ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Г. В. МИКАЕЛЯН

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ТИПА БЛЯШКЕ-ДЖРБАШЯНА

1°. В [1] (см. также [2]) М. М. Джрбашян установил широкий класс формул типа Иенсена-Неванлинны, зависящих от непрерывного параметра $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ и совпадающих с классической формулой Иенсена-Неванлинны в случае $\alpha=0$. Эти формулы порождали семейство бесконечных произведений типа Бляшке для единичного круга $D=\{z:|z|<1\}$.

В [1] при любых $\zeta\in D$ $(\zeta\neq 0)$ и $\alpha\in(-1,+\infty)$ введена следующая аналитическая в D функция

$$b_{\alpha}^{(1)}(z,\zeta)\equiv\exp\left\{-\int_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha}}{(1-z\zeta^{-1}t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right\}, \tag{1}$$

и доказано, что если последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_1^{\infty}\subset D$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то бесконечное произведение

$$B_{\alpha}^{(1)}(z,\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}b_{\alpha}^{(1)}(z,z_n)$$

абсолютно и равномерно сходится внутри D и представляет аналитическую функцию с нулями $\{z_n\}_1^{\infty}$.

Отметим также, что

$$B_0^{(1)}(z,\{z_n\})\equiv\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\bar{z}_n z}\bar{z}_n.$$

С помощью произведений $B_{\alpha}^{(1)}(z,\{z_n\})$ М. М. Джрбашян установил канонические факторизации новых широких классов мероморфных в круге D функций.

2°. В [3] (см. также [4]) А. М. Джрбашяном было введено семейство бесконечных произведений типа Бляшке-Неванлинны для полуплоскости, которые затем были использованы [5] при установлении формул типа Иенсена-Неванлинны, Карлемана, Б. Я. Левина и канонической факторизации новых общих классов мероморфных в полуплоскости функций.

В [6] введено другое, более простое по конструкции, семейство бесконечных произведений для полуплоскости, которые также были использованы в [7] при установлении других формул типа Б. Я. Левина и канонической факторизации классов мероморфных в полуплоскости функций с неограниченной характеристикой Цудзи.

При любых $\zeta=\xi+i\eta\in G=\{z:\operatorname{Im} z<0\}$, $\alpha\in(-1,+\infty)$ в [3] и [6] введены в рассмотрение следующие аналитические в G функции

$$b_\alpha^{(2)}(z,\zeta)=\exp\left\{-\int_0^{|\eta|}\left([\tau+i(z-\zeta)]^{-1-\alpha}+[i(z-\bar\zeta)-\tau]^{-1-\alpha}\right)\tau^\alpha\,d\tau\right\},\tag{2}$$

$$b_\alpha^{(3)}(z,\zeta)=\exp\left\{-\int_0^{2|\eta|}[\tau+i(z-\zeta)]^{-1-\alpha}\,\tau^\alpha\,d\tau\right\}.\tag{3}$$

Как показано в этих работах, если последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_1^\infty\subset G$ при некотором $\alpha\in(-1,+\infty)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Im} z_n|^{1+\alpha}<+\infty,$$

то бесконечные произведения

$$B_\alpha^{(k)}(z,\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}b_\alpha^{(k)}(z,z_n)\quad(k=2,3)$$

абсолютно и равномерно сходятся внутри полуплоскости G и представляют аналитические функции с нулями $\{z_n\}_1^\infty$.

В частном случае $\alpha=0$

$$b_0^{(2)}(z,\zeta)=b_0^{(3)}(z,\zeta)=\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}.$$

3°. В настоящей заметке устанавливается, что приведенные выше функции $b_\alpha^{(k)}(z,\zeta)$ $(k=1,2,3)$ допускают интегральные представления одинаковой структуры:

Теорема. *Для любого $\alpha\in(-1,+\infty)$ справедливы следующие интегральные представления:*

$$b_\alpha^{(1)}(z,\zeta)=\exp\left\{\int_1^{b_0^{(1)}}(1-t)^\alpha\frac{dt}{t}\right\},\quad z,\zeta\in D,\tag{4}$$

$$b_\alpha^{(2)}(z,\zeta)=\exp\left\{\int_1^{b_0^{(2)}}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^\alpha\frac{dt}{t}\right\},\quad z,\zeta\in G,\tag{5}$$

$$b_\alpha^{(3)}(z,\zeta)=\exp\left\{\int_1^{b_0^{(3)}}(1-t)^\alpha\frac{dt}{t}\right\},\quad z,\zeta\in G,\tag{6}$$

где интегралы берутся по любым контурам, лежащим в круге D, соединяющими точки 1 *и* $b_0^{(k)}=b_0^{(k)}(z,\zeta)$ $(k=1, 2, 3)$, *и не проходящим через начало координат при* $z\neq\zeta$.

