ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.53

Р. А. АВЕТИСЯН, Н. У. АРАКЕЛЯН

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Настоящая работа содержит полные доказательства анонсированных в заметке [1] результатов о равномерном приближении на вещественной оси $\mathbf{R}$ мероморфными функциями с оценкой их роста. Некоторые из них доказываются в уточненной и более сильной формулировке, кроме того, в отличие от [1], здесь рассматриваются также *касательные* приближения мероморфными функциями.

Вопросы наилучших приближений мероморфными функциями стали разрабатываться лишь два десятилетия тому назад. Вопрос о равномерном приближении голоморфных в угловых областях функций мероморфными с оценкой их роста был исследован в работе Л. А. Тер-Исраеляна [2] и в недавней работе авторов [3]. Указанный вопрос представляет интерес не только для теории приближений, но и с точки зрения возможных приложений в теорию распределения значений мероморфных функций. Что касается наилучших мероморфных приближений на $\mathbf{R}$, то насколько нам известно, в [1] были приведены первые результаты в этом направлении.

В данной работе в качестве аппроксимируемых рассматриваются произвольные непрерывные либо непрерывно дифференцируемые функции. Рост аппроксимирующих мероморфных функций измеряется ростом их неванлинновских характеристик. Указанный рост определяется, грубо говоря, ростом производной аппроксимируемых функций, так что приближение даже ограниченных функций может требовать использования мероморфных функций сколь угодно высокого роста.

Мероморфные приближения на $\mathbf{R}$ имеют естественные области пересечения с конструктивной теорией функций. Одной из целей данной работы является выделение и описание некоторых классов непрерывных на $\mathbf{R}$ и ограниченных функций, которые конструктивно вполне характеризуются с помощью своих наилучших приближений мероморфными функциями заданного роста (см. теорему 3 и следствие 2). Толчком к рассмотрению этого вопроса послужило решение аналогичной задачи в случае приближений целыми функциями (см. теорему 3 работы [4]). Привлечение более гибких мероморфных функций позволяет получить конструктивное описание новых классов, не различимых с помощью приближений целыми функциями.

Работа состоит из двух параграфов. Первый из них содержит формулировку основных результатов работы, а второй—их доказательства вместе со всеми вспомогательными утверждениями.

§ 1. Формулировка результатов

1. Известная теорема Карлемана [5]утверждает, что если f и ω—непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, причем $\omega>0$, то тогда для произвольного числа $\varepsilon>0$ можно найти целую (и тем более мероморфную) функцию g такую, что

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon\omega(x) \text{ для } x\in\mathbb{R}.$$

Если $\omega(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$, то налицо не только *равномерное*, но и *касательное* (или асимптотическое) приближение со *скоростью касания* ω в бесконечности.

Основная наша задача состоит в конструировании мероморфных функций g, осуществляющих приближения на $\mathbb{R}$ указанных типов и имеющих возможно медленный рост на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (естественно измеряемый ростом неванлинновской характеристики $T(r, g)$ функции g). Эта задача не сводится прямо к аналогичной задаче приближения целыми функциями (см. [4]), однако некоторые заготовки для решения последней будут нами существенно использованы.

Для формулировки первого нашего основного результата нам необходимы следующие

Обозначения (определения). 1) Пусть C и C^1—классы непрерывных и соответственно непрерывно дифференцируемых комплексных функций на $\mathbb{R}$. Положим

$$M(\tau, f)=\sup_{|x|\leqslant\tau}|f(x)| \text{ для } f\in C,$$

$$\lambda(\tau, f)=\sup_{|x|\leqslant\tau}(|x|+1)|f'(x)| \text{ для } f\in C^1.$$

2) Отнесем функцию $q\in C^1(\mathbb{R}^+)$ к классу $\mathbf{B}$, если $q(0)\geqslant 0$, b строго возрастает на $\mathbb{R}^+$ и существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{q'(r)}{q(r)}=\rho_q\left(=\textit{порядку}\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log q(r)}{\log r}\text{ функции } q\right).$$

Из условия $q\in\mathbf{B}$ следует, что в представлении $q(r)=r^{\rho(r)}$, $r\in\mathbb{R}^+$, функция $\rho(r)$ *является уточненным порядком* в смысле Валирона (см. [6], стр. 69). Обратно, если в этом представлении ρ— уточненный порядок, то требуемый предел ρ_q существует и при $\rho_q>0$ функция q возрастает, начиная с некоторого места.

