

УДК 517.955

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О ТЕОРЕМЕ КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ В ВРОНСКИАННОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Хорошо известно, что в классической теореме Коши-Ковалевской для нехарактеристической задачи Коши требование аналитичности по временной переменной коэффициентов уравнения можно ослабить до требования непрерывности вплоть до границы (см., например, [4], [8]). Для характеристической задачи Коши теорема Коши-Ковалевской остается справедливой, если в качестве начальных условий задавать неполные данные Коши (см. [1]).

Тотально характеристическую задачу Коши можно трактовать также как начальную задачу для уравнений с неограниченными коэффициентами, т. е. как ослабление условия непрерывности (аналитичности) коэффициентов уравнения в частных производных вплоть до границы.

В настоящей работе мы рассматриваем именно такие уравнения, сингулярные при приближении к начальной гиперплоскости $t=0$, причем в отличие от работ [1], [3], допускаются нефуксовы особенности. Расширяя класс допустимых решений функциями неограниченными при $t \rightarrow 0$ мы доказываем, следуя методике Розенблюма-Лере-Хёрмандера, новый вариант теоремы Коши-Ковалевской, задавая вместо неполных данных Коши весовые данные Коши (как предложено в [2]) в виде вронскианов от решения и весовых функций (см. [5]). При этом мы допускаем в качестве весовых функций формальные асимптотические решения (ФАР) вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Это позволяет находить весовые функции для широкого класса уравнений в явном виде, пользуясь теорией асимптотического интегрирования ОДУ (см. [9], [11]). Например, для некоторых уравнений можно в качестве весовых функций использовать функции Грина-Лиувилля (ВКБ-приближения) (см. § 1, пример 1).

§ 1. Формулировка основного результата. Примеры

Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ точки комплексного пространства $\mathbb{C}^{n-1}$, а через $\mathcal{Q}_R = \{x, |x_j| < R, j=1, \dots, n-1\}$ — полидиск радиуса R с центром в точке нуль. Пусть $G_R =]0, R[\times \mathcal{Q}_R$. Через $A(G)$ мы обозначим класс аналитических в G функций.

Рассмотрим в G_1 уравнение

$$(L + \beta(t, x))u(t, x) = \sum a_\alpha(t, x) D^\alpha u(t, x) + f(t, x), \quad |\alpha| \leq \gamma, \quad (1)$$

где

$$L = \partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} l_k(t, x) \partial_t^k, \quad \alpha - \text{мультииндекс из } N^n, \quad (2)$$

и выполнены условия

$$1) \quad a_*(t, x), f(t, x) \in A(\bar{G}_1), l_k(t, x) \in A(G_1),$$

$K(t, \tau, x) \beta(\tau, x) \in L_1([0, 1], C(\bar{Q}_1))$, при фиксированном t (см. (4)).
Уравнение (1) мы полагаем сингулярным при $t = 0$, точнее коэффициенты l_k предполагаются неограниченными при $t \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} l_k(t, x) = \infty, \quad k = 0, 1, \dots, m-2.$$

Пусть известна фундаментальная система решений ФСР $[\psi_j(t, x)]_1^m$ ОДУ с параметром x :

$$L_\psi = \left(\partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} l_k(t, x) \partial_t^k \right) \psi(t, x) = 0. \quad (2')$$

Отметим, что при некоторых предположениях функции ψ_j являются ФАР уравнения $(L + \beta(t, x))\varphi(t, x) = 0$ (см. теорему Левинсона в [9]).

В силу вида (2) оператора L функции $[\psi_j]$ можно выбрать таким образом, чтобы вронскиан

$$W(\tau, \psi) = W(\tau, \psi_1, \dots, \psi_m) = \det \|\gamma_{\beta}^{p-1} \psi_j(\tau, x)\|_{\beta, j=1}^m = 1. \quad (3)$$

Введем функцию Грина (или функцию Коши)

$$K(t, \tau, x) = \sum_{j=1}^m \frac{W_j(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)} \psi_j(t, x), \quad (4)$$

здесь $W_j(\tau, \psi)$ — определитель, полученный из вронскиана $W(\tau, \psi)$ в результате замены j -того столбца на $(0, \dots, 1)$.

