ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.95

Г. С. АКОПЯН, Р. Л. ШАХБАГЯН

ПОСТРОЕНИЕ АТТРАКТОРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

1°. Рассмотрим эволюционное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A(u), \quad t>0, \tag{1}$$

для которого корректно поставлена задача с начальным условием

$$u|_{t=0}=u_0. \tag{2}$$

Одной из центральных проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными вида (1) является изучение поведения их траекторий $u(t, x)$ при $t\to\infty$. Как оказалось эта задача тесно связана с существованием многообразий, называемых аттракторами, обладающих свойством притяжения траекторий.

Важной проблемой является описание структуры аттракторов, оценки сверху и снизу их хаусдорфовой размерности.

Этому кругу вопросов посвящено довольно много работ (см., например, [1]—[5] и приведенную в них библиографию).

В настоящее время достаточно полно исследованы эволюционные дифференциальные уравнения (и системы) с частными производными второго порядка.

Статья посвящена доказательству существования аттракторов полугрупп, порождаемых нелинейными параболическими уравнениями высокого порядка.

2°. Пусть X—банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Семейство операторов $\{S_t, t\geqslant 0\}$, действующих в пространстве X:

$$S_t: X\to X, \ \forall t\geqslant 0 \tag{3}$$

называется полугруппой, если композиция

$$S_t\circ S_\tau=S_{t+\tau}, \ \forall\, t, \ \tau\geqslant 0,$$

$S_0=I$, где I—единичный оператор.

Заметим, что если задача (1), (2) однозначно разрешима, то она порождает семейство операторов S_t:

$$S_t\, u_0=u(t). \tag{4}$$

Легко проверяется, что $\{S_t\}$—полугруппа.

Следуя А. В. Бабину и М. И. Вишику [1], [5], дадим

Определение 2. Пусть $\{S_t, t\geqslant 0\}$—полугруппа операторов S_t, действующих в X. Ограниченное, замкнутое в X, множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}\subset X)$ называется максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$, если

1) для любого ограниченного множества $B \subset X$

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}\,(S_t B,\ \mathfrak{M}) = 0 \tag{5}$$

(условие притяжения), где $\operatorname{dist}\,(F,\ G) = \sup_{f\in F} \inf_{g\in G} \|f-g\|$;

2) $S_t \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ для любого $t \geqslant 0$ (условие инвариантности).

Ниже мы будем существенно опираться на одну общую теорему о существовании аттрактора, доказанную в [1]. Приведем её формулировку.

Теорема I. *Пусть полугруппа* $\{S_t\}$, $S_t : X \to X$, *удовлетворяет следующим условиям:*

а) полугруппа $\{S_t\}$ *равномерно ограничена, то есть для любого* $R > 0$ *существует постоянная* $C(R) > 0$ *такая, что*

$$\|S_t u\| < C(R), \text{ при } \|u\| \leqslant R \text{ и } \forall t > 0;$$

в) существует компактное в X *поглощающее множество* B_0, *то есть для любого ограниченного множества* $B \subset X$ *существует такое число* $T > 0$, *что при* $t \geqslant T$ $S_t B \subset B_0$;

с) операторы $S_t : X \to X$ *непрерывны при* $t \geqslant 0$. *Тогда у полугруппы* $\{S_t\}$ *имеется компактный максимальный аттрактор.*

Введем необходимые нам для дальнейшего обозначения. Для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ положим $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Пространство $L_p\,(0,\ T;\ W_p^m\,(\Omega))$ по определению — банахово пространство функций $u\,(x,\ t) : (0,\ T) \to W_p^m\,(\Omega)$ с нормой

$$\|u\,(x,\ t)\|_{m,p} = \left(\int_0^T \|u\,(x, t)\|_{m,p}^p\, dt\right)^{1/p},$$

где

$$\|u\,(x,\ t)\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| < m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Круглыми скобками (,) будем обозначать скалярное произведение в $L_2\,(\Omega)$.

