое число $m_0 \in (1, 2, \dots, n^5/2)$, что для области $\bar{G}_{m_0}$ (обозначим ее $\bar{G}'(n)$, соответственно G_{m_0} обозначим через $G'(n)$) выполняется

$$S(K) - n_0(\bar{G}'(n)) \leq \frac{8S(K)}{n^5} + cn^{13}L \quad (3.6)$$

(см. [4], неравенство (2.2)).

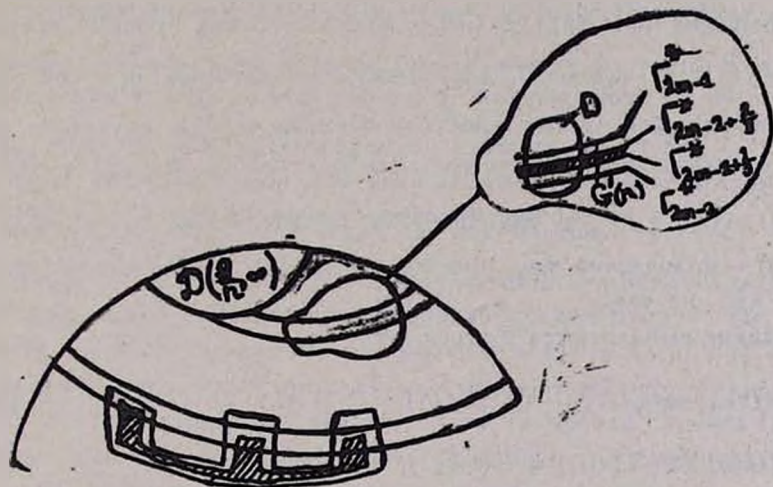


Рис. 1. Заштрихованная область — область $\omega(E_2(r))$.

Пусть $D^* = D^*(n)$ — некоторый кружок на сфере такой, что 1) диаметр его $1/n^2$; 2) $\bar{D}^* \subset G'(n)$; 3) $\bar{D}^*$ принадлежит некоторому кругу, концентрическому D и с четверо меньшим радиусом, чем радиус D .

Такие кружки существуют по построению, так как «ширина» области $G'(n)$ порядка $1/n^5$.

Обозначим $D_j(n)$ ($j = 1, 2, \dots, \Phi(G'(n), D, D^*)$) — те простые острова над $G'(n)$, каждый из которых является частью простого острова над $\bar{G}'(n)$ и для каждого из которых простой остров над D^* , входящий в $G_j'(n)$, является, одновременно, частью простого острова D_j над D ; $\Phi(G'(n), D, D^*)$ — их количество.

Из геометрических рассуждений следует выполнение следующих неравенств:

$$\Phi(G'(n), D, D^*) \leq n_0(D) \quad (3.7)$$

и

$$n_0(\tilde{G}'(n)) - \Phi(G'(n), D, D^*) \leq n_0(D^*) - n_0(D), \quad (3.8)$$

так что получаем

$$n_0(G'(n)) - n_0(D^*) \leq \Phi(G'(n), D, D^*) - n_0(D) \leq 0. \quad (3.9)$$

Для величины $n_0(D^*)$ согласно формуле (3.5) имеем

$$n_0(D^*) \leq S(K) + c n^{14} L,$$

Так что, учитывая ещё (3.4) и (3.6), из (3.9) получим

$$|\Phi(G'(n), D, D^*) - S(K)| \leq c \frac{S(K)}{n} + c n^{14} L. \quad (3.10)$$

Пусть $Q = Q(n)$ — некоторый кружок на сфере радиуса c/n^7 . Положим, что $Q \subset \{\bar{G}(n) \cap G'(n)\}$, (Q можно выбрать таковым, так как „ширина“ областей $\tilde{G}(n)$ и $G'(n)$ соответственно порядков $1/n$ и $1/n^6$)

Обозначим $\Phi_1(\tilde{G}(n), Q, G'(n))$ количество тех простых островов $w(\tilde{E}_\mu)$, $\tilde{E}_\mu \in [\tilde{E}_k]^*$ над $\tilde{G}(n)$, для каждого из которых, простой остров над Q , являющийся частью простого острова $w(\tilde{E}_\mu)$ является, одновременно, частью некоторого простого острова $G_{j(\mu)}(n)$ над $G'(n)$ (вниматель! $G_{j(\mu)}(n)$, а не вообще простого острова над $G'(n)$); $\Phi_1^*(\bar{G}(n), Q, G'(n))$ — количество тех простых островов $\tilde{G}_k(n)$ над $\tilde{G}(n)$, для которых это не так.

