ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.98

Г. В. ВИРАБЯН

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧЕЙ ПУАНКАРЕ

В настоящей работе изучается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных третьей краевой задачей (задача Пуанкаре) и первой краевой задачей (задача Дирихле) для линейных и квадратичных операторных пучков с индефинитной квадратичной формой.

§ 1. Постановка задач и определения

Пусть Ω—ограниченная область двумерного пространства x, y с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, и пусть M, N и L—однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами второго порядка

$$Mu = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$Nu = b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$Lu = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Относительно оператора L предполагается, что он является строго эллиптическим, т. е. существуют положительные постоянные γ и δ такие, что для произвольных ξ и η выполняется условие

$$\gamma(\xi^2 + \eta^2) \leqslant a_1\xi^2 + a_2\xi\eta + a_3\eta^2 \leqslant \delta(\xi^2 + \eta^2). \tag{4}$$

Мы будем рассматривать следующие однородные краевые задачи (Пуанкаре) на собственные значения, соответственно, для линейного и квадратичного дифференциального операторного пучка с индефинитными формами:

$$Mu + \lambda Lu = 0, \tag{I$_1$}$$

$$Gu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_1$}$$

$$Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{I$_2$}$$

$$Gu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_2$}$$

Граничный оператор G имеет вид

$$Gu = \gamma(x, y)u + \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5}$$

где относительно $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ предполагается, что они достаточно гладкие функции в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. λ — спектральный параметр. В связи с исследованием вышепоставленных задач мы будем одновременно рассматривать и однородные краевые задачи (Дирихле) на собственные значения для тех же дифференциальных пучков

$$Mu + \lambda Lu = 0, \tag{I$_1$}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_0$}$$

$$Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{I$_2$}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{II$_0$}$$

Определение. Отличная от тождественного нуля функция $u_\lambda(x, y) \in W_2^2(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией (ОСФ) задачи (I$_1$), (II$_1$), ((I$_2$), (II$_2$), соответствующей собственному значению λ, если она удовлетворяет уравнению (I$_1$) ((I$_2$)) в обобщенном смысле (производные, входящие в уравнение (I$_1$) ((I$_2$) понимаются в обобщенном смысле) и $Gu_\lambda \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

$W_2^l(\Omega)$ ($l = 1, 2$)—пространства С. Л. Соболева. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$— множество функций из $W_2^1(\Omega)$. исчезающих на границе $\partial\Omega$ области в смысле теорем вложения С. Л. Соболева.

§ 2. Формула Грина и некоторые общие свойства для граничного оператора G

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Рассмотрим тождества

$$\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}v = v\frac{\partial}{\partial x}(\alpha u) - \frac{\partial \alpha}{\partial x}uv = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha v u) - u\frac{\partial}{\partial x}(\alpha v), \tag{6}$$

$$\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}v = v\frac{\partial}{\partial y}(\beta u) - \frac{\partial \beta}{\partial y}uv = \frac{\partial}{\partial y}(\beta v u) - u\frac{\partial}{\partial y}(\beta v). \tag{7}$$

Суммируя тождества (6), (7) и интегрируя по области Ω, перейдя от двойного интеграла к интегралу по границе, согласно известной формуле Грина, получим

$$\iint_\Omega v(x, y)\left\{\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right\}dxdy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} uv(\alpha(x, y)dy - \beta(x, y)\,dx) - \iint_\Omega\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)uvdxdy -$$

$$- \iint_\Omega\left\{\alpha(x, y)\frac{\partial v}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}\right\}udxdy. \tag{8}$$

Таким образом, для произвольных функций u и v из $C^1(\overline{\Omega})$ имеем

$$\iint\limits_{\Omega} G_0 u\cdot v dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} uv\,(\alpha\cos(s,\hat{y}) - \beta\cos(s,\hat{x}))\,ds -$$

$$-\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)uvdxdy - \iint\limits_{\Omega} G_0 v u dxdy, \tag{9}$$

