

УДК 517.51

Г. Г. ГЕВОРКЯН

ТЕОРЕМЫ О МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА.
ПОСТРОЕННОЙ СТРОМБЕРГОМ. II

В работе [17] исследовалась система Стромберга на R . Здесь исследуется периодическая система Стромберга на периодическом отрезке $[0, 1)$. Настоящая статья является продолжением работы [17] и все обозначения, ссылки и нумерации формул согласованы с [17].

Кроме обозначений, сделанных во вводной части [17], сделаем еще несколько обозначений.

Через T обозначается периодический интервал $[0, 1)$, т. е. точки 0 и 1 отождествляются, другим словами, T — окружность длины 1.

Интервал в T — это множество вида $[a, b]$ или $[0, b] \cup [a, 1]$, $d(x, y)$ — расстояние между точками x и y по окружности, т. е. длина меньшей дуги, соединяющей точки x и y по окружности T .

$d(x, E)$ — расстояние между точкой x и подмножеством окружности T , т. е.

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

$L_0(E)$ — метрическое пространство почти всюду конечных измеримых на E функций с метрикой

$$\rho(f, g) = \int_E \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx,$$

сходимость по которой эквивалентна сходимости по мере.

§ 3. Вспомогательные леммы для периодической системы
Стромберга

Пусть $(j, k) \in Z^2$ и $j > 0$. Положим

$$F_{j, k}(x) = \sum_{l \in Z} f_{j, k}(x - l). \quad (1)$$

Легко видеть, что (см. (1) и [13])

$$\begin{aligned} F_{j, k}(x) &= F_{j, k}(x + 1), \\ F_{j, k}(x) &= F_{j, k+2^j}(x). \end{aligned} \quad (2)$$

При фиксированном $j \geq 0$ существует только 2^j различных функций $F_{j, k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ (см. (2)). Для $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ обозначим

$$F_n(x) = F_{j, k}(x), \quad n = 2^j + k, \quad k = 0, 2, \dots, 2^j - 1, \quad (3)$$

и

$$F_0(x) = 1.$$

Система $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система в $L_2(T)$ (см. [13]). Функции $F_n(x)$ имеют период 1 и их можно рассматривать на окружности единичной длины.

Приведем некоторые свойства системы $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, прямо вытекающие из (1) и свойств системы $\{f_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Пусть $n = 2^j + k$. Тогда (см. [13])

$$|F_n(x)| \leq C 2^{\frac{j}{2}} q^{2^j d(x, t_n)}, \quad (4)$$

$$|F'_n(x)| \leq C 2^{\frac{3j}{2}} q^{2^j d(x, t_n)},$$

$$F_n(x) = F_{2^j}(x - 2^{-j}k), \quad (5)$$

где $t_n = t_{j,k}$.

В дальнейшем через $[n]$ обозначим отрезок $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$, а через $[n]$ — целую часть от $\log_2 n$, т. е. если $n = 2^j + k$, $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$, то $[n] = j$.

Отметим также, что функция $F_n(x)$, $n = 2^j + k$, является линейной на каждом отрезке $[2^{-j-1}(i-1), 2^{-j-1}i]$, $i = 1, 2, \dots, 2^{j-1}$.

Докажем аналог леммы 1.1 для системы $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Лемма 3.1. Пусть $I = [2^{-\mu}v_1, 2^{-\mu}v_2] \subset T$ и a_n — любые действительные числа. Тогда для любого $j \geq \mu$ имеет место

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ [n] = j}} a_n F_n(x) \right| \leq C q^{2^j d(x, I)} \max_{l \in I_1} \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ [n] = j}} a_n F_n(x) \right|, \text{ когда } x \in I, \quad (6)$$

где $I_1 = [2^{-\mu}v_1 - 2^{-j-1}, 2^{-\mu}v_1] \cup [2^{-\mu}v_2, 2^{-\mu}v_2 + 2^{-j-1}]$.

Доказательство. Учитывая (5), можно предположить, что $v_1 = 0$. Тогда $\{k: 2^j + k \in I\} = \{0, 1, \dots, 2^{-\mu}v_2 - 1\}$, $d(x, I) = \min(1-x, x - 2^{-\mu}v_2)$ и $I_1 = [2^{-\mu}v_2, 2^{-\mu}v_2 + 2^{-j-1}] \cup [1 - 2^{-j-1}]$ (напомним, что рассматривается периодический отрезок $[0, 1) = T$).

С учетом (1) и (3) можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ [n] = j}} a_n F_n(x) &= \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}v_2-1} a_{2^j+k} F_{j,k}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}v_2-1} a_{2^j+k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{j,k}(x-l) = \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}v_2-1} a_{2^j+k} \sum_{l=1}^{\infty} f_{j,k}(x-l) + \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}v_2-1} a_{2^j+k} \sum_{l=-\infty}^0 f_{j,k}(x-l) = \\ &= \Phi_1(x) + \Phi_2(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (1.3) имеем

$$\Phi_1(x) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k=0}^{2^{j-\mu}v_2-1} a_{2^j+k} \sum_{l=1}^{\infty} \tau(2^j x - 2^j l - k). \quad (8)$$

Если $x \in [2^{-\mu} v_2, 1]$, $l \geq 1$ и $0 < k < 2^{j-\mu} v_2 - 1$, то $2^j x - 2^j l - k \leq 0$ и функция $\tau(2^j x - 2^j l - k)$ линейна на отрезках $[2^{-j-1} i, 2^{-j-1} (i+1)]$, $i = 2^{j-\mu} v_2, \dots, 2^{j+1} - 1$, (см. определение функции $\tau(\tau)$). Следовательно функция $\Phi_1(x)$ также линейна на каждом отрезке $[2^{-j-1} i, 2^{-j-1} (i+1)]$, $i = 2^{j-\mu} v_2, \dots, 2^{j+1} - 1$. Пусть $x = 1 - 2^{-j-1} i$, $i = 0, 1, \dots, 2^{j+1} - 2^{j+1-\mu} v_2$. Тогда из (8) и (1.9) получим

$$\begin{aligned} \Phi_1(1 - 2^{-j-1} i) &= 2^{\frac{j}{2}} 2^{j-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} a_{2^j+k} \sum_{l=1}^{\infty} \tau(2^j - 2^j l - k - 2^{-1} i) = \\ &= (\sqrt{3} - 2)^i \Phi_1(1), \quad i = 0, 1, \dots, 2^{j+1} - 2^{j+1-\mu} v_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичными рассуждениями получим, что функция $\Phi_2(x)$ линейна на отрезках $[2^{-j} m, 2^{-j} (m+1)]$, $m = 2^{j-\mu} v_2, \dots, 2^j - 1$ и

$$\Phi_2(2^{-\mu} v_2 + 2^{-j} m) = (\sqrt{3} - 2)^m \Phi_2(2^{-\mu} v_2), \quad m = 0, \dots, 2^j - 2^{j-\mu} v_2. \quad (10)$$