3°. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндре $Q = (0,\ \infty) \times \Omega$ рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L\,(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| < m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\,(A_\alpha\,(x,\ t,\ D^\gamma u)) = 0,\ (x,\ t) \in Q, \tag{6}$$

$$u\,(x, 0) = u_0\,(x),\ x \in \Omega, \tag{7}$$

$$D^\omega u|_\Sigma = 0,\ |\omega| \leqslant m-1,\ \Sigma = (0,\ \infty) \times \Gamma, \tag{8}$$

где α, γ, ω — мультииндексы, функции $A_\alpha\,(x,\ t,\ \xi_\gamma)$ нелинейны и зависят, вообще говоря, от всех ξ_γ с $|\gamma| \leqslant m$.

Предполагается также, что

1) Функции $A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)$ определены для $(t, x) \in Q$ и всех ξ_γ, непрерывны по t и ξ_γ и удовлетворяют неравенству

$$|A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)| \leqslant K_1 \left(\sum_{|\alpha| < m} |\xi_\gamma|^{p-1} + 1 \right), \quad p \geqslant 2; \tag{9}$$

2) Условие эллиптичности: для любой функции $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ (т. е. для любого $T > 0$, $u(x, t) \in L_p(0, T; W_p^m(\Omega))$) справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u), D^\alpha u) \geqslant a_0 \|u(x, t)\|_{m,p}^p - k(t), \tag{10}$$

где $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $k(t)$ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция;

3) Условие сильной эллиптичности: для любого $T > 0$ и любых функций $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ и $v(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ таких, что $u - v \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega))$, имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha| < m} \int_0^T \int_\Omega (A_\alpha(x, t, D^\gamma u) - A_\alpha(x, t, D^\gamma v)) D^\alpha (u - v)\, dx dt \geqslant$$

$$\geqslant a_1 \int_0^T \|u - v\|_{m,p}^p\, dt, \tag{11}$$

где $a_1 = \mathrm{const} > 0$.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}(T)$ банахово пространство функций, получаемое при замыкании линейного многообразия гладких функций $z(x, t)$ таких, что

$$z(x, 0) = 0, \quad D^\omega z|_{\Sigma_T} = 0, \quad |\omega| \leqslant m - 1,$$

по норме

$$\|z(x, t)\|' = \left(\int_0^T \|z(x, t)\|_{m,p}^p\, dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^T \left\| \frac{\partial z}{\partial t} \right\|_{-m,q}^q dt \right)^{1/q}, \tag{12}$$

где
$$\Sigma_T = (0, T) \times \Gamma; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

а через $H_T(u_0)$ — множество функций вида

$$u(x, t) = u_0(x) + z(x, t),$$

где $z(x, t) \in \overset{0}{H}(T)$.

Определение. Функция $u(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; W_p^m(\Omega))$ называется обобщенным решением задачи (6) — (8), если для любого $T > 0$, $u(x, t) \in H_T(u_0)$ и для любой функции $v(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ имеет место интегральное тождество

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v(x, t)\, dx dt + \sum_{|\alpha| < m} \int_0^T \int_\Omega A_\alpha(x, t, D^\gamma u) D^\alpha v(x, t)\, dx dt = 0. \tag{13}$$

Справедлива следующая теорема (ср. [6], теорема 9).

Теорема II. *Пусть выполнены условия* 1)—3), *тогда для любого* $u_0(x) \in \overset{0}{W}{}^m_p(\Omega)$ задача (6)—(8) имеет, притом единственное, обобщенное решение.

Сформулированная теорема по существу содержится в [6] (теорема 9) и поэтому её доказательство мы опускаем. Однако, для полноты изложения, приведем основные этапы её доказательства в том виде, в каком нам понадобится в дальнейшем.

Выберем систему гладких функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x), \cdots$, полную в $\overset{0}{W}{}^m_p(\Omega)$ и применим модифицированный метод Галеркина. Зададим галеркинские приближения в виде

$$u_r(x, t) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{r} c_{kr}(t)\, v_k(x),$$

где неизвестные функции $c_{kr}(t)$ определяются из следующей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(u_r'(x, t),\ v_k(x)\right) + \sum_{|\alpha| \le m}\left(A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r),\ D^\alpha v_k\right) = 0,\ (k=1,2,\cdots,r),$$
$$c_{kr}(0)=0\ (k=1,\ 2,\cdots,r). \tag{14}$$