Очевидно выполняются соотношения

$$n_0(G(n)) = \Phi_1(\bar{G}(n), Q, G'(n)) + \Phi_1^*(\tilde{G}(n), Q, G'(n)), \quad (3.11)$$

$$\Phi_1(\bar{G}(n), Q, G'(n)) \leq \Phi(G'(n), D, D^*), \quad (3.12)$$

$$\Phi_1^*(\tilde{G}(n), Q, G'(n)) + \Phi(G'(n), D, D^*) \leq n_0(Q). \quad (3.13)$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} n_0(G(n)) - n_0(Q) + \Phi(G'(n), D, D^*) &\leq \\ &\leq \Phi_1(\bar{G}(n), Q, G'(n)) \leq \Phi(G'(n), D, D^*), \end{aligned} \quad (3.14)$$

откуда, учитывая еще неравенства: (2.6), (3.10) и $n_0(Q) \leq S(K) + c n^{14} L$, получим

$$|\Phi_1(\tilde{G}(n), Q, G'(n)) - n_0(D)| \leq c \frac{S(K)}{n} + c n^{14} L, \quad (3.15)$$

* Определяется $\tilde{E}_k$ см. в § 1.

и, учитывая еще (3.4), получим

$$|\Phi_1(\bar{G}(n), Q, G'(n) - S(K)| \leq c \frac{S(K)}{n} + c n^4 L. \quad (3.16)$$

Замечание 1. Соотношение (3.15) справедливо, если радиус кружка D предполагать не равным $2\pi/n$, а не меньшим чем $2\pi/n$ (это следует из того, что неравенство (3.9) верно также для таких D).

Таким образом, обозначив $\Phi_1 = \Phi_1(\bar{G}(n), Q, G'(n))$, получаем (3.3).

Докажем теперь соотношение 3.1. Идея доказательства состоит в следующем. Для любой области $\tilde{E}_\mu$ мы должны указать такую кривую на римановой поверхности, что 1) она начинается в области $\omega(\tilde{E}_\mu)$ и оканчивается в точке $\omega(z_{j(\mu)}(a))$ и 2) для каждой точки этой кривой существует достаточно большая окрестность этой точки, целиком лежащая на некотором простом листе. Второе условие означает, что в любой такой окрестности применимо неравенство (2.7). Применяя неравенство (2.7) на цепочке кружков с центрами на этой кривой мы докажем, что величины $|z'(w)|$ сравнимы для $w \in \omega(\tilde{E}_\mu)$ и $w = \omega(z_{j(\mu)}(a))$. Последнее, очевидно, означает сравнимость величин $|w'(z)|$ для $z \in \tilde{E}_\mu$ и $z = z_{j(\mu)}(a)$.

Вспомним теперь, какие области фигурируют в определении $\Phi_1 = \Phi_1(\bar{G}(n), Q, G'(n))$. Это простые острова $\omega(\tilde{E}_\mu)$ над $\bar{G}(n)$, для каждого из которых а) простой остров над Q , принадлежащий этому простому острову над $\bar{G}(n)$, является в) частью простого острова $G'_{j(\mu)}(n)$ над $\bar{G}'(n)$, являющемуся с) частью простого острова над $\bar{G}'(n)$ d) принадлежащий последнему острову простой остров над D^* является е) в свою очередь частью простого острова $D_{j(\mu)}$ над D , при этом вспомним, что f) $\bar{D}^*$ принадлежит некоторому кругу, концентрическому с D и с радиусом, равным одной четвертой радиуса D . Здесь разграничения а), ..., f) приводятся для удобства дальнейших ссылок.

Теперь пройдем описанный путь в обратном направлении, используя неравенство (2.7).

Пусть a — стереографическая проекция на плоскость центра кружка D ; $F(a(j(\mu)))$ — значение $F(w)$ в точке a из проекции простого острова $D_{j(\mu)}$ на плоскость.

Проекция D^* в силу f) лежит в некотором круге, который будучи увеличен вдвое (по радиусу), будет принадлежать проекции D .

Следовательно, в силу (2.7), для любой точки w_1 из проекции простого острова над D^* , принадлежащей простому острову $D_{j(\mu)}$ (см. e)) выполняется

$$\frac{1}{12^2} |F'(a(j(\mu)))| \leq |F'(w_1)| \leq |F'(a(j(\mu)))| \cdot 12^2. \quad (3.17)$$

Любые две точки области $G'(n)$ можно, в силу b) и c), соединить некоторой кривой $\gamma \subset G'(n)$ так, что γ можно покрыть $c n^8$ штук круж-

ками радиуса c/n^7 (здесь учитываем, что «длина» $G'(n)$ порядка cn), каждый из которых принадлежит области $\bar{G}'(n)$, притом так, что центры двух кружков, имеющих общие точки, отдалены друг от друга на расстояние не более чем $c/(4n^7)$ (в данном случае c то же, что и при определении радиуса c/n^7 кружков).