На отрезках $[2^{-\mu} v_2, 2^{-\mu} v_2 + 2^{-j}]$ функция $\Phi_2(x)$ линейна и как видно из (10)

$$\Phi_2(2^{-\mu} v_2 + 2^{-j}) = (\sqrt{3} - 2) \Phi_2(2^{-\mu} v_2). \quad (11)$$

Из (11) следует, что $\Phi_2(x)$ на J_1 не меняет знак и

$$\begin{aligned} \min_{x \in J_1} |\Phi_2(x)| &= |\Phi_2(2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1})| = \frac{\sqrt{3}-1}{2} |\Phi_2(2^{-\mu} v_2)| = \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \max_{x \in J_1} |\Phi_2(x)|, \end{aligned} \quad (12)$$

где $J_1 = [2^{-\mu} v_2, 2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1}]$.

Аналогично получается, что $\Phi_2(x)$ на J_2 не меняет знак и

$$\min_{x \in J_2} |\Phi_2(x)| = |\Phi_2(1)| = \frac{\sqrt{3}-1}{2} |\Phi_2(1 - 2^{-j-1})| = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \max_{x \in J_2} |\Phi_2(x)|,$$

где $J_2 = [1 - 2^{-j-1}, 1]$.

Из (9) следует

$$\begin{aligned} \min_{x \in J_1} |\Phi_1(x)| &= |\Phi_1(2^{-\mu} v_2)| = (2 - \sqrt{3}) |\Phi_1(2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1})| = \\ &= (2 - \sqrt{3}) \max_{x \in J_1} |\Phi_1(x)|, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \min_{x \in J_2} |\Phi_1(x)| &= |\Phi_1(1 - 2^{-j-1})| = (2 - \sqrt{3}) |\Phi_1(1)| = \\ &= (2 - \sqrt{3}) \max_{x \in J_2} |\Phi_1(x)|. \end{aligned}$$

Сделаем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \max_{x \in J_1} |\Phi_1(x) + \Phi_2(x)|, \quad \alpha_2 = \max_{x \in J_2} |\Phi_1(x) + \Phi_2(x)|, \quad \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2).$$

Пусть β_1 — та из точек $2^{-\mu} v_2$ и $2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1}$, где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ принимают значения одного знака, а β_2 — та точка среди 1 и $1 - 2^{-j-1}$, где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ принимают значения одного знака. Следовательно

$$|\Phi_1(\beta_1)| + |\Phi_2(\beta_1)| = |\Phi_1(\beta_1) + \Phi_2(\beta_1)| \leq a_1 \leq a, \quad (14)$$

$$|\Phi_1(\beta_2)| + |\Phi_2(\beta_2)| = |\Phi_1(\beta_2) + \Phi_2(\beta_2)| \leq a_2 \leq a. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует

$$|\Phi_2(\beta_1)| \leq a \text{ и } |\Phi_1(\beta_2)| \leq a. \quad (16)$$

Учитывая (12) и (13), из (16) получим

$$|\Phi_1(1)| \leq C a \text{ и } |\Phi_2(2^{-\mu} v_2)| \leq C a. \quad (17)$$

Поскольку функция $\Phi_1(x)$ линейная на отрезках $[2^{-j-1}i, 2^{-j-1}(i+1)]$, $i = 2^{j-\mu}, \dots, 2^{j+1} - 1$, а функция $\Phi_2(x)$ линейная на $[2^{-j}m, 2^{-j}(m+1)]$, $m = 2^{j-\mu}v_2, \dots, 2^j - 1$, то из (9), (10) и (17) следует

$$|\Phi_1(x)| \leq C a q^{2^j |r-1|}, \text{ когда } x \in [2^{-\mu} v_2, 1], \quad (18)$$

$$|\Phi_2(x)| \leq C a q^{2^j |x-2^{-\mu} v_2|}, \text{ когда } x \in [2^{-\mu} v_2, 1]. \quad (19)$$

Суммируя (18) и (19), с учетом (7), получим (6). Лемма доказана.

Еще раз просмотрев доказательство леммы 3.1 читатель легко заметит, что можно вместо

$$I_1 = [2^{-\mu} v_1 - 2^{-j-1}, 2^{-\mu} v_1] \cup [2^{-\mu} v_2, 2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1}] \quad (20)$$

рассмотреть

$$I_1 = [2^{-\mu} v_1 - 2^{-j}, 2^{-\mu} v_1 - 2^{-j-1}] \cup [2^{-\mu} v_2, 2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1}], \quad (21)$$

$$I_1 = [2^{-\mu} v_1 - 2^{-j-1}, 2^{-\mu} v_1] \cup [2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1}, 2^{-\mu} v_2 + 2^{-j}], \quad (22)$$

$$I_1 = [2^{-\mu} v_1 - 2^{-j}, 2^{-\mu} v_1 - 2^{-j-1}] \cup [2^{-\mu} v_2 + 2^{-j-1}, 2^{-\mu} v_2 + 2^{-j}], \quad (23)$$

т. е. верна следующая

Лемма 3.2. Пусть $I = [2^{-\mu} v_1, 2^{-\mu} v_2] \subset T$ и a_n — любые действительные числа. Тогда для любого $j \geq \mu$ имеет место

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ |n|=j}} a_n F_n(x) \right| \leq C q^{2^j d(x, I)} \max_{t \in I_1} \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ |n|=j}} a_n F_n(t) \right|, \text{ когда } x \in I, \quad (24)$$

где I_1 — любое из множеств (20) — (23).

Аналогично доказывается следующая

Лемма 3.3. Пусть $I = [2^{-\mu} v_1, 2^{-\mu} v_2] \subset T$ и a_n — любые действительные числа. Тогда для любого $j \geq \mu$ имеет место

$$\sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ |n|=j}} a_n^2 F_n^2(x) \leq C q^{2^j d(x, I)} \max_{t \in I_1} \sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ |n|=j}} a_n^2 F_n^2(t), \text{ когда } x \in I,$$

где I_1 — любое из множеств (20) — (23).

Лемма 3.4. Существует абсолютная положительная постоянная C такая, что

$$\int_{\Delta_n^i} F_n^2(x) dx > C, \quad i = 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где Δ_n^1 и Δ_n^2 соответственно, левая и правая половины интервала $\{n\}$.