Общее решение уравнения

$$(L + \beta)v(t, x) = f(t, x) \quad (5)$$

представимо в виде

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^m R_j(x) \psi_j(t, x) + \int_0^t K(t, \tau, x) (f - \beta v)(\tau, x) d\tau, \quad (6)$$

где $R_j(x)$ — произвольные функции.

Пусть

(ii). $W_j(t, \psi) f(t, x), W_j(t, \psi) \beta(t, x) \in L_1([0, 1], C(\bar{Q}_1))$, $j = 1, \dots, m$,

iii). для любых $a \geq 1$ и $t \in [0, 1]$ существуют постоянные c_0 и $k \in [1, m]$ такие, что

$$h_a(t) = (1-t)^a \int_0^t |K(t, \tau, x)| (1-\tau)^{-a} d\tau \leq c_0/a^k.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия i) — iii) и

$$\gamma \leq k, \quad (7)$$

$$A = (2^m e)^{\gamma} c_0 c_2 \sup_{0 \leq t \leq 1} \sum_{|a| \leq \gamma} |a_s(t, x)| < 1, \quad (8)$$

где

$$c_2 = \exp \left\{ \int_0^1 \sup_{t, x \in G_1} |K(t, s, x)| \beta(s, x) ds \right\}. \quad (8')$$

Тогда начальная задача

$$\left[\partial_t^m + \sum_{k=0}^{m-2} l_k(t, x) \partial_t^k + \beta(t, x) \right] u = \sum_{|a| \leq \tau} a_\alpha(t, x) D^\alpha u + f(t, x), \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, \psi_1, \dots, \psi_{j-1}, u, \psi_{j+1}, \dots, \psi_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

имеет единственное аналитическое в $G_{1/2}^m$ решение. При этом справедливо неравенство

$$\sup_{G_{1/2}} |u(t, x)| \leq \frac{c_0 c_2}{2(1-A)} \sup |f(t, x)|. \quad (10)$$

Отметим, что при $t = 0$ решение u теряет свойство аналитичности. Переходя к обсуждению теоремы 1 приведем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если выполнены условия (3) и

$$|K(t, \tau)| \leq \text{const}, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (11)$$

то условие iii) автоматически выполнено с $k = m$.

Доказательство. Из (11) и (3) имеем

$$|K(t, \tau)| \leq \frac{c(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (12)$$

Действительно, при $|t-\tau| < \delta$ эта оценка следует из соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{K(t, \tau)}{(t-\tau)^{m-1}} = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial_t^{m-1} K(t, \tau)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!},$$

а при $|t-\tau| \geq \delta$ — из ограниченности K .

Далее из неравенства (12) и

$$(1-t)^a \int_0^t (1-\tau)^{-a} d\tau \leq \frac{1}{a} \quad (13)$$

(см. [10], с. 405) непосредственно выводится неравенство iii) с $k = m$.

Замечание 1. Если $l_k \in A(\bar{G}_1)$, $k = 1, \dots, m$, то мы получаем классическую теорему Коши—Ковалевской (см. [10], теорема 9.4.2).

Действительно, перенося слагаемые с l_k в правую часть (1), мы получаем

$$L = \partial_t^m, \quad \psi_j = \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Нетрудно проверить, что начальные условия (9) при этом эквивалентны обычным данным Коши:

$$\lim W(\psi_1, \dots, \psi_{j-1}, u, \psi_{j+1}, \dots, \psi_m) = \lim \partial_t^{j-1} u,$$

а из леммы 1 следует выполнение условия III).