Спроектируем стереографически все эти объекты на плоскость, предполагая, что и кружки и γ лежат на нашем простом острове над $\bar{G}'(n)$ (содержащем простой остров $G_{j(\mu)}(n)$). Тогда получим, что проекцию γ можно покрыть cn^8 штук кружками на плоскости (c —новое), так, что кружки принадлежат проекции простого острова над $\bar{G}'(n)$ (следовательно $F(w)$ в них однолистка) и центры кружков, имеющих общие точки, находятся на расстоянии меньшем, чем половина радиуса меньшего из кружков.

Теперь, применив неравенство (2.7) к любым двум точкам w_2 и w'_2 , принадлежащим нашему простому острову $G_{j(\mu)}$ над $G'(n)$, получим

$$\frac{1}{12^{cn^8+1}} |F'(w'_2)| \leq |F'(w_2)| \leq |F'(w'_2)| 12^{cn^8+1},$$

а взяв вместо w'_2 значение w_1 , с учетом (3.17) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{12^{cn^8}} |F'(a(j(\mu)))| &= \frac{1}{12^{cn^8+2}} |F'(a(j(\mu)))| \leq |F'(w_2)| \leq \\ &\leq |F'(a(j(\mu)))| \cdot 12^{cn^8+2} = |F'(a(j(\mu)))| 12^{cn^8} \end{aligned} \quad (3.18)$$

(c —уже различны в различных частях равенств).

Выберем теперь w_2 , принадлежащими простому острову над Q , являющемуся частью простого острова $G_{j(\mu)}(n)$ и, одновременно, частью простого острова $w(\bar{E}_\mu)$ над $G(n)$. Тогда в силу (3.18) и (2.8) получим, что для любого $w \in w(\bar{E}_\mu^*)$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |F'(w)| &\leq |F'(w_2)| \cdot 12^{K_1 n^2+2} \leq \\ &\leq |F'(a(j(\mu)))| \cdot 12^{cn^8+K_1 n^2+2} = |F'(a(j(\mu)))| \cdot 12^{K_1 cn^8}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} |F'(w)| &> \frac{1}{12^{K_1 n^2+2}} |F'(w_2)| \geq \\ &\geq |F'(a(j(\mu)))| \cdot \frac{1}{12^{cn^8+K_1 n^2+2}} = |F'(a(j(\mu)))| \cdot \frac{1}{12^{K_1 cn^8}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из последних неравенств, учитывая, что $w'(z) = 1/F'(w)$ и $F(a(j(\mu))) = z_{j(\mu)}$, получим (3.1).

Возьмем теперь в сечении (2.13), записанном для области $w(\bar{E}_\mu)$, значение a_1 равным b , а значение a_2 , равным c . К полученному соотношению применим неравенства (3.19) и (3.20) с w , равным b . Получим соотношение (3.2), чем и завершается доказательство обобщенной теоремы 2.

§ 4. Доказательство теорем 1—4

Выведем теорему 1 из обобщенной теоремы 1. Вместо области K теперь у нас фигурируют круги $|z| \leq r$, $S(K) = A(r)$,

$$L = L(r), \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}(r), \quad \bar{E}_k = \bar{E}_k(r).$$

Пусть $\varphi(r) < A^{1/3}(r)$. Выберем для таких $\varphi(r)$ число $n = n(r)$, удовлетворяющим условию

$$12^{\max\{K_{11}, K'_4, K_5, K'_5\}} n(r) \leq \varphi(r) < 12^{\max\{K_4, K'_4, K_5, K'_5\}} \cdot (n(r) + 1). \quad (4.1)$$

Вспомним известную оценку (см. [1], гл. XIII)

$$L(r) \leq [A(r)]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E, \quad (4.2)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Выберем еще здесь $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и применим (4.2) к обобщенной теореме 1.