Доказательство. При $n = 0, 1$ лемма очевидна. Учитывая (5) достаточно доказать (25) для $n = 2^j$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда $\{n\} = [0, 2^{-j}]$ и функция $F_2^j(x)$, линейна на $[0, 2^{-j-1}]$ и $[2^{-j-1}, 2^{-j}]$. Вычислим $F_2^j(0)$. Из формул (3), (1), (1.3), (1.8)–(1.11) следует

$$\begin{aligned} F_2^j(0) = F_{j,0}(0) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{j,0}(-l) = 2^{\frac{j}{2}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \tau(2^j l) + \sum_{l=-\infty}^0 \tau(2^j l) \right) = \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \left(\tau(1) \sum_{l=1}^{\infty} (\sqrt{3} - 2)^{2^{j-l-1}} + \tau(0) \sum_{l=0}^{\infty} (\sqrt{3} - 2)^{j+1-l} \right) = \\ &= \frac{-2^{\frac{j}{2}} \tau\left(\frac{1}{2}\right)}{11} \left[- (8 + 6\sqrt{3}) \frac{(\sqrt{3} - 2)^{2^j}}{1 - (\sqrt{3} - 2)^{2^j}} + \frac{28 - 12\sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3} - 2)^{2^j}} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение в квадратных скобках больше некоторого положительного числа (достаточно проверить, что оно положительно при $j = 1$). Поэтому

$$F_2^j(0) \leq -C 2^{\frac{j}{2}} \tau\left(\frac{1}{2}\right). \quad (27)$$

Легко проверить, что если $y(x)$ — линейная функция, то

$$\int_a^b y^2(x) dx \geq (b-a) \frac{y^2(a)}{4}. \quad (28)$$

Из (27), (28) и из того, что $\tau\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, следует

$$\int_{\Delta_{2^j}^1} F_{2^j+1}^2(x) dx = \int_0^{2^{-j-1}} F_{2^j+1}^2(x) dx \geq C.$$

При $i = 2$ неравенство (25) доказывается аналогично. Лемма доказана

Исходя из формул (см. (1) и (3))

$$F_{j,0}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f_{j,0}(x-l) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tau(2^j x - 2^j l),$$

легко вывести (аналогично выкладкам (26)), что

$$\max_{0 < i < 2^{j+1}} |F_{j,0}(2^{-j-1} i)| = |F_{j,0}(2^{-j-1})|. \quad (29)$$

Учитывая, что $F_{2^j}(x)$ — линейная функция на отрезках $[2^{-j-1}(i-1), 2^{-j-1}i]$, $i = 1, \dots, 2^{j+1}$, из (29) получим

$$\max_{x \in [0, 1]} |F_{j,0}(x)| = |F_{j,0}(2^{-j-1})|. \quad (30)$$

Из (30) и (5) имеем

$$\max_{x \in [0, 1]} |F_n(x)| = |F_n(t_n)|. \quad (31)$$

В работе [13] доказано (см. [13], теорема 3.10), что ядро Дирихле по системе $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$

$$K_N(x, y) = \sum_{n=0}^N F_n(x) F_n(y)$$

удовлетворяет неравенству

$$|K_N(x, y)| \leq CNq^{Nd(x, y)}. \quad (32)$$

Из (32) следует, что если $f(x) \in L_1(0, 1)$ и $\sum_{n=1}^\infty a_n F_n(x)$ её ряд Фурье, то

$$\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| \leq CM(f, x), \quad (33)$$

где $M(f, x)$ — максимальная функция Харди-Литтльвуда. Из (33) следует, что если $f(x) \in L_p(0, 1)$, $p > 1$, то

$$\left\| \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| \right\|_p \leq C(p) \|f\|_p. \quad (34)$$

§ 4. Теоремы о безусловной сходимости и единственности рядов по периодической системе Стромберга

Теорема 4.1. Для любого $p > 0$ следующие условия эквивалентны:

(A) ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n F_n(x)$ безусловно сходится в L_p ;

(B) $\left\{ \sum_{n=0}^\infty a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \in L_p$;

(C) $\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| \in L_p$.

Для доказательства теоремы 4.1 нам нужны некоторые вспомогательные факты.

Лемма 4.1. Пусть $I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$. При любом p и любых $\varepsilon_n = \pm 1$ верны следующие неравенства

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset I \\ n \leq N}} \varepsilon_n F_n(x) \right|^p dx \leq C(p) |I|^{1-\frac{p}{2}} \left(\sum_{\{n\} \subset I} a_n^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{\{n\} \subset I} \varepsilon_n a_n F_n(x) \right|^p dx \leq C(p) \|I\|^{1-\frac{p}{2}} \left(\sum_{\{n\} \subset I} a_n^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Лемма 4.1 доказывается аналогично лемме 2.1 с использованием свойств системы $|F_n(x)|_{n=0}^\infty$ вместо соответствующих свойств системы $|f_{j,kx}|_{j,k \in \mathbb{Z}}$.

Для ряда $\sum_{n=0}^\infty a_n F_n(x)$ обозначим

$$E_\lambda = \left\{ x \in T : \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| > \lambda \right\}, \quad \lambda \in R_+. \quad (1)$$

Построим множество $B_\lambda^{(\delta)}$, $0 < \delta < 1$, следующим образом. Отрезок $[0, 1]$ обозначим через $I_{0,0}^{(\lambda, \delta)}$, если $|E_\lambda| > \delta$, а в противном случае считаем, что нет отрезка $I_{0,0}^{(\lambda, \delta)}$. Это у нас был нулевой шаг. На j -ом шаге отрезок $[0, 1]$ разделим на отрезки $[2^{-j}(i-1), 2^{-j}]$, $i=1, \dots, 2^j$ и из этих отрезков обозначим через $I_{j,k}^{(\lambda, \delta)}$ те, которые не пересекаются с $\bigcup_{q < j} \left(\bigcup_k I_{q,k}^{(\lambda, \delta)} \right)$ и удовлетворяют соотношению

$$\frac{|I_{j,k}^{(\lambda, \delta)} \cap E_\lambda|}{|I_{j,k}^{(\lambda, \delta)}|} > \delta. \quad (2)$$

Обозначим

$$B_\lambda^\delta = \bigcup_{j,k} I_{j,k}^{(\lambda, \delta)}. \quad (3)$$

При этих обозначениях справедливы следующие леммы.

Лемма 4.2. Существует постоянная $C(\delta)$, зависящая только от δ такая, что

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Delta_\lambda^\delta \\ m < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C(\delta) \lambda |E_\lambda|, \quad (4)$$

где

$$\Delta_\lambda^\delta = \{n : \{n\} \subset B_\lambda^\delta \text{ и } \{n\} \not\subset B_{2\lambda}^\delta\}. \quad (5)$$

Лемма 4.3. Пусть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) = 0 \text{ п.в. на } T.$$

Тогда ряд $\sum_{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta} a_n F_n(x)$ п.в. сходится и

$$\int_0^1 \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C(\delta) \lambda |E_\lambda|, \quad (6)$$

где $C(\delta)$ зависит только от δ .