Пример 1. Пусть $m=2$, $l_0 = q(t, x) - \beta(t, x)$. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$(\partial_t^2 + q(t, x))u(t, x) = \sum_{|a| \leq \gamma} a_a(t, x) D^a u + f(t, x). \quad (14)$$

Пусть

$$q \in A(G_1), \quad q(t, x) \geq q_0 = \text{const} > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{q_t}{q^{3/2}} = 0, \quad \beta = q^{-\frac{1}{2}} (q^{-\frac{1}{2}})_t \in L_1([0, 1], C(G_1)). \quad (15)$$

Тогда функции

$$\psi_{1,2} = (-4q)^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \pm i \int_t^1 \sqrt{q(s)} ds \right\} \quad (16)$$

являются ФАР уравнения $\psi_{tt} + q\psi = 0$ или ФСР уравнения

$$[\partial_t^2 + q(t, x) - \beta(t, x)]\psi(t, x) = 0.$$

Непосредственным вычислением получаем (3) и

$$K(t, \tau) = \frac{\psi_1(\tau)\psi_2(t) - \psi_1(t)\psi_2(\tau)}{W(\psi_1, \psi_2)} = \frac{\sin \int_t^\tau \sqrt{q(s)} ds}{\sqrt{q(t)q(\tau)}}. \quad (16')$$

Из леммы 2 следует, что условия iii) теоремы 1 и в этом случае выполнены с $k=2$.

Следствие 1. В условиях (15), i для начальной задачи (14) и

$$\lim_{t \rightarrow 0} W(u, \psi_j) = 0, \quad j=1, 2, \quad (17)$$

где $\psi_{1,2}$ определяются по формулам (16), $k=2$, справедливо утверждение теоремы 1.

Пример 2. Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\left(\partial_t^2 + \frac{\rho}{t^2} \right) u = \sum_{|a| \leq \gamma} a_a(t, x) D^a u + f(t, x), \quad (18)$$

для которого вспомогательным ОДУ (см. (2')) является уравнение Эйлера:

$$\left(\partial_t^2 + \frac{\rho}{t^2} \right) \phi = 0, \quad \rho = \frac{1}{4} - \nu^2.$$

ФСР этого уравнения хорошо известна:

$$\psi_1 = t^{\nu + \frac{1}{2}}, \quad \psi_2 = \begin{cases} -\frac{1}{2\nu} t^{\frac{1}{2} - \nu}, & \nu \neq 0, \\ \sqrt{t} \ln t, & \nu = 0, \end{cases} \quad W(\psi_1, \psi_2) = 1. \quad (19)$$

Вычисляя функцию Грина, имеем

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \sqrt{t\tau} \ln \frac{t}{\tau}, & v=0, \\ \frac{1}{2^v} (\tau^{\frac{1}{2}-v} t^{\frac{1}{2}+v} - \tau^{\frac{1}{2}+v} t^{\frac{1}{2}-v}), & v \neq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из формулы квадратного корня из комплексного числа

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left\{ (\operatorname{sign} b) \sqrt{\frac{r+a}{2}} + i \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right\}, \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad (21)$$

получаем

$$v = \sqrt{\frac{1}{4} - \rho} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \sqrt{|1-4\rho| + 1 - 4\operatorname{Re} \rho} + \\ + \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \rho) \sqrt{|1-4\rho| + 4\operatorname{Re} \rho - 1} \}. \quad (22)$$

Если

$$|\operatorname{Re} v| \leq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad (\operatorname{Im} \rho)^2 \leq \operatorname{Re} \rho, \quad (23)$$

то функция Грина (20) ограничена и в силу леммы 1 условие iii) теоремы 1 автоматически выполнено с $k=2$.

Следствие 2. В условиях (23) и

$$a_n(t, x), f(t, x) \in A(\bar{G}_1), \quad (24)$$

$$A_1 = (2^n e)^2 c_0 \sup_{|x| \leq 2} |\sum a_n(t, x)| < 1,$$

уравнение (18) с начальными условиями (17), где $\psi_{1,2}$ определяются по формулам (19), имеет единственное решение $u \in A(G_{1/2})$, причем выполнена оценка (10).

