ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Л. Р. СТЕПАНЯН

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

В настоящей работе рассматривается вопрос об аналитическом продолжении через интервал на прямой сходимости рядов Дирихле вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda(n) z}, \tag{1.1}$$

где λ—голоморфная функция в правой полуплоскости с определенными свойствами. Аналогичный вопрос для степенных рядов рассматривался в работе [1], где в терминах «функции коэффициентов» (функция, интерполирующая коэффициенты степенного ряда в натуральных точках) был найден новый критерий регулярности замкнутой дуги, лежащей на границе круга сходимости исходного степенного ряда.

В данной работе, в таких же терминах, установлены достаточные условия аналитического продолжения рядов Дирихле вида (1.1).

1°. **Формулировка результатов.** Пусть D—область из конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $H(D)$—множество функций, голоморфных в D. Положим

$$\Pi_a = \{\zeta \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}\zeta > a\},$$

$$\Delta_\beta = \left\{\zeta \in \mathbf{C} : |\arg\zeta| < \beta\right\} \text{ для } 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$K_\rho(a) = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta - a| < \rho\} \text{ для } a \in \mathbf{C},\ \rho > 0.$$

Рассмотрим класс H^+ функций $\lambda \in H(\Pi_0)$ таких, что $\operatorname{Re}\lambda(\zeta) > 0$ для $\zeta \in \Pi_0$. Для $\lambda \in H^+$ положим

$$c_\lambda = \inf_{0<\xi<\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda(\xi + i\eta)}{\xi}. \tag{1.2}$$

Известно (см. [2], стр. 60—61), что $0 \leqslant c_\lambda < +\infty$, причем для любого $\beta < \frac{\pi}{2}$

$$c_\lambda = \lim_{\substack{\zeta\to\infty \\ \zeta\in\Delta_\beta}} \frac{\lambda(\zeta)}{\zeta}. \tag{1.2'}$$

Определение 1. *Для функций $\varphi \in H(\Delta_\beta)$, $\lambda \in H^+$, величину*

$$\sigma = \sigma_\lambda(\varphi) = \overline{\lim_{\substack{\zeta\to\infty \\ \zeta\in\Delta_\beta}}} \frac{\log|\varphi(\zeta)|}{\operatorname{Re}\lambda(\zeta)} \tag{1.3}$$

назовем типом функции φ в Δ_β относительно λ.

Рассмотрим, далее, класс Λ функций $\lambda \in H^{+}$, для которых $\operatorname{Im} \lambda(\zeta) \operatorname{Im} \zeta > 0$ при $\zeta \in \Pi_0$, $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ и удовлетворяется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(n)}{\log n} = +\infty. \tag{1.4}$$

Примером функции класса Λ является функция

$$\lambda(\zeta) = \zeta^{\alpha},\ \alpha \in (0,\ 1].$$

Для $\lambda \in \Lambda$ будем полагать

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\operatorname{Im} \lambda(re^{i\theta})}{\operatorname{Re} \lambda(re^{i\theta})} = \delta_\lambda(\theta),\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.5}$$

понятно, что $\theta \cdot \delta_\lambda(\theta) > 0$ для $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\theta \neq 0$.

Известно (см. [3], стр. 115), что при условии (1.4) абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда Дирихле (1.1) совпадают и определяются формулой

$$u = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log |a_n|}{\lambda(n)}. \tag{1.6}$$

Сопоставление (1.3) и (1.6) показывает, что $u < \sigma_\lambda(\varphi)$.

Определение 2. Интервал I на прямой сходимости ряда (1.1) назовем интервалом голоморфности этого ряда, если сумма ряда аналитически продолжается через I.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $\varphi \in H(\Delta_\beta)$, $\beta < \pi/2$ имеет конечный тип $\sigma = \sigma_\lambda(\varphi)$ относительно функции $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\, e^{-\lambda(n) z} \tag{1.7}$$

с абсциссой сходимости u, и пусть

$$\sigma < u + \frac{2\pi\delta_\lambda(\beta)}{c_\lambda} \frac{\operatorname{tg}\beta}{\delta_\lambda(\beta) + \operatorname{tg}\beta}.$$

Тогда интервал

$$I = \left(u + i\left(\frac{\sigma - u}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\pi}{c_\lambda}\right),\ u + i\frac{u-\sigma}{\delta_\lambda(\beta)}\right)$$

является интервалом голоморфности ряда (1.7).