Доказательства этих лемм имеют много общего и мы их проведем параллельно.

Доказательства лемм 4.2. и 4.3. Сразу же отметим, что из (1)–(3) следует

$$E_{4\lambda}^{\delta} \subset E_{2\lambda}^{\delta} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \subset B_{\lambda}^{\delta}, \quad |B_{\lambda}^{\delta}| < \frac{1}{\delta} |E_{\lambda}|. \quad (7)$$

Убедимся, что если $\{n\} \in B_{2\lambda}^{\delta}$, то

$$|a_n F_n(x)|_{\infty} \leq C(\delta)^{\lambda}. \quad (8)$$

Действительно, пусть Δ_1 —левая, а Δ_2 —правая половины интервала $\{n\}$. Тогда, хотя бы для одного из них выполняется

$$\frac{|\Delta_i \cap E_i|}{|\Delta_i|} < \delta. \quad (9)$$

В противном случае $\{n\} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \subset B_{2\lambda}^{\delta}$. Поскольку $a_n F_n(x)$ линейна на Δ_i , то из (9), (1) и леммы 1.3 следует

$$|a_n F_n(x)|_{L_{\infty}(\Delta_i)} < C(\delta)^{\lambda}. \quad (10)$$

Учитывая, что при любом i выполняется $t_n \in \Delta_i$, из (10) и (3.31) получим (8).

Легко видеть, что если $x \in I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)}$ и $j \geq j_0 - 1$, то (см. (8), (3.4) (3.31))

$$\sum_{\substack{|n|=j \\ \{n\} \in B_{2\lambda}^{\delta}}} |a_n F_n(x)| \leq C(\delta)^{\lambda} \sum_{\substack{|n|=j \\ \{n\} \in B_{2\lambda}^{\delta}}} q^{2^j d(x, t_n)} \leq C(\delta)^{\lambda} q^{2^j d(x, (I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)})^c)}. \quad (11)$$

Суммируя (11) для $j = j_0 - 1, j_0, \dots$ и интегрируя на $I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)}$, получим

$$\begin{aligned} \int_{I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)}} \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{\substack{|n|=j \\ \{n\} \in B_{2\lambda}^{\delta}}} |a_n F_n(x)| dx &\leq C(\delta)^{\lambda} \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \int_{I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)}} q^{2^j d(x, (I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)})^c)} dx \leq \\ &\leq C(\delta)^{\lambda} \sum_{j=j_0-1}^{\infty} 2^{-j} \int_0^{\infty} q^t dt < C(\delta)^{\lambda} |I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)}|. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим

$$\varphi_{2\lambda, 1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin B_{2\lambda}^{\delta}, \\ \sum_{j=j_0-1}^{\infty} \sum_{\substack{|n|=j \\ \{n\} \in B_{2\lambda}^{\delta}}} |a_n F_n(x)|, & \text{если } x \in I_{j_0, k}^{(2\lambda, \delta)}. \end{cases} \quad (13)$$

Из (12) имеем

$$\int_0^1 \varphi_{2\lambda, 1}(x) dx < C(\delta)^{\lambda} |B_{2\lambda}^{\delta}|. \quad (14)$$

Множества $B_{2\lambda}^{\delta}$ с точностью до множества меры нуль можно представить в виде

$$B_{2\lambda}^{\delta} = \bigcup_q I_q^{(2\lambda, \delta)}, \quad (15)$$

где интервалы $I_q^{(2\lambda, \delta)}$ не имеют общих концов и $I_q^{(2\lambda, \delta)} \cap I_{q'}^{(2\lambda, \delta)} = \emptyset$, при $q \neq q'$. Пусть для фиксированного $I_q^{(2\lambda, \delta)}$ интервал $I_{j_0 k_0}^{(2\lambda, \delta)}$ самый длинный составляющий интервала $I_q^{(2\lambda, \delta)}$. Для $j > j_0$ обозначим через $J_j^{(2\lambda, \delta)}$ самый большой интервал вида $(2^{-j} k_1, 2^{-j} k_2)$, который содержит $I_{j_0 k_0}^{(2\lambda, \delta)}$ и содержится в $I_q^{(2\lambda, \delta)}$ (при $j = j_0$ $J_j^{(2\lambda, \delta)} = I_{j_0 k_0}^{(2\lambda, \delta)}$).

Рассмотрим суммы

$$S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x) = \sum_{\substack{\{n\} \subset J^{(2\lambda, \delta)} \\ |n|=j \\ n < m}} a_n F_n(x). \quad (16)$$

Если $J_j^{(2\lambda, \delta)}$ внутри себя не содержит точки нуля, то $S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)$ — разность двух частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$, а если содержит, то $S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)$ — сумма двух разностей частичных сумм (это связано с тем, что рассматривается переодический интервал T). Во всяком случае имеет место

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| \leq 8\lambda, \text{ когда } x \in E_{\lambda}. \quad (17)$$

Интервалы $\Delta_1 = (2^{-1}(k_1 - 1), 2^{-1}k_1)$ и $\Delta_2 = (2^{-1}k_2, 2^{-1}(k_2 + 1))$ не содержатся в $B_{2\lambda}^{\delta}$ (это следует из представления (15) и выбора интервала $J_j^{(2\lambda, \delta)}$). Следовательно

$$\frac{|\Delta_i \cap E_{\lambda}|}{|\Delta_i|} < \delta, \quad i=1, 2. \quad (18)$$

Пусть Δ_1^1 — левая, а Δ_2^1 — правая половина интервала Δ_1 . Тогда хотя бы для одного из них выполняется (см. (18))

$$\frac{|\Delta_i^1 \cap E_{\lambda}|}{|\Delta_i^1|} < \delta, \quad j=1 \text{ или } 2. \quad (19)$$

Учитывая, что $S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}$ линейна на Δ_i^1 , из (19), (17) и леммы 1.3 следует

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| \leq C(\delta)\lambda, \quad x \in \Delta_i^1, \text{ где } j=1 \text{ или } 2. \quad (20)$$

Аналогично получится, что

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| \leq C(\delta)\lambda, \quad x \in \Delta_2^1, \text{ где } j=1 \text{ или } 2, \quad (21)$$

а Δ_2^1 и Δ_2^2 — левая и правая половины интервала Δ_2 .