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае $\operatorname{Im} b_0^{(k)}\neq 0$ $(k=1, 2, 3)$. Общий случай будет следовать из теоремы единственности аналитических функций. В силу независимости экспонент в (4)—(6) от контура интегрирования, после интегрирования в (4) и (6) по контурам

$$\left\{ t:t=\frac{b_0^{(k)}}{x(1-b_0^{(k)})+b_0^{(k)}},\ 0\leqslant x<1 \right\}\ (k=1, 3).$$

будем иметь

$$\exp\left\{\int_1^{b_0^{(k)}}(1-t)^{\alpha}\,\frac{dt}{t}\right\}=\exp\left\{-\int_0^1\left(x+\frac{b_0^{(k)}}{1-b_0^{(k)}}\right)^{-1-\alpha}x^{\alpha}\,dx\right\}. \quad (7)$$

Далее, заметив, что

$$\frac{b_0^{(1)}}{1-b_0^{(1)}}=\frac{(\zeta-z)\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2},\quad \frac{b_0^{(3)}}{1-b_0^{(3)}}=i\,\frac{z-\zeta}{2\,|\operatorname{Im}\zeta|},$$

из (7), с заменами переменной

$$x=\frac{|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\;\frac{1-\tau}{\tau}\ (k=1),\quad x=\frac{\tau}{2\,|\operatorname{Im}\zeta|}\ (k=3),$$

и ввиду формул (1) и (3), получаем формулы (4) и (6) теоремы.

Перейдя к доказательству формулы (5) заметим, что

$$\int_1^{b_0^{(2)}}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{t}=\int_1^{b_0^{(2)}}\frac{(1-t)^{\alpha}}{(1+t)^{1+\alpha}}\,\frac{dt}{t}+\int_1^{b_0^{(2)}}\frac{(1-t)^{\alpha}}{(1+t)^{1+\alpha}}\,dt.$$

Если интегрирования в правой части этой формулы будут произведены, соответственно, по контурам

$$\left\{t:t=\frac{b_0^{(2)}}{x\,(1-b_0^{(2)})+b_0^{(2)}},\ 0\leqslant x\leqslant 1\right\},\quad \{t:t=1-x\,(1-b_0^{(2)}),\ 0<x\leqslant 1\},$$

то будем иметь

$$\exp\left\{\int_1^{b_0^{(2)}}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{t}\right\}=\exp\left\{-\int_0^1\left(x+\frac{2\,b_0^{(2)}}{1-b_0^{(2)}}\right)^{-1-\alpha}x^{\alpha}\,dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\left(\frac{2}{1-b_0^{(2)}}-x\right)^{-1-\alpha}x^{\alpha}\,dx\right\}.$$

Теперь, заменой переменной $x = \tau|\operatorname{Im}\zeta|$ в обоих последних интегралах, ввиду (2), получаем формулу (5) теоремы.

Из доказанной теоремы следует способ построения новых функций типа Бляшке-Джрбашяна.

Обозначим через Φ класс функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varphi(t)$ аналитична в единичном круге D.

2. $\varphi(0)=1$ и при $0<|z|<1$ сходятся интегралы

$$\int_1^z \frac{\varphi(t)}{t}\,dt,$$

взятые по контурам, лежащим в D, соединяющим точки 1, z и не проходящим через нуль.

При $\varphi(t)\in\Phi$ введем функции

$$b_\varphi^{(k)}(z,\zeta)=\exp\left\{\int_1^{b_0^{(k)}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right\}\quad(k=1,2), \tag{8}$$

где $z,\zeta\in D$ при $k=1$, $z,\zeta\in G$ при $k=2$, а интегралы берутся по контурам, лежащим в D, соединяющим точки 1, $b_0^{(k)}\equiv b_0^{(k)}(z,\zeta)$ и не проходящим через нуль при $z\neq\zeta$.

Заметим, что функции $b_\varphi^{(k)}(z,\zeta)$ можно представить также в виде

$$b_\varphi^{(k)}(z,\zeta)=b_0^{(k)}(z,\zeta)\exp\left\{\int_1^{b_0^{(k)}}\frac{\varphi(t)-1}{t}\,dt\right\}.$$

Так как $\varphi(0)=1$, то здесь контур интегрирования уже может проходить через точку нуль.

Очевидно, что функции $b_\varphi^{(k)}(z,\zeta)$ при фиксированном ζ аналитичны в D $(k=1)$ или G $(k=2)$ и имеют нуль только в точке $z=\zeta$, притом первого порядка.

В заключение отметим, что в (8) вместо функции $b_0^{(k)}(z,\zeta)$ могут фигурировать другие аналитические в D или G функции по модулю меньше единицы, обращающиеся в нуль в точке $z=\zeta$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 23. X. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.

3. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.
4. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», XVIII, № 6, 1983, 409—440.
5. *А. М. Джрбашян*. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXI, № 3, 1986, 214—279.
6. *А .М. Джрбашян, Г .В. Микаелян*. Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН АрмССР, «Математика», XV, № 6, 1980, 461—474.
7. *А. М. Джрбашян*. Параметрические представления классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой Цудзи, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXII, № 5, 1987, 451—477.