Заметим, что если $c_\lambda = 0$, то интервал I принимает вид $\left(u - i\infty,\ u + i\frac{u-\sigma}{\delta_\lambda(\beta)}\right)$, а при $c_\lambda \neq 0$ (поскольку тогда $\delta_\lambda(\theta) = \operatorname{tg}\theta$)

—вид $$\left(u + i\left(\frac{\sigma - u}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\pi}{c_\lambda}\right),\ u + i\frac{u-\sigma}{\operatorname{tg}\beta}\right).$$

2°. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если функция* $\lambda\in H$ *удовлетворяет условию* $\log n=o\ (\mathrm{Re}\,\lambda(n))$, *при* $n\to\infty$, *то*

$$\lim_{\substack{\zeta\to\infty\\ \zeta\in\Delta_\beta}}\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(\zeta)}{\log|\zeta|}=+\infty. \tag{2.1}$$

Доказательство. Покажем сперва, что выполняется условие

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r>0}}\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log r}=+\infty.$$

Для $r\geqslant 3$ выберем натуральное число n так, что $n\leqslant r<n+1$, и к функции $\mathrm{Re}\,\lambda$ и кругу $K_n(n)$ применим неравенство Гарнака.

Мы получим

$$\mathrm{Re}\,\lambda(r)\geqslant\frac{n-|r-n|}{n+|r-n|}\,\mathrm{Re}\,\lambda(n)\geqslant\frac{n-1}{n+1}\,\mathrm{Re}\,\lambda(n),$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log r}\geqslant\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(n)}{\log(n+1)}\to\infty\ \text{при}\ r\to\infty.$$

Пусть теперь $\zeta=\xi+i\eta\in\Delta_\beta$. Применяя опять неравенство Гарнака к функции $\mathrm{Re}\,\lambda$ и кругу $K_r(r)$, где $r=\frac{|\zeta|^2}{\xi}$ получим

$$\mathrm{Re}\,\lambda(\zeta)\geqslant\frac{r-|\zeta-r|}{r+|\zeta-r|}\,\mathrm{Re}\,\lambda(r),\ \zeta\in\Delta_\beta.$$

Отсюда, поскольку $|\zeta-r|=\frac{|\zeta|\,|\eta|}{\xi}$, $r\geqslant|\zeta|$, получим оценку

$$\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(\zeta)}{\log|\zeta|}\geqslant\frac{|\zeta|-|\eta|}{|\zeta|+|\eta|}\,\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log|\zeta|}\geqslant\frac{1-\sin(\beta/2)}{1+\sin(\beta/2)}\cdot\frac{\mathrm{Re}\,\lambda(r)}{\log r},$$

гарантирующую выполнение (2.1). Лемма 1 доказана.

Для $\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ будем обозначать через $L_{\beta,\rho}$ положительно ориентированную границу области $\Delta_\beta\setminus K_\rho(0)$.

Лемма 2. *Если функции* φ, λ *удовлетворяют условиям теоремы, то интеграл*

$$J(z)=\int_{L_{\beta,\rho}}\frac{\varphi(\zeta)\,e^{-\lambda(\zeta)z}}{e^{2\pi i\zeta}-1}\,d\zeta \tag{2.2}$$

представляет голоморфную по z *функцию в области*

$$D=\left\{z=x+iy\in\mathbb{C}:x>u,\ \frac{\sigma-u}{\mathrm{tg}\beta}-\frac{2\pi}{\sigma_1}<y<\frac{\sigma-u}{\mathrm{tg}(\beta)}\right\}.$$

допускающую аналитическое продолжение через граничный интервал I.

Доказательство. Лемма будет доказана, если показать, что для произвольных чисел a и b, где

$$\frac{\sigma-u}{\operatorname{tg}\beta}-\frac{2\pi}{c_\lambda}<a<b<-\frac{\sigma-u}{\delta_\lambda(\beta)}.$$

существует такое число $\varepsilon>0$, что интеграл $J(z)$ сходится равномерно на замкнутой области

$$\Omega_{a,b}=\{z=x+iy\in\mathbf{C}:x\geqslant u-\varepsilon,\ a\leqslant y\leqslant b\}.$$

Зафиксируем ε, удовлетворяющим условию $0<\varepsilon<d$, где

$$d=\min\left\{u-\sigma-b\delta_\lambda(\beta),\ u-\sigma+\left(\frac{2\pi}{c_\lambda}+a\right)\operatorname{tg}\beta\right\}. \tag{2.3}$$

Оценим в (2.2) подынтегральное выражение

$$\Phi(z,\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)\,e^{-\lambda(\zeta)z}}{e^{2\pi i\zeta}-1}.$$

Из (1.3) при любом $\varepsilon_0>0$ имеем

$$|\varphi(\zeta)|<e^{(\sigma+\varepsilon_0)\,Re\lambda(\zeta)},\ \zeta\in\Delta_\beta,\ |\zeta|\geqslant r_{\varepsilon_0}. \tag{2.4}$$

Зафиксируем $\rho\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ так, что $K_\rho(m)\subset\Delta_\beta$