Применяя лемму 3.2, из (20) и (21) получим

$$|S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| \leq C(\delta)\lambda q^{2/a(x, J_j^{(2\lambda, \delta)})}, \text{ когда } x \in J_j^{(2\lambda, \delta)}. \quad (22)$$

Обозначим

$$\varphi_q^{(2\lambda)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in I_{j_0, k_0}^{(2\lambda, \delta)} \\ \sum_{j=j_0}^{h-1} \max_m |S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)|, & x \in J_h^{(2\lambda, \delta)} \setminus J_{h-1}^{(2\lambda, \delta)}, \text{ при } h > j_0 \\ \sum_{j=j_0}^{\infty} \max_m |S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)|, & x \in \bigcup_{j=j_0}^{\infty} J_j^{(2\lambda, \delta)} = I_q^{(2\lambda, \delta)}. \end{cases} \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_q^{(2\lambda)}(x) dx &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \int_{(J_j^{(2\lambda, \delta)})^c} \max_m |S_{j, m}^{(2\lambda, \delta)}(x)| dx \leq C(\delta) \lambda \times \\ &\times \sum_{j=j_0}^{\infty} \int_{(J_j^{(2\lambda, \delta)})^c} q^{2^j d(x, J_j^{(2\lambda, \delta)})} dx \leq C(\delta) \lambda \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \times \\ &\times \int_0^1 q^t dt \leq C(\delta) \lambda 2^{-j_0} < C(\delta) \lambda |I_q^{(2\lambda, \delta)}|. \end{aligned} \quad (24)$$

Полагая (см. (13))

$$\varphi^{(2\lambda)}(x) = \varphi_{2\lambda, 1}(x) + \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x),$$

получим (см. (24), (15), (14))

$$\int_0^1 \varphi^{(2\lambda)}(x) dx \leq C(\delta) \lambda |B_{2\lambda}^{\delta}|. \quad (25)$$

Легко видеть, что (см. (23), (16))

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x) \leq \varphi^{(2\lambda)}(x), \text{ когда } x \in B_{2\lambda}^{\delta} \quad (26)$$

и (см. (26), (8) и (1))

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq 2\lambda + \varphi^{(2\lambda)}(x), \text{ когда } x \in B_{2\lambda}^{\delta}. \quad (27)$$

Оценим $\sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right|$ на $B_{2\lambda}^{\delta}$. Пусть $x \in I_{j, k}^{(2\lambda, \delta)}$ при некото-

рых j и k . Тогда для $N < 2^{j-1}$ имеем

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right|. \quad (28)$$

Первое слагаемое в (28) является линейной функцией на некотором двоичном отрезке, содержащем $I_{j,k}^{(2^j, \delta)}$, и поскольку этот интервал не может содержаться в $B_{2\lambda}^\delta$, то на нем

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \right| < C(\delta) \lambda. \quad (29)$$

Когда $\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta$ и $n \leq N \leq 2^{j-1}$, то $\{n\} \subset I_{j,k}^{(2^j, \delta)}$. Поэтому

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x). \quad (30)$$

Из (29) и (30) следует

$$\left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq C(\delta) \lambda + \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x), \quad N < 2^{j-1}. \quad (31)$$

Если $N > 2^{j-1}$, то (см. (31) и (13))

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| &\leq \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n < 2^{j-1}}} a_n F_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ 2^{j-1} < n < N}} a_n F_n(x) \right| < \\ &\leq C(\delta) \lambda + \sum_q \varphi_q^{(2\lambda)}(x) + \varphi_{2^{j-1}}(x) = C(\delta) \lambda + \varphi^{(2\lambda)}(x). \end{aligned}$$

Таким образом на $B_{2\lambda}^\delta$ имеем

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq C(\delta) \lambda + \varphi^{(2\lambda)}(x), \quad x \in B_{2\lambda}^\delta. \quad (32)$$

Из (26) и (32) следуют (см. также (5))

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_\lambda^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| < \varphi^{(\lambda)}(x) + \varphi^{(2\lambda)}(x), \quad \text{когда } x \in B_\lambda^\delta, \quad (33)$$

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_\lambda^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| < C(\delta) \lambda + \varphi^{(\lambda)}(x) + \varphi^{(2\lambda)}(x), \quad \text{когда } x \in B_{2\lambda}^\delta. \quad (34)$$

Из очевидного неравенства

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_\lambda^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_\lambda^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| + \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right|$$

следует также, что (см. (32) и (27))

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_\lambda^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq C(\delta) \lambda + \varphi^{(\lambda)}(x) + \varphi^{(2\lambda)}(x), \quad \text{когда } x \in B_\lambda^\delta \setminus B_{2\lambda}^\delta. \quad (35)$$

Из (33), (34), (35) вытекает

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_\lambda^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C(\delta) \lambda |B_\lambda| + \int_0^1 \varphi^{(\lambda)}(x) dx + \int_0^1 \varphi^{(2\lambda)}(x) dx. \quad (36)$$

Из (36), (25) и (7) следует (4).

Из (27) и (32) имеем

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| \leq C(\delta) \lambda + \varphi^{(2)}(x), \quad x \in T. \quad (3)$$

Из (37) и (25) следует, что $\sum_{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta}} a_n F_n(x)$ является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции. Следовательно этот ряд п. в. сходится (см. 3.33). Тогда, если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) = 0$ п. в., то ряд $\sum_{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta}} a_n F_n(x)$

тоже п. в. сходится и

$$\sum_{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta}} a_n F_n(x) = - \sum_{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta}} a_n F_n(x) \text{ п. в. на } T.$$

Поэтому (см. также (32), (26), (25) и (7))

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx &= \int_0^1 \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx + \\ &+ \int_{(B_{2\lambda}^{\delta})^c} \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C(\delta) \lambda |B_{\lambda}| \leq C(\delta) \lambda |E_{\lambda}|. \end{aligned}$$

Леммы 4.2 и 4.3 доказаны.