где

$$G_0 u = \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10}$$

С помощью предельного перехода окончательно получаем так называемую формулу Грина для граничного оператора G

$$\iint\limits_{\Omega} Guvdxdy = \int\limits_{\partial\Omega} uv\sigma(\alpha, \beta)\,ds - \iint\limits_{\Omega} uGvdxdy +$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\left(2\gamma - \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)uvdxdy, \tag{11}$$

где

$$\sigma(\alpha, \beta) = \alpha(x, y)\cos(s,\hat{y}) - \beta(x, y)\cos(s,\hat{x}). \tag{12}$$

Формула (11) справедлива уже для произвольных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$. Для функций $u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ она принимает вид

$$\iint\limits_{\Omega} Guvdxdy = \iint\limits_{\Omega}\left(2\gamma - \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)uvdxdy - \iint\limits_{\Omega} uGvdxdy. \tag{11_0}$$

Замечание 1.2. Производные, входящие в формулы (11), (11_0), понимаются как обобщенные производные в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Замечание 2.2. В частном случае, когда $\alpha(x, y) \equiv \omega x$, $\beta(x, y) \equiv \equiv \omega y$, в контурном интеграле в (8), делая замену переменных $x = r(\alpha)\cos\alpha$, $y = r(\alpha)\sin\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$, можно представить его в виде

$$\int\limits_{\partial\Omega} uv(xdy - ydx) = \int\limits_{\partial\Omega} uvx^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \int\limits_0^{2\pi} uvr^2(\alpha)\cdot$$

$$\cdot\cos^2\alpha\, d\,\mathrm{tg}\,\alpha = \int\limits_0^{2\pi} uvr^2(\alpha)\,d\alpha. \tag{13}$$

Формула Грина (11) в этом случае принимает вид

$$\iint\limits_{\Omega} Gu\cdot vdxdy = \omega\int\limits_0^{2\pi} uvr^2(\alpha)\,d\alpha + 2\iint\limits_{\Omega}(\gamma - \omega)\,uvdxdy - \iint\limits_{\Omega} u\,Gv\,dxdy. \tag{11'}$$

Из формулы Грина (11) легко усмотреть некоторые общие свойства для граничного оператора G, отображающего соболевское пространство $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1.2. *При выполнении условий*

$$\lambda = \min_{\substack{\max \\ (x, y) \in \bar{\Omega}}} \left[-\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} + 2\gamma(x, y) \right] \underset{(<)}{>} 0, \tag{14}$$

$$\sigma(\alpha, \beta) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \tag{15}$$

оператор G является положительно определенным (отрицательно определенным) оператором, отображающим $D_G = W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2.2. *При*

$$2\gamma(x, y) = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \tag{16}$$

оператор G является антисимметричным оператором, отображающим $\mathring{D}_G = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Справедливость этих утверждений вытекает из следующих соотношений:

$$(Gu, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{\lambda}{2} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u \in W_2^1(\Omega), \tag{17}$$

$$(Gu, v)_{L_2(\Omega)} = -(u, Gv)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \tag{18}$$

которые являются непосредственными следствиями формул Грина (11), (11_0) при условиях (14), (15), (16). Области значений оператора G, действующего, соответственно, на пространствах $W_2^1(\Omega)$ и $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, обозначим через $R_G(\Omega) = G\,W_2^1(\Omega)$ и $\mathring{R}_G(\Omega) = G\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Очевидно включение

$$\mathring{R}_G(\Omega) \subset R_G(\Omega) \subseteq L_2(\Omega).$$

Замечание 3.2. При выполнении условий (14) и (15) оператор G имеет обратный G^{-1}, отображающий область значений $R_G(\Omega)$ оператора G на функциональное пространство $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $h_G(\Omega)$ ($\mathring{h}_G(\Omega)$) множество тех функций $u(x, y) \in W_2^1(\Omega)$ ($\mathring{W}_2^1(\Omega)$), для которых $Gu \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Относительно коэффициентов, входящих в граничный оператор G предположим, что $\alpha(x, y) \equiv \alpha(x)$, $\beta(x, y) \equiv \beta(y)$, $\gamma(x, y) \equiv \gamma = \mathrm{const}$, причем $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} \geqslant 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial y} \geqslant 0$. Тогда для произвольной функции $u(x, y) \in h_G(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned}(Gu, u)_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} Gu, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial}{\partial y} Gu, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \left(G\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(G\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{\delta}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{\delta}{2}\|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь мы пользовались леммой 2.2. Таким образом, справедлива следующая