Задача (14) имеет хотя бы одно решение (лемма 3, [6]). Для приближенных решений $u_r(x, t)$ справедлива априорная оценка

$$\|u_r(x,t)\|_{m,p} = \left(\int_0^T \|u_r(x,t)\|^p_{m,p}\, dt\right)^{1/p} < K_2. \tag{15}$$

Оценка (15) равносильна неравенству

$$\|z_r(x,t)\|_{m,p} = \left(\int_0^T \|z_r(x,t)\|^p_{m,p}\, dt\right)^{1/p} \le K_3,$$

где
$$z_r(x, t) = \sum_{k=1}^{n} c_{kr}(t)\, v_k(x),$$

из которой, в силу слабой компактности шара в L_p, следует, что существует функция $z(x, t) \in L_p(0, T;\ \overset{0}{W}{}^m_p(\Omega))$ и такая подпоследовательность $z_{r_j}(x, t)$, что $z_{r_j}(x,t) \to z(x, t)$ слабо в $L_p\left(0, T;\ \overset{0}{W}{}^m_p(\Omega)\right)$. Отсюда

$$u_{r_j}(x, t) \equiv u_0(x) + z_{r_j}(x, t) \to u_0(x) + z(x, t) \text{ слабо в } L_p(0, T;\ W^m_p(\Omega)).$$

Заметим, что в силу условия 1) функции $A_\alpha(x, t\ D^\gamma u_r)$ суммируемы со степенью $q = \dfrac{p}{p-1}$ и образуют в силу (15) ограниченное множество в $L_q\left(0, T; W_q^{(-m)}(\Omega)\right)$. Следовательно, подпоследовательность $u_{r_j}(x, t)$ можно считать выбранной так, что $A_\alpha(x, t, D^\gamma u_{r_j}) \to a_{\alpha T}(x, t)$ слабо в L_q. Доказывается, что имеет место соотношение

$$-\int_0^T\int_\Omega z(x, t)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}\,dxdt + \sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega a_\alpha(x, t)\, D^\alpha v(x, t)\,dxdt = 0 \quad (16)$$

для любого $v(x, t) \in \overset{*}{W}{}_{p,q}^{(m,1)}$, где через $\overset{*}{W}{}_{p,q}^{(m,1)}$ обозначено пространство функций $v(x, t)$ таких, что $v(x, t) \in W_{p,q}^{(m,1)}$ и обращающихся в нуль при $t = T$. Полагая в (16) $v(x, t) = \psi(x)\ \varphi(t)$, где $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, а $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, T)$, нетрудно убедиться, что функция $z(x, t)$, рассматриваемая как функция от t со значениями в $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, имеет обобщенную производную $z'(x, t) \in L_q(0, T; W_q^{(-m)}(\Omega))$. Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_q(0, T; W_q^{(-m)}(\Omega))$. Теперь, выбирая в равенстве (16) в качестве $v(x, t)$ гладкую, финитную в Q функцию и интегрируя по частям в первом слагаемом по t, получим, что

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial z(x, t)}{\partial t}\, v(x, t)\, dxdt = -\int_0^T\int_\Omega z(x, t)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}\,dxdt$$

для $\forall\, v(x, t) \in W_{p,q}^{(m,1)}$. Это и означает, что $z(x, 0) = 0$ или $u(x, 0) = u_0(x)$.

Наконец, доказывается, что для любого $v(x, t) \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ имеет место равенство

$$\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega a_\alpha(x, t)\, D^\alpha v(x, t)\,dxdt = \sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega A_\alpha(x, t, D^\gamma u)\, D^\alpha v(x, t)\,dxdt.$$

Последнее соотношение вместе с (16) доказывает теорему.

4°. В этом пункте будет доказан основной результат работы—существование компактных аттракторов полугрупп, порожденных задачей (6)—(8).