Из (27), (32) и (25) следует, что

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C(\delta) \lambda. \quad (38)$$

Легко видеть, что при доказательстве (38) (а также лемм 4.2 и 4.3) мы пользовались не тем, что на E_{λ} выполняется $\sup_N \left| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \right| > \lambda$, а тем, что на дополнении E_{λ} , т. е. на $T \setminus E_{\lambda}$, выполняется $\sup_N \left| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \right| \leq \lambda$. Поэтому верна следующая

Лемма 4.4. Допустим на E^{λ} выполняется $\sup_N \left| \sum_{n=1}^N a_n F_n(x) \right| < \lambda$, $E_{\lambda} = T \setminus E^{\lambda}$ и пусть B_{λ}^{δ} построено по правилам (2), (3). Тогда

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_{2\lambda}^{\delta} \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C(\delta) \lambda.$$

Для каждого $j > 1$ и $k = 1, 2, \dots, 2^j$ определим функции (рассматривается периодический отрезок $[0, 1]$)

$$\Phi_{j,k}(x) = \begin{cases} 1, & x = 2^{-j}k \\ 0, & x \in (2^{-j}(k-1), 2^{-j}(k+1)) \\ \text{линейна на } [2^{-j}(k-1), 2^{-j}k] \text{ и } [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]. \end{cases}$$

Тогда, если $n \geq 2^{\mu}$, то

$$\int_0^1 \Phi_{\mu,\nu}(x) F_n(x) dx = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2^{\mu}. \quad (39)$$

Действительно, если $n = 2^j + k$, $j \geq \mu$, то из (3.3), (3.1), (1.3) получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_{\mu,\nu}(x) F_n(x) dx &= \sum_{l \in Z} \int_R \Phi_{\mu,\nu}(x) f_{j,k}(x-l) dx = \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{l \in Z} \int_R \Phi_{\mu,\nu}(2^{-j}x + 2^{-j}k + l) \tau(x) dx. \end{aligned} \quad (40)$$

Легко заметить, что $\Phi_{\mu,\nu}(2^{-j}x + 2^{-j}k + l) \in S_0$, при $l \in Z$ и $j \geq \mu$. Поэтому из (40) и (1.1) следует (39).

Теорема 4.2. Если

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| dx = 1,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in H_1(T)$ и

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} dx \leq C.$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 2.2, только вместо функций $N_{j,k}(x)$ (см. (1.16)) нужно использовать функции $\Phi_{j,k}(x)$.

Доказательство теоремы 4.1 аналогично доказательству теоремы 2.1. При доказательстве импликаций $(B) \Rightarrow (A)$, $(B) \Rightarrow (C)$ используется лемма 4.1. Импликация $(A) \Rightarrow (B)$ доказывается в точности, как $(A) \Rightarrow (B)$ в теореме 2.1.

Для доказательства $(C) \Rightarrow (B)$ можно применить лемму 4.2 при $\delta = \frac{1}{2}$. Кратко изложим доказательство импликации $(C) \Rightarrow (B)$.

Итак, пусть

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right|^p dx = 1. \quad (41)$$

Обозначим $E^{(r)} = E_{\mathcal{L}^r}$, $r \in \mathbb{Z}$, где E_λ определяется формулой (4.4). Множества $B_{\mathcal{L}^r}$ обозначим через $B^{(r)}$ (см. (2), (3)). Тогда по лемме 4.2 имеем

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{n \in \Lambda_r \\ n \leq N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C 2^r |E^{(r)}|. \quad (42)$$

где $\Lambda_r = \{n: \{n\} \subset B^{(r)} \text{ и } \{n\} \not\subset B^{(r+1)}\}$. Из (42), применяя теорему 4.2, получим

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} dx \leq C 2^r |E^{(r)}|. \quad (43)$$

Из (43) следует (см. также (7))

$$\int_{B^{(r)}} \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx \leq C(p) 2^{rp} |E^{(r)}|. \quad (44)$$

Из лемм 3.3 легко выводится

$$\int_{B^{(r)}} \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx \geq C(p) \int_0^1 \left\{ \sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx. \quad (45)$$

Поэтому (см. (45), (44), (1) и (41))

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx &\leq \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \left(\sum_{n \in \Lambda_r} a_n^2 F_n^2(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \leq C(p) \sum_{r \in \mathbb{Z}} 2^{rp} |E^{(r)}| \leq \\ &\leq C(p) \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{rp} |E^{(r)} \setminus E^{(r+1)}| < C(p). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 4.3. Для того, чтобы ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) \quad (46)$$

был рядом Фурье некоторой интегрируемой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) = f(x) \text{ п. в на } T \quad (47)$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf \lambda \left| \left\{ x \in T : \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| > \lambda \right\} \right| = 0. \quad (48)$$

Доказательство. Для доказательства необходимости нужно только доказать, что если ряд (46) является рядом Фурье функции $f(x) \in L_1$, то выполняется (48). Из (3.33) следует, что

$$\left| \left\{ x : \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| > \lambda \right\} \right| \leq \left| \left\{ x : M(f, x) > \frac{\lambda}{C} \right\} \right|.$$

Значит для доказательства (48) достаточно показать, что для любой интегрируемой функции

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \left| \left\{ x : M(f, x) > \lambda \right\} \right| = 0. \quad (49)$$

Известно, что для любого $F(x) \in L_1$ имеет место

$$\left| \left\{ x : M(F, x) > \lambda \right\} \right| \leq \frac{5}{\lambda} \|F\|_1. \quad (50)$$

Пусть

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} f(x), & \text{когда } |f(x)| < \frac{\lambda}{2} \\ 0, & \text{когда } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

и

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} f(x), & \text{когда } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ 0, & \text{когда } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2}. \end{cases} \quad (51)$$

Тогда

$$M(f, x) \leq M(\varphi_\lambda, x) + M(\psi_\lambda, x), \quad M(\varphi_\lambda, x) \leq \frac{\lambda}{2}$$

и поэтому (см. (50), (51))

$$\left| \left\{ x : M(f, x) > \lambda \right\} \right| \leq \left| \left\{ x : M(\psi_\lambda, x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{10}{\lambda} \int_0^1 |\psi_\lambda(x)| dx. \quad (52)$$

Учитывая, что $\int_0^1 |\psi_\lambda(x)| dx \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, из (52) получим (49).

Докажем достаточность условий (47), (48). Сначала рассмотрим случай $f(x) \equiv 0$.

Пусть E_λ и B_λ — множества, определяемые формулами (1) — (3) при $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда (см. леммы 4.4 и 4.3)

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \subset B_\lambda \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C\lambda \quad (53)$$

и

$$\int_0^1 \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_\lambda \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C\lambda |E_\lambda|. \quad (54)$$

Для любого k при достаточно больших λ имеет место $\{k\} \notin B_\lambda$, так как $|B_\lambda| \rightarrow 0$. Поэтому (см. (53), (54))

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_\lambda \\ n < N}} \int_0^1 a_n F_n(x) F_k(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_0^1 F_k(x) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\{n\} \subset B_\lambda \\ n < N}} a_n F_n(x) dx \right| \leq C |F_k| \cdot \lambda |E_\lambda|. \end{aligned} \quad (55)$$

Из (48) и (55) следует, что $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная интегрируемая функция и $\sum_{n=0}^\infty b_n F_n(x)$ ее ряд Фурье. Как мы уже убедились в этом случае выполняется

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \left| \left\{ x \in T : \sup_N \left| \sum_{n=0}^N b_n F_n(x) \right| > \lambda \right\} \right| = 0. \quad (56)$$

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^\infty (b_n - a_n) F_n(x)$ удовлетворяет условиям (см. (47), (48), (56))

$$\sum_{n=0}^\infty (b_n - a_n) F_n(x) = 0 \text{ п. в. на } T \quad (57)$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf \lambda \left| \left\{ x \in T : \sup_T \left| \sum_{n=0}^N (b_n - a_n) F_n(x) \right| > \lambda \right\} \right| = 0. \quad (58)$$

Из (57), (58) следует, что $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Теорема доказана.