при $m=1,2,\cdots$ Найдется число $k>0$ такое, что для $\zeta\in\mathbf{C}\setminus\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}K_\rho(m)$ выполняется неравенство

$$|e^{2\pi i\zeta}-1|>ke^{\pi(|\eta|-\eta)}. \tag{2.5}$$

Поскольку для $z=x+iy$

$$|e^{-\lambda(\zeta)z}|=e^{-Re\lambda(\zeta)x+Im\lambda(\zeta)y},$$

то в силу (2.4), (2.5) получим оценку для $\zeta\in\Delta_\beta\setminus\bigcup_{m=0}^{\infty}K_\rho(m)$, $z\in\mathbf{C}$:

$$\Phi(z,\zeta)<\frac{p}{k}\exp\{(\sigma+\varepsilon_0)\,Re\lambda(\zeta)-Re\lambda(\zeta)\,(u-\varepsilon)+$$

$+\,Im\,\lambda(\zeta)\,y-\pi|\eta|+\pi\eta\}$, где p—константа, не зависящая от z, ζ.

Перейдем к оценке $\Phi(z,\zeta)$, когда $z\in\Omega_{a,b}$.

Пусть сперва $\eta>0$. Тогда, учитывая (1.5) и условие $Im\,\lambda(\zeta)>0$, вытекающее из определения класса Λ, имеем

$$\Phi(z,\zeta)<\frac{p}{k}\exp\{[\sigma-u+\varepsilon_0+\varepsilon+(\delta_\lambda(\beta)-\varepsilon_0)\,b]\cdot Re\,\lambda(\zeta)\},$$

Следовательно, в силу выбора ε по (2.3) при достаточно малом ε_0 получим

$$|\Phi(z,\zeta)| < \frac{p}{k}\, e^{-\gamma_1 Re\,\lambda(\zeta)}, \quad \zeta \in \Delta_\beta, \tag{2.6}$$

где $\gamma_1 > 0$ — константа, не зависящая от z, ζ.

Пусть теперь $\eta < 0$. Тогда из (1.5) и условия $Im\,\lambda(\zeta) < 0$

имеем для $\zeta \in \Delta_\beta \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} K_\rho(m)$, $z \in C$

$$|\Phi(z,\zeta)| < \frac{p}{k} \exp\{(\sigma - u + \varepsilon + \varepsilon_0)\, Re\,\lambda(\zeta) -$$

$$- |Im\,\lambda(\zeta)|\, a - 2\pi|\eta|\}.$$

Следовательно, учитывая (1.2), (1.2′) и выбор ε по (2.3), при достаточно малом ε_0 получим

$$|\Phi(z,\zeta)| < \frac{p}{k} e^{-\gamma_2 \xi}, \quad \zeta \in \Delta_\beta, \tag{2.7}$$

где $\gamma_2 > 0$ — константа, не зависящая от z, ζ.

Заметим теперь, что к функции $\lambda \in \Lambda$ применима лемма 1, так что по этой лемме она будет удовлетворять (2.1). Поэтому из оценок (2.6), (2.7) следует, что интеграл (2.2) сходится равномерно по $z \in \Omega_{a,b}$ и, таким образом, представляет голоморфную функцию внутри $\Omega_{a,b}$ Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В условиях теоремы интеграл (2.2) имеет представление*

$$J(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\, e^{-\lambda(n) z}, \quad z \in D. \tag{2.8}$$

Доказательство: Рассмотрим область

$$E_m = \left(\Delta_\beta \setminus K_\rho(0)\right) \cap K_{m+\frac{1}{2}}(0), \quad \rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

и пусть S_m означает положительно ориентированную границу E_m.

Контур S_m охватывает точки $n=1,\cdots, m$ и состоит из границы $L_{\beta,\rho}$ области $\Delta_\beta \setminus K_\rho(0)$ и дуги $\Gamma_m = S_m \setminus L_{\beta,\rho}$.

По теореме Коши о вычетах при $z \in D$ имеем

$$\int\limits_{S_m} \frac{\varphi(\zeta) e^{-\lambda(\zeta) z}}{e^{2\pi i \zeta} - 1}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{m} \varphi(n) e^{-\lambda(n) z}. \tag{2.9}$$

При $m \to \infty$ из формулы (2.9) будет следовать формула (2.8), если доказать, что для $z \in D$

$$\int\limits_{\Gamma_m} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta \to 0 \text{ при } m \to \infty, \tag{2.10}$$

где $\Phi(z,\zeta)$ — подынтегральное выражение в интеграле (2.2).