Нам понадобится следующее свойство функций $q\in\mathbf{B}$ (см. [6] стр. 73, теорему 2.2): для любого $s>0$ существует конечный и положительный предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{q(sr)}{q(r)}=s^{\rho_q}. \tag{1.0}$$

3) Угловой окрестностью мнимой оси назовем множества вида

$$\Omega_\alpha=\left\{z\in\mathbf{C}: z\neq 0, \left|\arg z\pm\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\alpha\right\},$$

где предполагается, что $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, так что $\Omega_\alpha\cap\mathbf{R}=\varnothing$.

Поскольку в общем случае скорость касания ω оказывает существенное влияние на рост характеристики аппроксимирующих мероморфных функций (ср. [4], § 1, пункт 4, стр. 19—20), то желая охватить наиболее интересный для нас случай равномерно-касательного приближения на $\mathbb{R}$ мероморфными функциями конечного порядка, мы ниже ограничиваемся скоростями касания вида $\omega(x) = \dfrac{1}{q(|x|)}$, $q \in \mathrm{B}$.

Теорема 1. *Для функций $f \in C^1$, $q \in \mathrm{B}$, $q \geqslant 1$ и чисел $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $p > 1$ существует мероморфная функция g с полюсами в некоторой угловой окрестности мнимой оси такая, что*

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{q(|x|)} \quad \text{для } x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

$$T(r, \varepsilon^{-1} g) < k \int_1^{pr} \int_1^{t} \left[\frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} +$$

$$+ k[1 + \log q(r)] \log^2 (pr), \quad r \geqslant 1, \tag{1.2}$$

где константа $k > 0$ зависит только от p и выбора функции q.

Замечание 1. а) Теорему 1 можно усилить требованием, что полюсы аппроксимирующей функции g лежат в точности на мнимой оси, однако для этого потребовалось бы заметно осложнить доказательство.

б) Асимптотическую точность оценки (1.2) можно показать, как и в случае приближений целыми функциями (см. [4], стр. 19—20) на примере функций $f \in C^1$ вида

$$f(x) = \frac{1}{q(|x|)} \cdot \cos \nu(|x|),$$

где $\nu(r) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow +\infty$. См. в связи с этим также теорему 3.

в) В оценке (1.2) второе слагаемое под интегралом можно оценить через первое. Учитывая, что

$$M(\tau, f) \leqslant |f(0)| + \lambda(\tau, f) \log(\tau + 1),$$

имеем оценку

$$\log \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \leqslant \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} + \log^+ \log(\tau + 1) + \frac{\log |f(0)|}{\varepsilon} + \log 2,$$

с учетом которой из (1.2) получим

$$T(r, \varepsilon^{-1} g) < k \int_1^{pr} \int_1^{t} \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} + k \left[1 + \frac{\log^+ |f(0)|}{\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \log(q(r) + \log r) \right] \log^2 r, \quad r \geqslant 3.$$

Второе слагаемое в правой части этой оценки имеет порядок $O(\log^3 r)$ при $r \to \infty$, так что рост аппроксимирующей мероморфной функции g определяется в основном величинами $\lambda(\tau, f)$ и $q(\tau)$.

Из теоремы 1 можно вывести соответствующий результат также для функций f из класса C. Необходимо лишь подходящим образом видоизменить определение величины $\varepsilon^{-1}\lambda(\tau, f)$ в (1.2), которая на этот раз будет зависеть не только от τ, ε и f, но и от функции q. Указанный вывод аналогичен выводу в работе [4] теоремы 4 из теоремы 1а.

Положим

$$\Lambda(\delta, \tau, f) = \sup(|x|+1)|f(x+y)-f(x-y)|,$$

где верхняя грань рассматривается при $|x| \leqslant \tau$ и $|y| < \frac{\delta}{2}$. Уравнение

$$\Lambda(\delta, \tau, f)+\delta = \frac{\varepsilon}{2q(\tau)}$$

относительно неизвестной δ имеет, очевидно, единственное решение $\delta = \delta(\tau, \varepsilon, f, q)$, положительное, непрерывное и монотонно убывающее по τ.

Следствие 1. Теорема 1 сохраняет силу для функций $f \in C$, если в (1.2) величину $\lambda(\tau, f)/\varepsilon$ заменить на $1/\delta(\tau, \varepsilon, f, q)$.

2. В этом пункте мы изложим результаты о наилучшем равномерном приближении (когда $q \equiv 1$) мероморфными функциями функций $f \in C$ в отличных от следствия 1 терминах (ср. [4], § 1, пункт 2).