В работе [18] доказан аналог теоремы 4.3 для системы Франклина.

Теорема 4.1. справедлива и в случае $p = 0$. Более того, она допускает локализацию на множества положительной меры. А именно, верна следующая

Теорема 4.4. Для ряда

$$\sum_{n=0}^\infty a_n F_n(x) \quad (59)$$

следующие условия эквивалентны:

(A) ряд (59) по мере безусловно сходится на $G \subset T$;

(B) $\sum_{n=0}^\infty a_n^2 F_n^2(x) < +\infty$ п. в. на G ;

(C) $\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| < +\infty$ п. в. на G ;

(D) ряд (59) почти всюду на G сходится.

Доказательство. Импликация (D) $\Rightarrow$ (C) тривиальна, а (A) $\Rightarrow$ (B) является следствием теоремы Орлича (см. [16], гл. II т. 4). Мы докажем, что (C) $\Rightarrow$ (B), (B) $\Rightarrow$ (D), (B) $\Rightarrow$ (A).

Доказательство импликации $(C) \Rightarrow (B)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\lambda > 0$ и $E_\lambda = E^\lambda \subset G$ такие, что

$$\sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| < \lambda, \text{ когда } x \in E_\lambda, \quad (60)$$

$$|E^\lambda| > |G| - \varepsilon.$$

Обозначим $E_\lambda = T \setminus E^\lambda$. Возьмем произвольное $\delta \in (0, 1)$ и по правилам (2), (3) построим множество B_λ^δ . В силу леммы 4.4

$$\int_0^1 \sup_N \left| \sum_{\substack{\{n\} \in B_\lambda^\delta \\ n < N}} a_n F_n(x) \right| dx \leq C(\delta) \lambda, \quad (61)$$

применяя к (61) теорему 4.2 получим

$$\sum_{\{n\} \in B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } T. \quad (62)$$

Докажем, что

$$\sum_{\{n\} \in B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. вне } B_\lambda^\delta. \quad (63)$$

Множество B_λ^δ с точностью до множества меры нуль представим в виде

$$B_\lambda^\delta = \bigcup_q I_q^{(\lambda, \delta)}, \quad (64)$$

где $I_q^{(\lambda, \delta)}$ — непересекающиеся интервалы, не имеющие общих концов.

Пусть $\{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}$. Очевидно, что тогда $2^{-|n|} \leq |I_q^{(\lambda, \delta)}|$, и если Δ_1 и Δ_2 — двоичные интервалы ранга $|n| + 1$, которые не лежат в $I_q^{(\lambda, \delta)}$, но замыкание которых пересекаются с замыканием интервала $I_q^{(\lambda, \delta)}$, то

$$\Delta_i \subset B_\lambda^\delta, \quad i = 1, 2. \quad (65)$$

Поскольку $F_n(x)$ линейна на интервалах Δ_i , $i = 1, 2$, то из (65) следует (см. лемму (1.3)).

$$|a_n F_n(x)| \leq C(\delta) \lambda, \quad x \in \Delta_1 \cup \Delta_2. \quad (66)$$

Применяя лемму 3.1 из (66) получим

$$|a_n F_n(x)| \leq C(\delta) \lambda q^{2^{|n|} d(x, I_q^{(\lambda, \delta)})}, \quad x \in I_q^{(\lambda, \delta)}. \quad (67)$$

Пусть $\gamma > 0$ и $I_{q, \gamma}^{(\lambda, \delta)}$ — интервал концентрический с $I_q^{(\lambda, \delta)}$ и длины $(1 + 2\gamma) |I_q^{(\lambda, \delta)}|$. Из (67) следует

$$\int_{(I_{q, \gamma}^{(\lambda, \delta)})^c} \sum_{\{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}} a_n^2 F_n^2(x) dx <$$

$$\begin{aligned}
 & \leq C(\delta) \lambda^2 \sum_{2^{-j} < |f_q^{(\lambda, \delta)}|} \sum_{\substack{[n] = j \\ \{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}}} \int_{(f_{q, \tau}^{(\lambda, \delta)})^c} q^{2^{j+1}d(x, f_q^{(\lambda, \delta)})} dx \leq \\
 & \leq C(\delta) \lambda^2 \sum_{2^{-j} < |f_q^{(\lambda, \delta)}|} \sum_{\substack{[n] = j \\ \{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}}} \int_{\tau \cdot |f_q^{(\lambda, \delta)}|} q^{2^{j+1}t} dt.
 \end{aligned} \tag{68}$$

Учитывая, что $\text{card} \{n : \{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)} \text{ и } [n] = j\} \leq 2^{j+1} |I_q^{(\lambda, \delta)}|$, из (68) получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{(f_{q, \tau}^{(\lambda, \delta)})^c} \sum_{\{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}} a_n^2 F_n^2(x) \leq C(\delta) \lambda^2 \sum_{2^{-j} < |f_q^{(\lambda, \delta)}|} |f_q^{(\lambda, \delta)}| q^{2j} |f_q^{(\lambda, \delta)}| \leq \\
 & \leq C(\delta, \tau) \lambda^2 |I_q^{(\lambda, \delta)}|.
 \end{aligned} \tag{69}$$

Обозначая $Q_\tau = \bigcap_q (I_{q, \tau}^{(\lambda, \delta)})^c$, из (69) имеем

$$\int_{Q_\tau} \sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x) dx < +\infty. \tag{70}$$

Из (70) следует

$$\sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } Q_\tau. \tag{71}$$

Легко видеть, что $(B_\lambda^\delta)^c = \bigcup_{\tau > 0} Q_\tau$, из (71) получим (63), а из (63) и (62) следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. вне } B_\lambda^\delta. \tag{72}$$

Учитывая, что $\bigcap_{\delta < 1} B_\lambda^\delta = E_\lambda$ (см. (71)) и $E_\lambda = T \setminus E^\lambda$, из (72) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } E^\lambda. \tag{73}$$

Устремляя ε к нулю, из (73) и (60) следует (В).

