ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

П. С. АВЕТИСЯН

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО РЕЗОЛЬВЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается вопрос о разрешимости уравнения

$$\lambda u(x)+P(x, D)\, u(x)=f(x) \tag{1}$$

во всем эвклидовом пространстве R_n. Здесь $P(x, D)$—равномерно семиэллиптический оператор с коэффициентами, удовлетворяющими анизотропному условию Гельдера, λ—комплексный параметр, f принадлежит определенному анизотропному пространству Гельдера.

В работе [6] была построена функция Грина (фундаментальное решение) уравнения (I) и получены оценки этой функции и ее производных по пространственной переменной $x\in R_n$. Эти оценки позволяют нам установить коэрцитивную разрешимость уравнения (I) и ограниченность резольвенты семиэллиптического оператора в анизотропных пространствах Гельдера.

Определим необходимые понятия и сформулируем основной результат настоящей заметки.

Пусть R_n—n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\cdots,x_n)$, Z_n^+—пространство мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами; $m=(m_1,\cdots,m_n)$ — вектор с натуральными компонентами, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$, где $\mu_k={}^1/m_k$ $(k=1,\cdots,n)$

Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in Z_n^+$, то положим $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$, $|\xi|_\mu=\sum\limits_{k=1}^{n}|\xi_k|^{1/\mu_k}$,

$$(\mu,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\alpha_k,\quad D^\alpha=D_x^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n},\ \text{где}\ D_{x_k}=\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Обозначим через $C^m(R_n)$ пространство функций v на R_n, имеющих непрерывные ограниченные производные $D^\alpha v$, $(\mu,\alpha)\leqslant 1$, с нормой

$$\|v\|_{C^m}=\sum_{(\mu,\alpha)<1}\sup_{x\in R_n}|D^\alpha v(x)|. \tag{2}$$

Пусть $0<\varepsilon\cdot\max\limits_{1<k<n} m_k<1$.

Определим $C^{\varepsilon m}(R_n)$ как пространство всех непрерывных ограниченных функций v на R_n, для которых

$$\|v\|_{C^{\varepsilon m}}=\sup_{x\in R_n}|v(x)|+\sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in R_n}}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|_\mu^\varepsilon}<\infty. \tag{3}$$

Наконец, определим $C^{(\varepsilon+1)m}(R_n)$ как пространство всех таких функций $v\in C^m(R_n)$, что

$$\|v\|_{C^{(\varepsilon+1)\eta m}} = \|v\|_{C^m} + \sum_{(\mu,\alpha)=1} \sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in R_n}} \frac{|D^\alpha v(x)-D^\alpha v(y)|}{|x-y|_\mu^\eta} < \infty. \tag{4}$$

Пусть $P(x, D) = \sum_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha (x) D^\alpha + \sum_{(\mu,\beta)<1} b_\beta (x) D^\beta$ — линейный дифференциальный оператор с действительными коэффициентами

$a_\alpha \in C^{\varepsilon m} (R_n)$ $((\mu,\alpha)=1)$, $b_\beta \in C^{\varepsilon m} (R_n)$ $(1-(\mu, p_\beta)\geqslant\varepsilon)$ и

$P(x,\xi) = \sum_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha (x) \xi^\alpha + \sum_{(\mu,\beta)<1} b_\beta (x) \xi^\beta$ — отвечающий ему характеристический многочлен, относительно которого предполагаем, что он является равномерно семиэллиптическим (квазиэллиптическим) (см., например, [1]), т. е. существует число $\delta > 0$ такое, что при всех $\xi \in R_n$, $x \in R_n$

$$\delta |\xi|_\mu \leqslant \sum_{(\mu,\alpha)=1} a_\alpha (x) \xi^\alpha \leqslant \delta^{-1}|\xi|_\mu. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\varphi_0 \in (0, \pi)$, λ_0 — достаточно большое положительное число, $\lambda = |\lambda| \exp(i\arg\lambda)$, $|\arg\lambda| \leqslant \pi-\varphi_0$, $|\lambda| \geqslant \lambda_0 > 0$, $\eta \in (0, \varepsilon)$.*

Тогда для любой функции $f \in C^{\eta m}(R_n)$ уравнение (1) *имеет единственное решение $u \in C^{(\eta+1)m}(R_n)$, задаваемое формулой*

$$u(x; \lambda) = \int K(x, y; \lambda)\, f(y)dy, \tag{6}$$

где $K(x, y; \lambda)$ — функция Грина (фундаментальное решение) уравнения (1) (см. [6]), *причем справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|u\|_{C^{(\eta+1)m}} \leqslant M \|f\|_{C^{\eta m}} \tag{7}$$

с постоянной $M > 0$, не зависящей от f и λ.