Рассмотрим область $E_{n,m} = E_m \setminus E_n$, $m > n$, и пусть $S_{n,m} = \partial E_{n,m}$ положительно ориентирована. Ясно, что контур $S_{n,m}$ охватывает точки

$$k = n+1, \cdots, m \text{ и } S_{n,m} = L_\beta^{(n,m)} \cup \Gamma_m \cup \Gamma_n,$$

где $L_\beta^{(n,m)}$ означает отрезки $L_{\beta,\rho}$, образованные пересечением $L_{\beta,\rho} \cap (K_m(0) \setminus K_n(0))$. По теореме Коши о вычетах при $z \in D$ имеем

$$\int_{S_{n,m}} \Phi(z, \zeta)\, d\zeta = \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k)\, e^{-\lambda(k)z},$$

то есть

$$\int_{\Gamma_m} \Phi(z, \zeta)\, d\zeta - \int_{\Gamma_n} \Phi(z, \zeta)\, d\zeta + \int_{L_\beta^{(n,m)}} \Phi(z, \zeta)\, d\zeta = \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k)\, e^{-\lambda(k)z}.$$

Отсюда следует, что для $z \in D$

$$\left| \int_{\Gamma_m} \Phi(z, \zeta)\, d\zeta - \int_{\Gamma_n} \Phi(z, \zeta)\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{L_\beta^{(n,m)}} \Phi(z, \zeta)\, d\zeta \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k) e^{-\lambda(k)z} \right|.$$

Поскольку ряд (1.7) и интеграл (2.2) равномерно сходятся внутри области D, то последнее неравенство обеспечивает равномерную внутри D сходимость интегралов из (2.10). По теореме Вейерштрасса интегралы (2.10) будут сходиться к некоторой голоморфной в области D функции ψ. Таким образом, для вывода (2.10) и, тем самым, завершения доказательства леммы 3, остается показать, что $\psi(z) \equiv 0$ при $z \in D$.

В силу теоремы единственности достаточно доказать, что $\psi(z) = 0$ при $x > \sigma$, $y = 0$ $(z = x + iy)$. С этой целью возьмем $\omega > 0$ и заметим, что для $x \geqslant \sigma$, $y = 0$ и для $\zeta = \xi + i\eta \in \Gamma_m$ из (2.4), (2.5) следует оценка

$$|\Phi(z, \zeta)| < \frac{p}{k} \exp\left(\operatorname{Re} \lambda(\zeta)\ (\varepsilon_0 - \omega) + \pi\, (\eta - |\eta|)\right),$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — произвольное фиксированное число. Отсюда при $\eta > 0$, выбрав достаточно малое ε_0, получим оценку

$$|\Phi(z, \zeta)| < \frac{p}{k} e^{-\frac{1}{2}\omega \operatorname{Re} \lambda(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma_m. \tag{2.11}$$

Оттуда же, для $\eta < 0$ имеем

$$|\Phi(z, \zeta)| < \frac{p}{k} \exp\left\{(\varepsilon_0 - \omega) \operatorname{Re} \lambda(\zeta) - 2\pi\, \xi \operatorname{tg} \Theta\right\}$$

так, что при достаточно малом ε_0 получим: при $\zeta \in \Gamma_m$

$$|\Phi(z, \zeta)| < \frac{p}{k} e^{-\frac{1}{2}\omega \mathrm{Re}\,\lambda(\zeta) - 2\pi|\zeta|\,\mathrm{tg}\,\theta},$$

откуда

$$|\Phi(z, \zeta)| < \frac{p}{k} e^{-\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}{c_1}\right)\mathrm{Re}\,\lambda(\zeta)}, \ \zeta \in \Gamma_m. \tag{2.12}$$

Если теперь, используя лемму 1, в оценках (2.11), (2.12) устремить к бесконечности $\zeta \in \Gamma_m$, то получим, что интегралы из (2.10) стремятся к нулю при $m \to \infty$, то есть при $x > \sigma + \omega$, $y = 0 : \psi(z) = 0$. Итак, ввиду произвольности $\omega > 0$ $\psi(z) = 0$ при $x > \sigma$, $y = 0$.
Доказательство леммы 3 завершено.

3°. Доказательство теоремы. Рассмотрим интеграл (2.2). По лемме 3 интеграл (2.2) при $z \in D$ представляется рядом Дирихле (1.7). С другой стороны, по лемме 2, интеграл (2.2) представляет голоморфную функцию в области D, допускающую аналитическое продолжение на интервал I. Следовательно, сумма ряда Дирихле (1.7) посредством интеграла (2.2) аналитически продолжается на интервал I. Теорема доказана.

В заключение выражаю искренлюю благодарность академику АН Армении Н. У. Аракеляну за постановку задачи и руководство.

Институт математики
АН Армении

Поступила 17. VII. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян.* Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости, Изв. АН Армении, «Математика», 22, № 1, 1987, 3—21.
2. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
3. *А. Ф. Леонтьев.* Ряды экспонент, М., «Наука», 1976.