Предварительно установим следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть* $u_{10}(x)$ *и* $u_{20}(x)$*—произвольные элементы из* $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, *а* $u_1(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ и $u_2(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$*—соответствующие им обобщенные решения задачи* (6) — (8), *тогда*

$$\|u_1(x, t) - u_2(x, t)\| \leqslant \|u_{10}(x) - u_{20}(x)\|, \quad (17)$$

где $\|\cdot\|$ *— норма в пространстве* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Из определения обобщенного решения следует, что

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial t} v\,(x,t)\,dxdt+$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^t\int_\Omega (A_\alpha(x,t,D^\gamma u_1)-A_\alpha(x,t,D^\gamma u_2))\,D^\alpha v\,dxdt=0 \tag{18}$$

для любого $v\in L_p^{loc}(0,\infty;\ \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$. Полагая в (18)

$v(x,t)\equiv u_1(x,t)-u_2(x,t)$ и интегрируя в первом слагаемом по частям, получим

$$0=\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial t}(u_1-u_2)\,dxdt+$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^t\int_\Omega (A_\alpha(x,t,D^\gamma u_1)-A_\alpha(x,t,D^\gamma u_2))\,D^\alpha(u_1-u_2)\,dxdt,$$

$$0=\int_\Omega [[u_1(x,t)-u_2(x,t)]^2-[u_1(x,0)-u_2(x,0)]^2]\,dx+$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^t\int_\Omega (A_\alpha(x,t,D^\gamma u_1)-A_\alpha(x,t,D^\gamma u_2))\,D^\alpha(u_1-u_2)\,dxdt-$$

$$-\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial (u_1-u_2)}{\partial t}(u_1-u_2)\,dxdt.$$

Таким образом

$$\|u_1-u_2\|^2=\|u_{10}-u_{20}\|^2-2\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^t\int_\Omega (A_\alpha(x,t,D^\gamma u_1)-$$

$$-A_\alpha(x,t,D^\gamma u_2))\,D^\alpha(u_1-u_2)\,dxdt. \tag{19}$$

Так как второе слагаемое правой части положительно (условие 3), то из (19) немедленно следует требуемое неравенство. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Обобщенное решение задачи* (6)—(8) *удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\|u\|^2\le e^{-2a_0 t}\left(\|u_0\|^2+2\int_0^t e^{-2a_0\tau}k(\tau)\,d\tau\right). \tag{20}$$

Доказательство. Умножая k-е уравнение (14) на $c_{kr}(t)$ и суммируя по k от 1 до r, получим

$$(u_r'(x,t),z_r(x,t))+\sum_{|\alpha|\le m}(A_\alpha(x,t,D^\gamma u_r)\,(D^\alpha z_r)=0. \tag{21}$$

Так как функция $u_r(x, t) \in L_p^{loc}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$, то в силу условия 2)

$$a_0 \| u_r \|_{m,p}^p - k(t) \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_r) =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_0) + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha z_r) =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_0) - \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, z_r \right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} (A_\alpha(x, t, D^\gamma u_r), D^\alpha u_0) - \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_r \right) + \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_0 \right). \tag{22}$$

Не ограничивая общности можем считать, что $v_1(x) = u_0(x)$, тогда из неравенств (14) и (22) заключаем, что

$$a_0 \| u_r \|_{m,p}^p - k(t) \leqslant - \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_r \right). \tag{23}$$

Так как $p \geqslant 2$, то, тем более

$$a_0 \| u_r \|_{m,p}^p - k(t) \leqslant - \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}, u_r \right).$$

Следовательно

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\| u_r \|^2) + a_0 \| u_r \|^2 \leqslant k(t). \tag{23}$$

Применяя неравенство Гронуола к (23), получим

$$\| u_r \|^2 \leqslant e^{-2a_0 t} \left(\| u_0 \|^2 + 2 \int_0^t e^{2a_0 \tau} k(\tau)\, d\tau \right). \tag{24}$$

Пусть $T > 0$ — произвольное фиксированное число, а $w(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, T)$ — произвольные элементы, тогда из слабой сходимости $u_r(x, t)$ к $u(x, t)$ в пространстве $L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$ и из того, что $L_2(\Omega) \subset W_q^{(-m)}(\Omega)$, следует

$$\int_0^T \int_\Omega u_r(x)\, w(x)\, \varphi(t)\, dxdt \xrightarrow[r \to \infty]{} \int_0^T \int_\Omega u(x, t)\, w(x)\, \varphi(t)\, dxdt. \tag{25}$$

Из слабой компактности $L_2(\Omega)$ и из оценки (24) следует, что последовательность $u_r(x, t)$ имеет слабый предел $\tilde{u}(x, t)$ в $L_2(\Omega)$, т. е.