Доказательство импликации $(B) \Rightarrow (D)$. Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } G.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\lambda > 0$ и $E^\lambda \subset G$ такие, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) \leq \lambda, \text{ когда } x \in E^\lambda. \tag{74}$$

и

$$|E^\lambda| > |G| - \varepsilon.$$

Обозначим $E_i = T \setminus E'_i$ и для $\delta \in (0, 1)$ по формулам (2), (3) построим множество B_λ^δ . Тогда если $\{n\} \subset B_\lambda^\delta$ и Δ_n^i , $i = 1, 2$, левая и правая половины интервала, то хотя бы для одного Δ_n^i выполняется

$$\frac{|\Delta_n^i \cap E_\lambda|}{|\Delta_n^i|} < \delta. \quad (75)$$

Учитывая, что на Δ_n^i функция $F_n(x)$ линейна, из (75), лемм 3.3 и 1.4 получим

$$\int_{(E_\lambda)^c} F_n^2(x) dx \geq C(\delta), \text{ когда } \{n\} \subset B_\lambda^\delta. \quad (76)$$

Из (76) и (74) следует

$$\sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} a_n^2 \leq C(\delta) \int_{E_\lambda} \sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} a_n^2 F_n^2(x) dx \leq C(\delta) \lambda.$$

Следовательно ряд

$$\sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} a_n F_n(x) \text{ почти всюду на } T \text{ сходится.} \quad (77)$$

Докажем, что

$$\sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} |a_n F_n(x)| < +\infty \text{ п. н. вне } B_\lambda^\delta. \quad (78)$$

Пусть B_λ^δ представлено в виде (64) и $\{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}$. Тогда $2^{-|n|} < < |I_q^{(\lambda, \delta)}|$ и если Δ_1 и Δ_2 — двоичные интервалы ранга $|n| + 1$, которые не лежат в $I_q^{(\lambda, \delta)}$, но замыкание которых пересекается с замыканием интервала $I_q^{(\lambda, \delta)}$, то

$$\Delta_i \subset B_\lambda^\delta, \quad i = 1, 2. \quad (79)$$

Поскольку $a_n^2 F_n^2(x)$ — полином второй степени на Δ_i , $i = 1, 2$, то из (79) следует (см. лемму 1.3)

$$a_n^2 F_n^2(x) \leq C(\delta) \lambda, \quad x \in \Delta_1 \cup \Delta_2. \quad (80)$$

Применяя лемму 2.1 из (80) получим

$$|a_n F_n(x)| \leq C(\delta) \lambda^2 q^{2^{-|n|}} d(x, I_q^{(\lambda, \delta)}), \quad x \in I_q^{(\lambda, \delta)}. \quad (81)$$

Пусть $I_{q, \gamma}^{(\lambda, \delta)}$ — интервал, концентрирующийся с $I_q^{(\lambda, \delta)}$ и длины $(1 + 2\gamma) \times \times |I_q^{(\lambda, \delta)}|$, $\gamma > 0$. Тогда из (81) получим (проедятся выкладки, аналогичные (68), (69))

$$\int_{(I_{q, \gamma}^{(\lambda, \delta)})^c} \sum_{\{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)}} |a_n F_n(x)| dx \leq$$

$$\leq C(\delta) \lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{2^{-j} \leq |I_q^{(\lambda, \delta)}|} \sum_{\substack{|n| \leq j \\ \{n\} \subset I_q^{(\lambda, \delta)} \\ (I_{q, \tau}^{(\lambda, \delta)})^c}} \int_{I_{q, \tau}^{(\lambda, \delta)}} q^{2^{j-1} d(x, I_q^{(\lambda, \delta)})} dx \leq C(\delta) \lambda^{\frac{1}{2}} |I_q^{(\lambda, \delta)}|. \quad (82)$$

Из (82) вытекает

$$\int_{Q_1} \sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} |a_n F_n(x)| dx \leq C(\delta) \lambda^{\frac{1}{2}}, \quad (83)$$

где $Q_1 = \bigcap_q (I_{q, 1}^{(\lambda, \delta)})^c$. Поскольку $(B_\lambda^\delta)^c = \bigcup_{\tau=0} Q_\tau$, то из (83) следует (78).

Устремляя δ к 1 из (78) получим

$$\sum_{\{n\} \subset B_\lambda^\delta} |a_n F_n(x)| < +\infty \text{ п. в. на } E'. \quad (84)$$

Итак, ряд $\sum_{n=0} a_n F_n(x)$ п. в. на E' сходится (см. (84) и (77)).

Устремляя λ к $+\infty$ получим (Д)

Доказательство импликации $(B) \Rightarrow (A)$. Из (B) следует, что

$$\sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n^2 a_n^2 F_n^2(x) < +\infty \text{ п. в. на } G,$$

где $\varepsilon_n = \pm 1$. Следовательно ряды

$$\sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n a_n F_n(x) \quad (85)$$

п. в. на G сходятся. Поэтому ряды (85) сходятся по мере на E . А из сходимости на G рядов (85) при любых $\varepsilon_n = \pm 1$ следует безусловная сходимость по мере ряда $\sum_{n=0}^\infty a_n F_n(x)$ на G (см. [16], гл. 1, теорема 1).

Аналог теоремы 4.4 был доказан для мартингалов [18], для систем Хаара [19] и Франклина [11].

Теорема 4.4. доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23. I. 1989

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ. Քննարկմանը Ստորմբերգի կազմից կառուցված Ֆրանկլինի մոդիֆիկացված համախառնի վերաբերյալ. II. (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է Ստորմբերգի պարբերական $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ համակարգը: Մասնավորապես, ասպացուցված է, որ $\sum_{n=0}^\infty a_n F_n(x)$ շարքի համար հետևյալ պայմանները համարժեք են.

$$1. \sum_{n=0}^\infty a_n F_n(x) \text{ շարքը ու պայմանական զուգամիտում է } L_p(0, 1) \text{-ում, } p \geq 0;$$

$$2. \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \in L_p(0, 1), \quad p \geq 0;$$

$$3. \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| \in L_p(0, 1), \quad p \geq 0;$$

G. G. GEVORKIAN. *Theorems on modified Franklin system, constructed by Stromberg. II (summary)*

The paper considers periodic Stromberg system $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ and proves that the following conditions on a series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x)$ are equivalent

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) \text{ unconditionally converges in } L_p(0, 1), \quad p \geq 0;$$

$$2. \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 F_n^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \in L_p(0, 1), \quad p \geq 0;$$

$$3. \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n F_n(x) \right| \in L_p(0, 1), \quad p \geq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

17. Г. Г. Геворкян. Теоремы о модифицированной системе Франклина, построенной Стромбергом. Изв. АН АрмССР, сер. матем., XXIV, № 1, 1989, 69—92.
18. R. Gundy. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Amer. Math. Soc., 124, № 2, 228—248.
19. Ф. Г. Арутюнян. О рядах по системе Хаара, ДАН Арм. ССР, 42, № 3, 1966, 134—140.