Следствие. Резольвента $[\lambda I + P(x, D)]^{-1}$, действующая в пространстве $C^{\eta m}(R_n)$, является ограниченным оператором и верна оценка

$$\|[\lambda I + P(x, D)]^{-1}\|_{C^{\eta m} \to C^{\eta m}} \leqslant M\lambda^{-1}. \tag{8}$$

Отметим, что изучению свойств резольвенты эллиптического оператора произвольного порядка в различных пространствах посвящено много работ (см., например, [2]—[5], [7]).

Ниже приводится схема доказательства указанной теоремы.

Конструкция функции Грина (фундаментального решения) уравнения (1) методом Леви приводит к формуле для решения этого уравнения

$$u(x;\lambda) = \int E(x-z;\ z;\ \lambda)\, f(z)dz +$$

$$+ \int\int E(x-y, y; \lambda)\, \Gamma(y, z; \lambda)\, dy f(z)\, dz, \tag{9}$$

Здесь $E(x-z, z; \lambda)$ — фундаментальное решение уравнения, которое получается из (1) отбрасыванием младших членов и „замораживанием“ коэффициентов в точке $z \in R_n$, а $\Gamma(y, z; \lambda)$ определяется из некоторого интегрального уравнения (см. [6], [7]). Получение оценки (7) опирается на неравенство (10) и формулы дифференцирования (11), (12) (см. ниже).

Пусть $x_1, x_2 \in R_n$, $\theta \in (0, \varepsilon)$. Тогда

$$|\Gamma(x_1, z; \lambda) - \Gamma(x_2, z; \lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant M \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{2} e^{-d|\lambda|^{\frac{1}{\max m_k}} |x_k - z|}}{|x_1 - z|_\mu^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k} - \varepsilon + \theta}} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{2} e^{-d|\lambda|^{\frac{1}{\max m_k}} |x_k - z|}}{|x_1 - z_\mu|^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k} - \varepsilon + \theta}} \right| |x_1 - x_2|_\mu^\theta \tag{10}$$

с постоянными $M > 0$, $d > 0$, не зависящими от x_1, x_2, z и λ.

Из оценок работы [6] и представления (9) следует существование и непрерывность производных $D^\alpha u(x; \lambda)$ $((\mu, \alpha) \leqslant 1)$, причем

$$D^\alpha u(x; \lambda) = \int D_x^\alpha E(x-z, z; \lambda) f(z)\, dz +$$

$$+ \int\int D_x^\alpha E(x-y, y; \lambda)\, \Gamma(y, z; \lambda)\, dy f(z)\, dz \quad ((\mu, \alpha) < 1), \tag{11}$$

$$D^\alpha u(x; \lambda) = \int D_x^\alpha E(x-z, z; \lambda)\, [f(z) - f(x)]\, dz +$$

$$+ \int [D_x^\alpha E(x-z, z; \lambda) - (-1)^{|\alpha|} D_z^\alpha E(x-z, x; \lambda)]\, dz f(x) +$$

$$+ \int\int D_x^\alpha E(x-y, y; \lambda)\, [\Gamma(y, z; \lambda) - \Gamma(x, z; \lambda)]\, dy f(z) dz +$$

$$+ \int\int [D_x^\alpha E(x-y, y; \lambda) - (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha E(x-y, x; \lambda)] \cdot$$

$$\cdot\, dy\, \Gamma(x, z; \lambda) f(z)\, dz \quad ((\mu, \alpha) = 1). \tag{12}$$

Неравенство (8) вытекает из (7), если последней придать операторную форму.

Ереванский государственный
университет

Поступила 13. I. 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер* Линейные дифференциальные операторы с частичными производными. М., Мир, 1965.
2. *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
3. *М. А. Шубин.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., Наука, 1978.

4. *П. Е. Соболевский.* Эллиптические и параболические операторы в С. ДАН СССР, 1988, 298, № 4, 815—819.
5. *Г. В. Розенблюм, М. З. Соломяк, М. А. Шубин.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Итоги науки и тех. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления, т. 64, 1989.
6. *П. С. Аветисян.* Об оценках функции Грина одного резольвентного уравнения. ДАН Арм.ССР, 1989, т. 89, № 3, 109—111.
7. *П. Е. Соболевский.* Коэрцитивная разрешимость в пространстве Гельдера резольвентного уравнения и оценки коммутанта, рукопись деп. в ВИНИТИ 20.05.1985 г., № 3384-85 Деп., 73 с.