$$\int_\Omega u_r(x, t)\, w(x)\, dx \xrightarrow[r \to \infty]{} \int_\Omega \tilde{u}(x, t)\, w(x)\, dx. \tag{26}$$

Из (26) имеем, что для любой $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$

$$\varphi(t) \int_\Omega u_r(x, t)\, w(x)\, dx \xrightarrow[r \to \infty]{} \varphi(t) \int_\Omega \tilde{u}(x, t)\, w(x)\, dx$$

и отсюда, в свою очередь, вытекают, что последовательность $\{u_r\}_1^\infty$ слабо сходится к $\bar{u}$ в пространстве L_p $(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))$. В силу единственности слабого предела $\tilde{u}(x, t) = u(x, t)$, отсюда и из оценки (24) следует ее справедливость и для обобщенного решения $u(x, t)$. Лемма 2 доказана.

Приведем достаточные условия, обеспечивающие компактность полугруппы $\{S_t\}$ $(t>0)$.

Предложение. *Пусть оператор L, участвующий в уравнении (6), удовлетворяет условиям 1)—3). Предположим также выполненными следующие условия:*

4) *для любых вещественных* ξ_α, ξ_β, η_i, η_j; $x\in\Omega$, $t\in[0, \infty)$

$$\sum_{\substack{|\alpha|<m\\|\beta|<m}}\sum_{i,j=1}^{n} A_{\alpha\beta}(x, t, \xi_\gamma)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta\,\eta_i\,\eta_j \geqslant 0,$$

где

$$A_{\alpha\beta}(x, t, \xi_\gamma)=\frac{\partial A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)}{\partial \xi_\beta};$$

5) имеет место оценка

$$|D_x^\delta\, \partial_\xi^\beta\, A_\alpha(x, t, \xi_\gamma)|\leqslant K\Big(1+\sum_{|\gamma|<m}|\xi_\gamma|^{p-1-|\beta|}\Big)$$

для любых α, β, δ, $|\delta|\leqslant 2$, $|\alpha|\leqslant m$, $|\beta|<1$, *а постоянная* $K>0$ *не зависит от* $x\in\Omega$, $t\in[0, \infty)$.

Тогда, если решение $u\in L_p^{loc}(0, \infty, \overset{\circ}{W}{}_p^{m+1}(\Omega))$, *то семейство операторов* S_t $(t>0)$, *порожденное задачей* (6)—(8), *отображает множества, ограниченные в* $L_2(\Omega)$, *в ограниченные множества пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *и, стало быть, компактные в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $T>0$ фиксировано, а $U_0=\{u_0\in L_2(\Omega);\ \|u_0\|<M\}$ — произвольное ограниченное множество в $L_2(\Omega)$. Подставляя решение $u(x, t)$ задачи (6)—(8) в уравнение (6), умножая обе части полученного тождества на $t^2\,\Delta u$ (Δ—оператор Лапласа по переменным x) и интегрируя по области Ω, получим

$$\int_\Omega t^2\frac{\partial u}{\partial t}\Delta u\,dx+\sum_{|\alpha|<m}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega t^2 D^\alpha(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\,\Delta u\,dx=0. \tag{27}$$

Интегрируя последнее тождество по частям придем к следующему соотношению:

$$-\int_\Omega t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx-$$

$$-\sum_{|\alpha|<m} t^2\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A^\alpha(x, t, D^\gamma u)\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\,dx=0. \tag{28}$$

Теперь произведя в (28) интегрирование по $t\in[O, T]$ и проведя несложные выкладки, получим

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt+2\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt=$$

$$=2\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, d:$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(T\frac{\partial u(x, T)}{\partial x_i}\right)^2 dx-2\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt=$$

$$=-2\sum_{|\alpha|<m}\int_0^T\int_\Omega t^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dxdt$$

или

$$T^2\| u(x, T)\|_{1,2}^2=2\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt-$$

$$-2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial}{\partial x_i}(A_\alpha(x, t, D^\gamma u))\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dxdt.$$

Из последнего соотношения и условия 4) вытекает

$$T^2\| u(x, T)\|_{1,2}^2<2T\| u(x, t)\|_{1,2}^2-2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dx\alpha_i,$$