С учетом (4.1) получим, что пункты а), б), с), е), ф) теоремы 1 справедливы для областей $\bar{E}_k$ и их числа $\bar{\Phi}(r)$ (вместо $E_k(r)$ и $\Phi(r)$), а вместо пункта д) выполняется

$$\sum_{k=1}^{\bar{\Phi}(r)} d(\bar{E}_k(r)) \leq K_{11} \ln \varphi(r) r A^{1/2}(r).$$

Из того, что для величины $\bar{\Phi}(r)$ выполняется а) следует, что количество областей $\bar{E}_k(r)$, для которых выполняется неравенство

$$d(\bar{E}_k(r)) \geq \frac{K_{11} \ln^2 \varphi(r) r}{A^{1/2}(\varepsilon)},$$

не больше, чем $A(r)/[K_{11} \ln^2 \varphi(r)]$, т. е. является величиной $o[A(r)]$. Так что если обозначим через $\Phi(r)$ количество тех областей $\bar{E}_k(r) \in \{\bar{E}_k(r)\}_{k=1}^{\bar{\Phi}(r)}$, для которых выполняется

$$d(\bar{E}_k(r)) < \frac{K_{11} \ln^2 \varphi(r) r}{A^{1/2}(r)} \left(\leq \frac{\varphi(r) r}{A^{1/2}(r)}, \quad r > r_0 \right),$$

т. е. выполняется пункт д) теоремы 1, то будем иметь для таких $\Phi(r)$ и $\bar{E}_k(r)$ пункты а), б), д), е), ф) теоремы 1. Пункт с) вытекает из пункта с) для областей $\bar{E}_k(r)$ и того, что в силу $|\Phi(r) - \bar{\Phi}(r)| =$

$= o[A(r)]$ и б) величины $\sum_{i=1}^b n_0(r, a_i)$ взятые для $\bigcup_{k=1}^{\bar{\Phi}(r)} \bar{E}_k(r)$ и для $\bigcup_{k=1}^{\Phi(r)} \bar{E}_k(r)$ отличаются на величину порядка $o[A(r)]$. Тем самым, теорема 1 доказана при условии $\varphi(r) < A^{1/3}(r)$, $r > r_0$. Остается заметить, что все пункты теоремы 1 верны также при нарушении условия

$$\varphi(r) < A^{1/3}(r).$$

Доказательство теоремы 2 вытекает из обобщенной теоремы 2, если в ней к величине $L = L(r)$ применить оценку (4.2), а для заданной функции $\varphi(r)$ число $n = n(r)$ определить из условия

$$12^{K_{1,C}(\varphi(r))} \leq \varphi(r) < \overline{12}^{K_{1,C}(\varphi(r))+1} \quad (4.3)$$

(тем самым устанавливаются соотношения (1.9) и (1.10)) и далее оценку $\Phi^{(a)}(r)$ проводить теми же рассуждениями, какие приводятся при выводе оценки (1.1) теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Из условия (4.3) следует, что $\frac{1}{\ln \ln \varphi(r)} > \frac{2\pi}{n(r)}$, при $r > r_0$, так что вместо областей $D = D(r)$ с диаметром $\frac{2\pi}{n}$ мы можем взять области D_r . Для них выполняется (в силу определения контрольного набора)

$$|n_0(r, D_r) - A(r)| = o(A(r)), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \in E.$$

Из (3.15) и последнего соотношения следует теперь, с учетом связи между $\varphi(r)$ и $n(r)$, соотношение (1.12), чем и завершается доказательство теоремы 3.

Институт математики
АН Армении

Поступила 10. VII. 1989

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵԳՅԱՆ. Մերմորֆ ֆունկցիաների ածանցյալների համեմատելիության և a -կետերի միջև հեռավորությունների համեմատելիության հատկությունները (ամփոփում)

Հաղվածում բացահայտվում է մի նոր օրինաչափություն $w(z)$ մերմորֆ ֆունկցիաների ածանցյալների համեմատելիության հատկությանը, որը ցույց է տալիս, որ $|w'(z)|$ մեծությունը համեմատելի է ֆունկցիայի «լավ» a -կետերի և b -կետերի հազմության դրա.

G. A. BARSEGHIAN. The property of comparability of derivatives of meromorphic functions, and of the Distance Between a -Points (summary)

In the paper new regularity which we call the property of comparability of the derivatives of meromorphic in $\mathbb{C}$ functions $w(z)$ is established. Thus we apply to show that the values of $|w'(z)|$ on the set of "good" a -points and b -points are comparable.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, «ОГИЗ», 1941.
2. Г. А. Барсегян. О геометрии мероморфных функций, Матем. сб., 1981, 114(156), № 2, 179—225.
3. Г. А. Барсегян. Свойство близости a -точек мероморфных функций, Матем. сб., 1983, 120(162), № 1, 42—67.
4. Г. А. Барсегян. Свойство близости a -точек мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1985, 20, № 5, 375—400; 1985, 20, № 6, 407—426.
5. G. A. Barseghian. Estimates of derivatives of meromorphic function on sets of a -points, J. London Math. Soc. (2) 34, 1986, 534—540.
6. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966.