Лемма 3.2. *При выполнении следующих условий:*

$$\gamma(x, y) \equiv \gamma = \text{const}, \ \alpha(x, y) \equiv \alpha(x), \ \beta(x, y) \equiv \beta(y), \ \frac{\partial\alpha}{\partial x} \geqslant 0, \ \frac{\partial\beta}{\partial y} \geqslant 0,$$

$$\delta = \min_{(x, y)\in\overline{\Omega}} \left[-\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} + 2\gamma \right] > 0, \tag{20}$$

$$\sigma(\alpha, \beta) = \alpha(x)\cos(\widehat{s, y}) - \beta(y)\cos(\widehat{s, x}) \geqslant 0$$

граничный оператор G удовлетворяет неравенству

$$(Gu, u)_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} > \frac{\delta}{2} \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}, \ \forall u \in h_G(\Omega) \cap W^2_2(\Omega). \tag{21}$$

Следствие. Из доказанной леммы следует, что оператор G^{-1}, обратный к оператору G, отображающий $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \cap R_G(\Omega)$ в $W^1_2(\Omega)$, является ограниченным в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

В дальнейших параграфах будем предполагать, что

$$\alpha(x, y) = \omega x, \ \beta(x, y) = \omega y, \ \gamma(x, y) = \gamma, \tag{22}$$

где ω и γ—действительные постоянные такие, что

$$\gamma > \omega \geqslant 0 \text{ или } \gamma < \omega < 0. \tag{23}$$

§ 3. Случай линейного пучка

Однородная спектральная задача Дирихле (I_1), (II_0) порождает известный оператор Соболева-Александряна A, который является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим на гладких функциях в соболевском гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ согласно формуле

$$\mathrm{A} = -L^{-1}M, \tag{24}$$

где L^{-1}—обратный к эллиптическому оператору L при граничных условиях (II_0). Известно [1], что отличные от нуля решения краевой задачи (I_1), (II_0) из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ являются собственными элементами оператора A в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и наоборот.

Предположим, что область значений оператора A содержится в $R_G(\Omega)$.

Рассмотрим оператор

$$\mathrm{A}_G = G^{-1}\mathrm{A}G, \tag{25}$$

который отображает $h_G(\Omega)$ в себя.

Лемма 1.3. *Между линейными дифференциальными операторами M, L и граничным оператором G имеют место следующие соотношения:*

$$MGu - GMu = 2\omega Mu, \tag{26}$$

$$LGu - GLu = 2\omega Lu \tag{27}$$

для произвольной гладкой функции $u(x, y)$.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ имеет частные производные до третьего порядка. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \omega y \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x \partial y} = \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + 2\omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \omega x \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \omega y \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \omega x \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \omega y \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}. \tag{30}$$

Умножая равенства (28), (29), (30), соответственно, на c_1, c_2, c_3 и суммируя, получим

$$MGu = \gamma Mu + 2\omega Mu + \omega x \frac{\partial Mu}{\partial x} + \omega y \frac{\partial Mu}{\partial y} = GMu + 2\omega Mu. \tag{31}$$

Аналогично доказывается тождество (27).

Теорема 1.3. *Гладкие собственные функции задачи Пуанкаре* (I_1), (II_1) *являются собственными элементами оператора* A_Q *в* $h_Q(\Omega)$ *и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$—гладкое отличное от нуля решение краевой задачи (I_1), (II_1), тогда согласно лемме 1.3 оно удовлетворяет соотношению

$$(M + \lambda L)\, Gu = (G + 2\omega I)(M + \lambda L)\, u = 0. \tag{32}$$

С другой стороны, в силу существования обратных операторов L^{-1} и G^{-1}, имеем

$$(A_Q - \lambda I)\, u = G^{-1}(-L^{-1}M - \lambda I)\, Gu = 0, \quad u \in h_Q(\Omega). \tag{33}$$