Сформулируем сначала одну общую теорему. Напомним, что для функции $\varphi \in C$ *модуль непрерывности* φ на $\mathbb{R}$ — это величина

$$\omega(\delta, \varphi) = \sup_{|x-y|<\delta} |f(x)-f(y)|.$$

Теорема 2. *Пусть функция $\nu \in C^1(\mathbb{R}^+)$ строго возрастает к $+\infty$, $\nu(0)=0$, и пусть μ — нечетное продолжение на $\mathbb{R}$ обратной к ν функции $\nu^{-1} \in C$. Предположим, что для функции $f \in C$, $f \not\equiv \mathrm{const}$ композиция $f \circ \mu$ удовлетворяет условию*

$$\omega(\delta) \equiv \omega(\delta, f\circ\mu) \leqslant 1 \text{ при } \delta \in (0, \delta_0). \tag{1.3}$$

Тогда для любых чисел $\delta \in (0, \delta_0)$ и $p > 1$ существует мероморфная функция g с полюсами в некоторой угловой окрестности мнимой оси такая, что

$$|f(x)-g(x)| < 2\omega(\delta) \text{ для } x \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$$T\left(r, \frac{g}{\omega(\delta)}\right) < c\int_1^{pr}\int_1^{t}\left[\frac{\lambda(\tau, \nu)}{\delta} + \log^+\frac{\nu(\tau)}{\delta}\right]\frac{d\tau dt}{\tau\cdot t} +$$

$$+c\left[1+\frac{\log^+|f(0)|}{\omega(\delta)}\right]\log^2(pr), \quad r \geqslant 1, \tag{1.5}$$

где константа $c > 0$ зависит лишь от p.

Таким образом, если композиция $f\circ\mu$ равномерно непрерывна (т. е. $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$), то тогда рост аппроксимирующих мероморфных функций g почти полностью определяется в терминах функции ν.

Замечание 2. Кроме (1.5) имеет место также оценка

$$T\left(r, \frac{g}{\omega(\delta)}\right) < k\int_1^{pr}\int_1^t \left[\frac{\lambda(\tau, \nu)}{\delta} + \log^+\frac{M(\tau, f)}{\omega(\delta)}\right]\frac{d\tau dt}{\tau\cdot t} + k\log^2(pr),\ r \geqslant 1. \tag{1.5'}$$

Как и следствие 1 теорема 2 в принципе позволяет равномерно приблизить мероморфными функциями произвольную функцию $f \in C$ и оценить рост аппроксимирующих функций. Действительно, для $f \in C$ всегда найдется удовлетворяющая условиям теоремы 2 функция ν, для которой $f \circ \mu$ равномерно непрерывна. Однако в общем случае связь между функциями f и ν имеет неконструктивный характер. Тем не менее при некоторых ограничениях на функцию ν с помощью теоремы 2 можно получить конструктивное описание некоторых новых классов непрерывных на $\mathbf{R}$ функций. Чтобы сформулировать этот результат, нам нужны следующие

Определения (обозначения) 2. Пусть функция $\nu: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ не убывает и $\lim\limits_{r\to\infty} \nu(r) = +\infty$.

1) Мероморфную функцию g отнесем к классу $\mathfrak{M}^\nu$, если

$$T(r, g) = O(\nu(r)) \text{ при } r \to \infty$$

и полюсы g лежат в некоторой окрестности Ω_α $(\alpha = \alpha_g)$ мнимой оси.

2) Для функции $g \in \mathfrak{M}^\nu$ число

$$\sigma_g = \sigma_g(\nu) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r, g)}{\nu(r)}$$

назовем ν-степенью или ν-типом функции g.

3) Для числа $\sigma \geqslant 0$ обозначим через $\mathfrak{M}_\sigma^\nu$ класс мероморфных функций $g \in \mathfrak{M}^\nu$, у которых $\sigma_g(\nu) \leqslant \sigma$.

4) Мероморфную функцию g, ограниченную на $\mathbf{R}$, отнесем к классу M^ν (соответственно M_σ^ν), если $g \in \mathfrak{M}^\nu$ $(g \in \mathfrak{M}_\sigma^\nu)$.