и следовательно

$$T^2\| u(x, T)\|_{1,2}^2\leqslant 2T\| u(x, T)\|_{m,p}^p-$$

$$-2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial A_\alpha(x, t, D^\gamma u)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha u\, dx_u$$

Производя интегрирование по частям в последнем слагаеме правой части этого неравенства, получим

$$T^2\| u(x, T)\|_{1,2}^2\leqslant 2T\| u(x, T)\|_{m,p}^p+$$

$$+2\sum_{|\alpha|<m}\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega t^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_\alpha(x, t, D^\gamma u)}{\partial x_i}\right)D^\alpha u\, dxdt. \qquad (29)$$

В силу условия 5) после несложных преобразований в неравенстве (29), получим следующую оценку:

$$\|u(x, T)\|^p_{1,2} \leqslant C\|u(x, t)\|^p_{m,p}, \tag{30}$$

где $C>0$—постоянная, зависящая от T.

И, наконец, интегрируя (23) по t от 0 до T, получим

$$a_0\|u_r(x, t)\|^p_{m,p} - \int_0^T k(t)\,dt \leqslant -\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u_r}{\partial t} u_r\,dx dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega |u_r(x, t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_r(x, 0)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\|u_0(x)\|^2. \tag{31}$$

Из неравенств (30) и (31) следует, что

$$\|S_T u_0\|_{1,2} = \|u(x, T)\|_{1,2} \leqslant C_1\|u_0(x)\| < M\cdot C_1,\quad u_0\in U_0,$$

отсюда, в силу компактности оператора вложения из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, следует утверждение предложения.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* 1)—5), *а функция $k(t)$, участвующая в условии* 2), *ограничена на* $[0, \infty)$. *Тогда полугруппа S_t, порожденная задачей* (6)—(8), *обладает максимальным аттрактором, компактным в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы I, лемм 1, 2, предложения и оценки (20).

Межвузовский научный центр по прикладным проблемам математики ЕГУ

Поступила 5. VI. 1989

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Բարձր կարգի ոչ գծային պարաբոլական օպերատորների ատրակտորների կառուցումը *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է հետևյալ խնդրով

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha (x, t, D^\gamma u)) = 0,$$

$$x\in\Omega\subset R^n,\ t>0,$$

$$u(x,0)=u_0(x)$$

$$D^\omega u|_\Sigma = 0,\ \Sigma=(0, \infty)\times\partial\Omega,\ |\omega|\leqslant m-1.$$

ծնված $\{S_t\}$ *կիսախմբի ատրակտորի գոյության հարցը։ Ապացուցվում է, որ եթե* L *օպերատորը բավարարում է 1)-5) պայմաններին, ապա կիսախումբը ունի կոմպակտ ատրակտոր։*

G. S. HAKOBIAN, R. L. SHAKHBAGIAN. *On the construction of attractors for the high order nonlinear parabolic equations* (summary)

In the paper the existence of attractors for the $\{S_t\}$ semigroup, generated by the initial-boudary problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| < m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha (x, t, D^\gamma u)) =$$
$$= 0, x \in \Omega \subset R^n, t > 0,$$
$$u(x, 0) = u_0(x),$$
$$D^\omega u|_\Sigma = 0 \ |\omega| \leqslant m-1, \ \Sigma = (0, \infty) \times \partial\Omega$$

for high order quasilinear parabolic equation is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В Бабин, М. И. Вишик*. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности, УМН, 38, вып. 4 (232), 1983, 133—187.
2. *О. А. Ладыженская*. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса, Зап. науч .сем. ЛОМИ, 27, 1972, 91—115.
3. *О. А. Ладыженская*. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и других уравнений с частными производными, УМН, 42, вып. 6 (258), 1987, 25—80.
4. *А. В. Бабин, М. И. Вишик*. Спектральное и стабилизированное асимптотическое поведение решений нелинейных эволюционных уравнений, УМН, 43, вып. 5 (263), 1988, 99—132.
5. *А. В. Бабин, М. И. Вишик*. Аттракторы эволюционных уравнений, М., «Наука», 1989.
6. *Ю. А. Дубинский*. Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка, УМН, 23, вып. 1 (139), 1968, 45—90.