Обратно, пусть $u(x, y)$—гладкая собственная функция оператора A_Q в $h_Q(\Omega)$, т. е.

$$A_Q u = G^{-1} A\, Gu = \lambda u. \tag{34}$$

Применяя с обеих сторон равенства (34) последовательно операторы G и L, получим

$$(M + \lambda L)\, Gu = 0. \tag{35}$$

В силу леммы 1.3 имеем

$$(G + 2\omega I)(M + \lambda L)\, u = (M + \lambda L)\, Gu = 0. \tag{36}$$

Но согласно лемме 1.3 оператор $G + 2\omega I$ имеет обратный. Поэтому

$$Mu + \lambda Lu = 0, \quad Gu \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \tag{37}$$

Теорема доказана.

Таким образом, краевая спектральная задача Пуанкаре (I_1), (II_1) вполне характеризуется оператором A_Q, который по построению G-подобен оператору С. Л. Соболева A, порожденному однородной задачей Дирихле (I_1), (II_0).

Теорема 2.3. *Пусть* $\gamma > \omega \geqslant 0$ ($\gamma < \omega \leqslant 0$), *тогда если у оператора* A *из* $\mathring{W}_2^1(\Omega) \cap R_Q(\Omega)$ *имеется полная система собственных* *функций в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то у оператора A_Ω имеется полная система собственных функций в $h_\Omega(\Omega)$ в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и обратно, если у оператора A_Ω в $h_\Omega(\Omega)$ имеется полная система собственных функций в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то у оператора A в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ также имеется полная в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ система собственных функций.*

Доказательство. Пусть $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_1^\infty \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap R_\Omega(\Omega)$ — полная в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ система собственных функций с соответствующими собственными значениями λ_n оператора A. Тогда очевидно, что система $\{v_n(x, y) = G^{-1} u_{\lambda_n}(x, y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\}_{n=1}^\infty$ будет системой собственных функций для оператора A_Ω в $h_\Omega(\Omega)$. Покажем, что эта система полна в $h_\Omega(\Omega)$ в метрике $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Пусть $u(x, y)$ — произвольная функция из $h_\Omega(\Omega)$, тогда $Gu \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и существует последовательность линейных комбинаций из $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_{n=1}^\infty$, так что

$$\sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)} u_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} Gu(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{38}$$

В силу непрерывности обратного оператора G^{-1} (лемма 3.2) имеем

$$\sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)} v_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} u(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{39}$$

Обратно, пусть $\{v_{\lambda_n}(x, y)\}_{n=1}^\infty$ — полная система собственных функций оператора A_Ω в $h_\Omega(\Omega)$. Тогда $\{u_{\lambda_n}(x, y) = Gv_{\lambda_n}(x, y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\}_{n=1}^\infty$ будет системой собственных функций для оперятора A в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Покажем, что эта система полна в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Пусть $u(x, y)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что $v(x, y) = G^{-1} u(x, y) \in h_\Omega(\Omega)$. Тогда существует последовательность линейных комбинаций из $h_\Omega(\Omega)$, так что

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} v_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} G^{-1} u(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{40}$$

Применяя с двух сторон оператор G, получим

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} u_{\lambda_k}(x, y) \xrightarrow{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} u(x, y) \text{ при } N \to \infty. \tag{41}$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 1.3. Вторую часть доказанной теоремы можно заменить следующим утверждением. Если у оператора A_Ω в $h_\Omega(\Omega)$ имеется полная в метрике $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ система собственных функций, то у оператора A в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеется полная в метрике $L_2(\Omega)$ система собственных функций.

Теорема 3.3. *В случае, когда область Ω — круг, при выполнении условия $\gamma > \omega \geqslant 0$ $(\gamma < \omega < 0)$ оператор A_0 имеет полную совокупность полиномиальных собственных функций в $h_0(\Omega)$.*

Доказательство этой теоремы следует из вышедоказанной теоремы и из установленного ранее [1] результата, согласно которому в случае круга у оператора С. Л. Соболева имеется полная в $\mathring{W}_1(\Omega)$ система полиномиальных собственных функций.