5) Для функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ обозначим через $a_\sigma^\nu(f)$ наилучшее равномерное приближение f на $\mathbf{R}$ функциями класса $\mathfrak{M}_\sigma^\nu$:

$$a_\sigma^\nu(f) = \inf_{g\in\mathfrak{M}_\sigma^\nu} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Отметим, что введенные классы мероморфных функций содержат трансцендентные функции лишь при условии

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{\log r} = +\infty. \tag{1.6}$$

Классы M_σ^ν являются аналогом и обобщением известных классов B_σ целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на $\mathbf{R}$. Как известно, классы B_σ, введенные С. Н. Бернштейном [7], нашли важные применения в конструктивной теории функций на $\mathbf{R}$ и представляют также интерес как самостоятельный объект исследования. Классы M_σ^ν обобщают также введенные в [4] классы целых функций B_σ^ν, при этом в отличие от последних, содержащих непостоянные функции лишь при условии, когда порядок $\rho_\nu \geqslant 1$, рассмотрение классов M_σ^ν вполне разумно при выполнении условия (1.6). Однако ниже мы ограничиваемся изучением наилучших приближений на R функциями из классов M^ν и M_σ^ν при условии $\rho_\nu > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\nu \in \mathrm{B}$, $\nu(0) = 0$, $\rho_\nu > 0$ *и* μ — *нечетное продолжение на* R *обратной к* ν *функции* ν^{-1}. *Если функция* $f: \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ *такова, что композиция* $f \circ \mu$ *равномерно непрерывна на* R, *то тогда*

$$a_\sigma^\nu(f) \leqslant k_\nu\, \omega\left(\frac{1}{\sigma}, f \circ \mu\right) \text{ при } \sigma \geqslant \sigma_0,$$

где константа $k_\nu > 0$ *зависит лишь от выбора функции* ν. *Обратно, если функция* $f: \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ *ограничена и* $a_\sigma^\nu(f) \to 0$ *при* $\sigma \to \infty$, *то тогда композиция* $f \circ \mu$ *равномерно непрерывна на* R.

Непосредственно из теоремы 3 получим

Следствие 2. Пусть $\nu \in \mathrm{B}$, $\nu(0) = 0$, $\rho_\nu > 0$ и μ — нечетное продолжение на R обратной к ν функции ν^{-1}. Для того, чтобы ограниченная функция $f: \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ равномерно приближалась (на R) функциями из класса M^ν, необходимо и достаточно, чтобы композиция $f \circ \mu$ была равномерно непрерывна на R.

§ 2. Доказательство теорем 1—3

Пункт 1 этого параграфа посвящен доказательству теоремы 1. Из нее в начале пункта 2 выводится теорема 2, затем с помощью последней доказывается теорема 3. При этом используется некоторый грубый аналог неравенства С. Н. Бернштейна [7] на случай классом M^ν (см. лемму 5).

1. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется основная лемма работы [4]. Для ее применения нам нужны некоторые

Обозначения 3. 1) Для множества $E \subset \mathrm{C}$ обозначим через $H(E)$ совокупность функций, каждая из которых голоморфна в некоторой окрестности E. Для $f \in H(E)$ полагаем

$$M(r, f) = \sup |f, (E \cap \overline{D}_r).$$

Здесь и в дальнейшем D_r означает круг $|z| < r$.

2) Для $h > 0$ и $u \in \mathrm{R}$ положим

$$\sigma(u, h) = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathrm{C} : |\xi - u| \leqslant 3h,\ |\eta| \leqslant h\},$$

$$S_h = \{w \in \mathrm{C} : |\mathrm{Im}\, w| < h\}.$$

3) Для функций $F \in C^1$ и $\Phi \in H(\overline{S}_h)$ введем обозначения ($\zeta = \xi + i\eta$):

$$\mu_h(u, F) = \max_{\zeta \in \sigma(u, h)} |F'(\xi + \eta) - F'(\xi - \eta)|,$$

$$m_h(u, F) = \max_{\zeta \in \sigma(u, h)} |F(\xi + \eta)|,\quad m_h(u, \Phi) = \max_{\zeta \in \sigma(u, h)} |\Phi(\zeta)|,$$

$$a_h(u) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \mu_h(u, F) \cdot m_h(u, \Phi),$$

где $\varepsilon > 0$ — фиксированное число.

Лемма А ([4]). *Пусть* $F \in C^1$, $\Phi \in H(\bar{S}_h)$, $\varepsilon > 0$. *Существует функция* $\Psi \in H(S_h)$ *такая, что*

$$|F(u)\Phi(u) - \Psi(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } u \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

$$\log\frac{|\Psi(w)|}{\varepsilon} < c_1\left[a_h(u) + \log^+\frac{m_h(u, F)\, m_h(u, \Phi)}{\varepsilon}\right], \; w = u + iv \in S_h, \tag{2.2}$$

где $c_1 > 0$ *зависит только от* h.