Отметим, в частности, что если $\rho = 1-i$, то условие (23) выполнено и следствие 2 применимо к уравнению (18) с таким ρ . При этом ФСР

уравнения $\psi'' + \frac{1-i}{t^2} \psi = 0$ является осциллирующие при $t=0$ функции:

$$\psi_1 = t^{-1}, \quad \psi_2 = t^{1+i}/(1+2i).$$

Рассмотрим случай, когда функция Грина (20) является неограниченной, но интегрируемой.

Лемма 2. Если

$$\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} v < \frac{3}{2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\operatorname{Im} \rho}{3}\right)^2 - 2 < \operatorname{Re} \rho < (\operatorname{Im} \rho)^2, \quad (25)$$

то функция Грина (20) удовлетворяет неравенству

$$|K(t, \tau)| \leq c(t-\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\operatorname{Re} v - \frac{1}{2}}, \quad 0 < \tau \leq t \leq 1. \quad (26)$$

Доказательство. Эквивалентность неравенств (25) следует из формулы (22). Оценка (26) при $|t-\tau| \leq \delta$ для некоторого малого $\delta > 0$ следует из

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \left\{ \frac{\tau}{t} \right\}^{\nu-1} \frac{K(t, \tau)}{t-\tau} = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{K(t, \tau)}{t-\tau} = 1,$$

$$\operatorname{Re} \nu - \frac{1}{2}$$

а при $|t-\tau| \geq \delta$ из оценки $|K(t, \tau)| \leq c \left(\frac{t}{\tau} \right)$.

Лемма 3. При условии (25) для любых $a \geq 1$ имеют место оценки

$$h_a(t) = (1-t)^a \int_0^t |K(t, \tau)| (1-\tau)^{-a} d\tau < \frac{2}{|3-2 \operatorname{Re} \nu| \cdot a}, \quad (27)$$

где K —функция Грина (20).

Доказательство этой леммы следует из оценок (26), (13).

Из леммы 3 следует, что условия iii) с $k=1$ для (18) выполнены в области (25).

Следствие 3. В условиях (24), (25) задача (18), (17) (функции $\psi_{1,2}$ определяются по формулам (19)) при $\gamma=1$ имеет единственное решение $u \in A(G_{\frac{1}{2}})$.

Следствия 2, 3 остаются справедливыми и в том случае, когда ν зависит от x . Если коэффициенты вспомогательного ОДУ (2) являются функциями со степенными особенностями при $t=0$, то ФСР таких ОДУ могут быть найдены известным методом асимптотических разложений (см. [11]).

Операторы L , рассмотренные в примере 1, являются операторами с нерегулярной особенностью, а в примере 2—с регулярной (фуксовой) особенностью.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Приведем вначале вариант известной леммы Гронуолла-Беллмана:

Лемма 3. Пусть $\rho(s)$, $\sigma(s)$, $K(t)$ —неотрицательные функции на $[0, T]$, причем $K_0(s) \in L_1[0, T]$, а $\rho(s)$ ограничена на $[0, T]$.

Тогда неравенство

$$\rho(t) \leq \sigma(t) + \int_0^t K_0(s) \rho(s) ds \quad (32)$$

влечет за собой

$$\rho(t) \leq \sigma(t) + \int_0^t \left\{ K_0(s) \sigma(s) \exp \left(\int_s^t K_0(y) dy \right) \right\} ds. \quad (33)$$

Замечание 2. Полагая σ ограниченной на $[0, T]$, из (33) получаем

$$\rho(t) \leq \left| \sup_{s \in [0, T]} \varphi(s) \right| \exp \left(\int_0^t K_0(y) dy \right). \quad (34)$$

Перейдем к оценке решений задачи (1), (9).

Лема 4. Пусть выполнены условия i) — iii) и для функций v , удовлетворяющих начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} W(t, \psi_1, \dots, \psi_{j-1}, v, \psi_{j+1}, \dots, \psi_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (37)$$

при любых $a \geq 1$, $R < 1$ справедливы неравенства

$$\|(L + \beta)v(t, \cdot)\| \leq c_1(1-t)^{-a}, \quad t \in [0, R]. \quad (38)$$

Тогда при $t \in [0, R]$

$$|v(t)| \leq c_0 c_1 c_2 a^{-k} (1-t)^{-a}, \quad (39)$$

где c_0, c_2 вычисляются по формулам iii) (8').