Замечание 2.3. Теорему 3.3 можно доказать независимо от теоремы 2.3.

Следствие 1.3. Из теорем 1.3 и 3.3 следует, что при условии $\gamma > \omega \geqslant 0$ $(\gamma < \omega \leqslant 0)$ в случае круга краевая задача Пуанкаре имеет полную систему полиноминальных собственных функций в $h_0(\Omega)$.

§ 4. Случай квадратичного пучка

В этом параграфе изучается спектральная взаимосвязь однородной задачи Пуанкаре (I_2), (II_2) и соответствующей задачи Дирихле (I_2), (II_0) для квадратичного дифференциального пучка

$$\mathrm{L}(\lambda)u = Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu.$$

Задача Дирихле (I_2), (II_0) в операторной форме эквивалентна изучению следующего квадратичного операторного пучка:

$$L(\lambda)u = Cu + \lambda Bu + \lambda^2 Iu, \tag{42}$$

где $B = -L^{-1}N$, $C = -L^{-1}M$ — самосопряженные ограниченные операторы типа С. Л. Соболева, действующие в соболевском пространстве $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, I — единичный оператор.

Предполагается, что области значений операторов B и C принадлежат $R_0(\Omega)$. Пучок $L(\lambda)$ при линеаризации, в свою очередь, порождает матричный оператор

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} O & I \\ C & B \end{pmatrix}, \tag{43}$$

действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Полнота системы собственных векторов матричного оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ в H означает двукратную полноту системы собственных элементов для квадратичного пучка $L(\lambda)$ и следовательно для краевой задачи (I_2), (II_0). Предположим, что выполняется условие $\gamma > \omega \geqslant 0$ $\gamma < \omega \leqslant 0)$ существования обратного оператора G^{-1}.

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L_0(\lambda) = C_0 + \lambda B_0 - \lambda^2 I, \tag{44}$$

где C_0 и B_0 — линейные операторы, действующие в пространстве $h_0(\Omega)$, согласно формулам

$$C_0 u = G^{-1}CGu, \quad B_0 u = G^{-1}BGu, \quad u \in h_0(\Omega), \tag{45}$$

I — единичный оператор в $h_Q(\Omega)$. Ассоциированный с этим пучком матричный оператор

$$\hat{A}_Q = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_Q & B_Q \end{pmatrix} \qquad (45')$$

действует в ортогональной сумме пространств $\hat{H}_Q^{(2)} = h_Q(\Omega) \oplus h_Q(\Omega)$.

Оператор $\hat{A}_Q$ можно представить в виде

$$\hat{A}_Q = \hat{G}^{-1} \hat{A} \hat{G}, \qquad (46)$$

где матричный оператор

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \qquad (47)$$

отображает $\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega) + L_2(\Omega)$, а его обратный

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \qquad (48)$$

отображает $R_Q(\Omega) \oplus R_Q(\Omega)$ на $\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Теорема 1.4. *Гладкие собственные функции краевой задачи* (I_2), (II_2) *являются собственными элементами для квадратичного пучка* $L_Q(\lambda)$ *и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u_\lambda(x, y)$ — гладкая собственная функция краевой задачи (I_2), (II_2) с собственным значением λ. Тогда в силу леммы 1.3 имеем

$$\mathrm{L}(\lambda)\, G u_\lambda = (G + 2\beta I)\, \mathrm{L}(\lambda)\, u_\lambda = 0. \qquad (49)$$

Отсюда, в силу существования обратных операторов L^{-1} и G^{-1}, заключаем

$$L_Q u_\lambda = G^{-1} L^{-1}\, \mathrm{L}(\lambda)\, G u_\lambda = 0, \quad u_\lambda(x, y) \in h_Q(\Omega). \qquad (50)$$

Обратно, пусть $u_\lambda(x, y) \in h_Q(\Omega)$ — гладкий собственный элемент квадратичного пучка $L_Q(\lambda)$, соответствующий собственному значению λ, тогда применяя последовательно операторы G и L, из равенства

$$L_Q(\lambda)\, u_\lambda = G^{-1} C G u_\lambda + \lambda G^{-1} B G u_\lambda - \lambda^2 u_\lambda = 0 \qquad (51)$$