Доказательство. Общее решение уравнения

$$(L + \beta)v(t, x) = f(t, x) \quad (40)$$

представимо в виде

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^m R_j(x) \psi_j(t, x) + \int_0^t K(t, \tau) (f - \beta v)(\tau, x) d\tau, \quad (41)$$

где $R_j(x)$ — произвольные функции, а $\psi_j \in \text{Ker } L$. Ввиду формул

$$\begin{aligned} W(t, \psi_1, \dots, \psi_{k-1}, \psi_j, \psi_{k+1}, \dots, \psi_m) &= \delta_{kj} W(t, \psi), \\ W(t, \psi_1, \dots, \psi_{j-1}, K(t, \cdot), \psi_{j+1}, \dots, \psi_m) &= W_j(\tau, \psi), \end{aligned} \quad (42)$$

из (40) получаем при $j = 1, \dots, m$ соотношения

$$\begin{aligned} W(t, \psi_1, \dots, \psi_{j-1}, v, \psi_{j+1}, \dots, \psi_m) &= R_j(x) + \\ &+ \int_0^t W_j(\tau, \psi) (f - \beta v)(\tau, x) d\tau, \end{aligned}$$

из которых, учитывая условия i), ii) и начальные условия (37), получаем

$$R_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

и представление (41) упрощается:

$$v(t, x) = \int_0^t K(t, \tau, x) (f - \beta v)(\tau, x) d\tau. \quad (43)$$

Далее из (43) получаем оценку

$$|v(t, x)| \leq \int_0^t |K(t, \tau) f(\tau)| d\tau + \int_0^t |K(t, \tau) \beta v(\tau)| d\tau, \quad (44)$$

которая в обозначениях

$$\rho(t) = |v(t, x)|, \quad \sigma(t) = \int_0^t |K(t, \tau) f(\tau)| d\tau,$$

принимает вид (32). Применяя лемму 3 получаем неравенство (34), т. е.

$$|v(t, x)| \leq c_2 \left\{ \sup_{s \in [0, t]} \int_0^s |K(s, \tau) f(\tau)| d\tau \right. \quad (45)$$

Далее из (38): $|f(t)| \leq c_1 c_2 (1-t)^{-a}$, III) и (45) получаем (39):

$$(1-t)^a |v(t, x)| \leq c_1 c_2 (1-t)^a \sup_s \int_0^s |K(s, \tau)| (1-\tau)^a d\tau \leq \frac{c_0 c_1 c_2}{a^k}.$$

Приведем формулировку теоремы Каратеодори, которая понадобится нам для доказательства следующей леммы.

Рассмотрим функцию $g(t, y)$, определенную в полосе

$$S = \{(t, y), t \in]-T, T[, y \in]-\infty, \infty[\}.$$

Пусть

(А) $g(t, y)$ при фиксированном y является измеримой функцией от $t \in]-T, T[$, а при фиксированном $t \in]-T, T[$ является непрерывной функцией от y .

(Б) Существуют неотрицательные функции $M(t)$, $N(t)$, суммируемые на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]-T, T[$ и такие, что

$$|g(t, y)| \leq M(t),$$

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| \leq N(t) |y_1 - y_2|,$$

для любых $(t, y_j) \in S$, $j = 1, 2$.