получаем

$$\mathrm{L}(\lambda)\, G u_\lambda(x, y) = 0. \qquad (52)$$

Отсюда в силу леммы 1.3

$$(G + 2\beta I)\, \mathrm{L}(\lambda)\, u_\lambda(x, y) = 0. \qquad (53)$$

Но поскольку существует обратный оператор $(G + 2\beta I)^{-1}$, то окончательно имеем

$$\mathrm{L}_\lambda u_\lambda(x, y) = 0, \quad G u_\lambda(x, y) \in \mathring{W}_2^1(\Omega). \qquad (54)$$

Теорема доказана.

Вышедоказанная теорема показывает, что краевая задача (I_2), (II_2) вполне характеризуется квадратичным операторным пучком $L_Q(\lambda)$, который по построению подобен квадратичному пучку $L(\lambda)$, порожденному (I_2), (II_0).

Теорема 2.4. *Пусть $\gamma > \omega \geqslant 0$ ($\gamma < \omega < 0$), тогда через двукратно полную в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ систему собственных функций из $\mathring{W}_2^1(\Omega) \cap R_\sigma(\Omega)$ квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций для квадратичного пучка $L_\sigma(\lambda)$ в $h_\sigma(\Omega)$ и обратно, через двукратно полную в метрике $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ систему собственных функций пучка $L_\sigma(\lambda)$ в $h_\sigma(\Omega)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций квадратичного пучка $L(\lambda)$ в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Легко проверить, что если $u_{\lambda_n}(x, y)$ — собственная функция для пучка $L(\lambda)$, то

$$G L_\sigma(\lambda_n) G^{-1} u_{\lambda_n} = L(\lambda_n) u_{\lambda_n} = 0, \tag{55}$$

т. е. $v_{\lambda_n}(x, y) = G^{-1} u_{\lambda_n}(x, y) \in h_\sigma(\Omega)$ является собственной функцией для пучка $L_\sigma(\lambda)$. Двукратная полнота системы $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_1^\infty$ в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ означает полноту системы вектор-функций $\left\{\hat{u}_{\lambda_n} = \begin{pmatrix} u_{\lambda_n} \\ \lambda_n u_{\lambda_n}\end{pmatrix}\right\}$ матричного оператора $\mathbf{A}$ в

$$\hat{H}(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Покажем, что вектор-функция

$$\hat{v}_{\lambda_n}(x, y) = \begin{pmatrix} v_{\lambda_n} \\ \lambda_n v_{\lambda_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1} u_{\lambda_n} \\ \lambda_n G^{-1} u_{\lambda_n}\end{pmatrix} = \hat{G}^{-1} \hat{u}_{\lambda_n} \tag{56}$$

является собственным вектором для оператора $\hat{\mathbf{A}}_\sigma$.

В самом деле, имеем

$$\hat{\mathbf{A}}_\sigma \hat{v}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \hat{G} \hat{v}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \hat{u}_{\lambda_n} = \lambda_n \hat{v}_{\lambda_n}. \tag{57}$$

Пусть $\hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор из $\hat{H}_\sigma(\Omega) = h_\sigma(\Omega) \oplus h_\sigma(\Omega)$

Рассмотрим вектор

$$\hat{G}\hat{v} = \hat{w} \in \hat{H}(\Omega). \tag{58}$$

Существует последовательность линейных комбинаций из собственных вектор-функций оператора $\hat{\mathbf{A}}$, так что

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{u}_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}(\Omega)} \hat{w} \text{ при } n \to \infty. \tag{59}$$

Отсюда в силу непрерывности оператора $\hat{G}^{-1}$ (лемма 3.2)

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{G}^{-1} \hat{u}_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}_\sigma(\Omega)} \hat{G}^{-1} \hat{w} = \hat{v}. \tag{60}$$