Теорема 2. (Каратеодори, [7]) В условиях (А) и (Б) существует единственное абсолютно непрерывное на $] -\tau, \tau[\subset]-T, T[$ решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad y(0) = C.$$

Лемма 5. В условиях леммы 4 существует единственное решение $v \in A(G_1)$ начальной задачи (40), (37), причем при $R < 1$ справедлива оценка

$$\sup_{\sigma_R} |v(t, x)| \leq \frac{c_0 c_2}{1-R} \cdot \sup_{\sigma_1} |f(t, x)|. \quad (46)$$

Доказательство. Существование решения уравнения (40) следует из теоремы Каратеодори, а единственность — из оценки (45). Докажем оценку (46). Из (45) имеем

$$|v(t, \cdot)| \leq c_2 \sup_{s \in [0, t]} \int_0^s |K(s, \tau) f(\tau)| d\tau \leq c_2 (1-t)^{-a}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \{ \sup |f(\tau)(1-\tau)^a| \} \cdot (1-t)^a \sup_{s \in [0, t]} \left\{ \int_0^s K(s, \tau) (1-\tau)^{-a} d\tau \right\} \leq \\ & \leq \frac{c_0 c_2}{(1-t)^a a^k} \sup_{s \in [0, t]} |(1-s)^{-a} f(s)|, \end{aligned}$$

или при $a = 1$:

$$|v(t, \cdot)| \leq \frac{c_0 c_2}{1-t} \sup_{\sigma_1} |f(\tau, \cdot)|.$$

Лемма 6. Если функция $v(x)$ аналитична при $|x| < 1$, $x \in C$ и

$$|v(x)| \leq c(1-|x|)^{-a}, \quad |x| < 1, \quad (47)$$

то с той же постоянной $c > 0$

$$|v'(x)| \leq c e(1+a)(1-|x|)^{-a-1}, \quad |x| < 1. \quad (48)$$

Доказательство леммы 6 см. в [10], лемма 9.4.4.

Переходя к доказательству теоремы 1 рассмотрим начальную задачу (1), (9).

Сведем уравнение (1) к (40), последовательно решая с помощью леммы 4 уравнения

$$(L + \beta)u_{v+1} = \sum_{|\alpha| \leq \gamma} a_\alpha D^\alpha u_v + f(t, x), \quad |\alpha| \leq \gamma, \quad (49)$$

начиная с $u \equiv 0$. По лемме 5

$$M \equiv \sup_{\sigma_R} |u_1| \leq \frac{c_0 c_2}{1-R} \sup_{\sigma_1} |f(\tau, x)|. \quad (50)$$

Вычитая два последовательных уравнения (49) и обозначив

$$v_v = u_{v+1} - u_v,$$

получим

$$v_0 = u_1,$$

$$(L + \beta)v_{v+1} = \sum_{|\alpha| \leq \gamma} a_\alpha D^\alpha v_v, \quad v = 0, 1, \dots \quad (51)$$

Из (50)

$$|v_0| < M = \frac{c_0 c_2}{1-R} \sup_{\sigma_1} |f|. \quad (52)$$

Множественно используя лемму 6, начиная с $a = 1$, имеем

$$|D^\alpha v_0| \leq M e^{\gamma} \gamma! (1-|x'|)^{-\gamma} \quad (53)$$

для всех мультииндексов $\alpha \in N^n$, $|\alpha| \leq \gamma$. Обозначив

$$A_2 = \sup_{\sigma_1} \left| \sum_{|\alpha| \leq \gamma} a_\alpha(t, x) \right|, \quad (54)$$

докажем индукцией по $v = 0, 1, \dots$ оценки

$$|v_v| < M \cdot (c_0 c_2 e^{\gamma} A_2)^v \prod_{j=1}^n (1-|x_j|)^{-\gamma}. \quad (55)$$

При $\nu = 0$ это определение M (см. (52)). Полагая (55) верным из леммы 6 имеем

$$|D^\gamma v_\nu| \leq \frac{M(e^\gamma(1+\nu))^\gamma}{\prod_1^n (1-|x_j|)^{\gamma(\nu+1)}} (c_0 c_2 A_2 e^\gamma)^\nu. \quad (56)$$

Далее

$$\begin{aligned} |(L+\beta)v_{\nu+1}| &= |\sum a_i D^\alpha v_\nu| \leq A_2 \cdot \sup |D^\alpha v_\nu| \leq \\ &\leq \frac{MA_2(e^\gamma(\nu+1))^\gamma}{\prod_1^n (1-|x_j|)^{\gamma(\nu+1)}} (c_0 c_2 A_2 e^\gamma)^\nu, \end{aligned}$$