Таким образом, для матричного оператора $\hat{A}_a$ система $\{\hat{v}_{\lambda_k} = \hat{G}^{-1} \hat{u}_{\lambda_k}\}_1^\infty$ собственных вектор-функций полна в ортогональной сумме $\hat{H}_a(\Omega) = h_a(\Omega) \oplus h_a(\Omega)$. А это означает, что система собственных функций квадратичного пучка $L_a(\lambda)$ двукратно полна в $h_a(\Omega)$. Обратно, пусть система собственных функций $\{v_{\lambda_k}(x, y)\}_1^\infty$ пучка $L_a(\lambda)$ двукратно полна в $h_a(\Omega)$ в метрике пространства $W_2^1(\Omega)$. Это означает полноту в метрике $W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$ системы собственных векторов $\left\{\hat{v}_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_k} \\ \lambda_k v_{\lambda_k} \end{pmatrix}\right\}_1^\infty$ матричного оператора $\hat{A}_a$ в $\hat{H}_a(\Omega)$.

Пусть $\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ — произвольный элемент из $\hat{H}(\Omega)$. Тогда вектор $\hat{v} = \hat{G}^{-1} \hat{u} = \begin{pmatrix} G^{-1} u_1 \\ G^{-1} u_2 \end{pmatrix} \in \hat{H}_a(\Omega)$ и поэтому может быть аппроксимирован линейными комбинациями собственных векторов оператора $\hat{A}_a$

$$\sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)} \hat{v} \text{ при } N \to \infty. \tag{61}$$

В силу непрерывности оператора $\hat{G}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \hat{G} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{\mathring{W}_2^1(\Omega) \oplus \mathring{W}_2^1(\Omega)} \hat{G}\hat{v} = \hat{u} \text{ при } N \to \infty.$$

Легко усмотреть, что система $\hat{G}\hat{v}_{\lambda_k} \in \hat{H}(\Omega)$ является системой собственных векторов для оператора $\hat{A}$. Теорема полностью доказана.

Предположим, что дифференциальные операторы M и L удовлетворяют следующим условиям;

$$\iint_{\Omega} Mpp\,d\Omega > 0, \quad \iint_{\Omega} Lpp\,d\Omega < 0 \tag{*}$$

для всех отличных от нуля полиномов от x и y. В работе [2] при выполнении условия (*) для квадратичного пучка $L(\lambda)$ установлено существование двукратно полной системы полиномиальных собственных функций в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ в случае, когда область Ω — единичный круг. Сопоставление этого результата с вышедоказанной теоремой позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.4. *В случае, когда область Ω—круг, при выполнении условий* (*) *и* $\gamma > \omega \geqslant 0$ $(\gamma < \omega \leqslant 0)$, *у квадратичного операторного пучка* $L_a(\lambda)$, *порожденного задачей Пуанкаре, имеется двукратно полная система полиномиальных собственных функций в* $h_a(\Omega)$.

Следствие 1.4. Из доказанных теорем 1.4 и 3.4 следует, что в случае круга, при выполнении условия (*), краевая задача Пуанкаре имеет двукратно полную систему собственных функций в $h_a(\Omega)$.

Замечание 1.4. Аналогичные вышеприведенным результаты можно установить в случае многомерных областей, а также для дифференциальных операторных пучков более высокого порядка.

В заключение выражаю глубокую благодарность скоропостижно скончавшемуся моему учителю академику АН Армении Р. А. Александряну за внимание и ценные критические замечания.

Ереванский государственный университет Поступила 3. I. 1989

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ. Պուանկարեի խնդրից ծնված օպերատորային փնջերի մասին. *(ամփոփում)*

Ներկա աշխատանքում հետազոտվում է անորոշ ձև ունեցող դիֆերենցիալ հավասարումների համար Դիրիխլեի և Պուանկարեի խնդիրներից ծնված օպերատորների սպեկտրալ փոխկապակցությունը։

G. V. VIRABYAN. *On the operator pencil generated by Poincare problem* (summary)

The spectral interconnection of operator pencil generated by Dirichlet and Poincare problems for partial differential equations in indefinite form is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева, Труды ММО, т. 9, 1960.
2. *Г. В. Вирабян.* О полноте системы собственных функций для одного класса краевых задач с индефинитной формой, ДАН АрмССР, XLIII, № 1, 1966.