и, наконец, из леммы 5 получаем искомые оценки:

$$\begin{aligned} |v'_{\nu+1}| &\leq \frac{c_0 c_2}{(\gamma(\nu+1))^k} \cdot \frac{MA_2(e^\gamma(1+\nu))^\gamma}{\prod_1^n (1-|x_j|)^{\gamma(\nu+1)}} (c_0 c_2 A_2 e^\gamma)^\nu \leq \\ &\leq M(c_0 c_2 A_2 e^\gamma)^{\nu+1} \cdot \prod_{j=1}^n (1-|x_j|)^{-\gamma(\nu+1)}, \end{aligned}$$

так как $\gamma! \leq \gamma^\gamma \leq \gamma^k$, при $1 \leq \gamma \leq k$.

При $x' = (t, x) \in G_{1/2}$ из (50), ввиду $1-|x_j| \geq \frac{1}{2}$ получаем оценки

$$|v_\nu| \leq MA^\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (57)$$

где, ввиду условия (8)

$$A = (2^n e)^\gamma c_0 c_2 A_2 < 1. \quad (58)$$

Из оценок (57), (58) следует существование предела

$$u = \lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu \leq M \sum_{\nu=0}^{\infty} A^\nu \leq \frac{M}{1-A},$$

аналитического в $G_{1/2}$, причем

$$|u| \leq \frac{M}{1-A} = \frac{c_0 c_2}{(1-R)(1-A)} \sup_{\sigma_1} |f|,$$

откуда и следует оценка (10).

Для доказательства единственности решения задачи (1), (9) заметим, что если u — решение уравнения (1) с $f \equiv 0$, то $v_\nu = u$ удовлетворяет уравнениям (44). Как уже было доказано $v_\nu \rightarrow 0$ в окрестности нуля u , значит, $u \equiv 0$ в $G_{1/2}$. Теорема 1 доказана.

Կ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Վառնսկիանային դրվածքով Կոշի-Կովալևսկայայի թեորեմը եզակիությունեցեցով եզակաստրուսմենի համար (ամփոփում)

Հորվածում ապացուցվում է կշռային դրվածքով Կոշի-Կովալևսկայայի թեորեմը սկզբնական հիպերհարթության վրա եզակիություններ ունեցող հավասարումների համար: Առաջարկվում է սկզբնական հիպերհարթության վրա Կոշու սվյալների փոխարեն առաջին փոփոխություններից և որոշակի կշռային ֆունկցիաներից:

G. R. OGANESIAN. *On the Cauchy-Kovalevskaja theorem with given wronskians for the singular differential equations* (summary)

In the paper a weighted Cauchy-Kovalevskaja type theorem for singular differential equations is proved, where the initial Cauchy data is replaced by the wronskians of the solution and weight functions. The fundamental asymptotic solutions of auxiliary ordinary differential equation are used as weight functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. S. Baouendi, G. Gaeta. Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, *Comm. Pure Appl. Math.*, 26, 4, 1973, 455—475.
2. А. В. Бугаев. Уравнения смешанного типа, «Итоги науки», М., ВИНТИ, 1959.
3. Л. А. Иванов, Г. М. Казан. Теорема Коши-Ковалевской для систем с особенностями, «Методы решения операторных уравнений», Воронеж, 1978, 50—54.
4. А. В. Овсянников. Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств, *ДАН СССР*, 163, № 4, 1965, 819—822.
5. Г. Р. Оганесян. О начальной задаче с заданными вронскианами, *Изв. АН Арм.ССР, сер. матем.*, 15, № 4, 1980, 292—309.
6. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды, М., Наука, 1981.
7. Дж.Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, М., ИЛ, 1953.
8. F. Trèves. Ovsyannikov theorem and hyperdifferential operators, *Notas de Matematica*, № 46, Rio de Janeiro, 1968.
9. М. М. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1983.
10. Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 1, М., Мир, 1986.
11. В. Вазов. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Мир, 1968.