Из леммы А можно вывести аналогичную аппроксимационную лемму, когда полосы заменяются областями вида

$$\Delta_\alpha^\sigma = (\mathbf{C} \setminus \Omega_\alpha) \cup S_h,$$

где Ω_α — угловая α-окрестность мнимой оси.

Лемма 1. *Для любого* $l > 1$ *можно указать числа*

$$0 < \sigma < l^{-1},\ 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2},\ c_2 > 0$$

такие, что: для произвольных функций $f \in C^1$ *и* $\varphi \in H(\Delta_\beta^1)$ *существует функция* $\psi \in H(\Delta_\alpha^\sigma)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$|f(x)\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } x \in \mathbf{R}, \tag{2.3}$$

$$\log^+\frac{M(r, \psi)}{\varepsilon} < c_2\left[1 + \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} M(\tau, \varphi) + \log^+\left(\frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \cdot M(\tau, \varphi)\right)\right], \tag{2.4}$$

где $\tau = lr + l - 1$.

Доказательство. Рассмотрим конформное и однолистное отображение G полосы $S_{\pi/2}$ на область Δ_0^1:

$$z = G(w) = \frac{1}{2}(e^w - e^{-w}).$$

Легко убедиться, что

$$|G'(w)| \leqslant |G(w)| + 1 \text{ для } w \in S_{\pi/2}, \tag{2.5}$$

$$G(|\mathrm{Re}\, w|) \leqslant |G(w)| \leqslant G(|\mathrm{Re}\, w|) + h \text{ для } w \in S_h,\ h \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.6}$$

Полагая $x + iy = G(u + iv)$, из соотношений

$$x = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})\cos v,\quad y = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})\sin v$$

выводим, что $G(S_h) \supset \Delta_\alpha^\sigma$ при $\sigma = \sin h$ и $\alpha = \frac{\pi}{2} - h$ для $h \leqslant \frac{\pi}{2}$. При этом граница угловой области Ω_α является асимптотой для границы области $G(S_h)$. Фигурирующие в лемме 1 числа σ и α мы получим, фиксируя в них

$$h = h(l) = \min\left\{ l^{-1},\ \frac{1}{8}\log l\right\}, \tag{2.7}$$

в число $\beta \in (0, \alpha)$ выберем так, что $G(S_h) \subset \Delta_\beta^1$ для $h = h(l)$.

Определим теперь функции $F \in C^1$ и $\Phi \in H(\overline{S_h})$ формулами

$$F(u) = f(G(u)),\ u \in \mathbf{R},\ \Phi(w) = \varphi(G(w)),\ w \in \overline{S}_h.$$

Применяя к функциям F и Φ лемму А, мы найдем функцию $\Psi \in H(S_h)$' удовлетворяющую неравенствам (2.1) и (2.2). Искомую функцию $\psi \in H(\Delta_\alpha^0)$ мы получим, полагая

$$\psi(z) = \Psi(G^{-1}(z)) \text{ для } z \in \Delta_\alpha^0 \subset G(S_h).$$

Оценка (2.3) теперь следует из (2.1), а из (2.2) имеем

$$\log\frac{|\psi(z)|}{\varepsilon} < c_1\left[a_h(u) + \log^+\frac{m_h(u, F)\, m_h(u, \Phi)}{\varepsilon}\right],$$

$$u = \operatorname{Re} G^{-1}(z),\ z \in \Delta_\alpha^0. \tag{2.8}$$

Оценим фигурирующие здесь величины непосредственно в терминах функций f и φ. Учитывая принятые в этом пункте обозначения, а также оценку (2.5), очевидно имеем

$$\mu_h(u, F) \leqslant 2\max(|G(x)| + 1)\,|f'(x)|,$$

где $x \in \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $|x| \leqslant |u| + 4h$. Учитывая, что $G(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, отсюда получим

$$\mu_h(u, F) \leqslant 2\sup\{(|t| + 1)\,|f'(t)| : t \in \mathbf{R},\ |G^{-1}(t)| \leqslant |u| + 4h\}.$$

Аналогично имеем

$$m_h(u, F) \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in \mathbf{R},\ |G^{-1}(t)| \leqslant |u| + 4h\},$$

$$m_h(u, \Phi) \leqslant \sup\{|\varphi(\zeta)| : \zeta \in G(S_h),\ |G^{-1}(\zeta)| \leqslant |u| + 4h\}.$$

Если в этих оценках подставить $u = \operatorname{Re} G^{-1}(z)$, где $z \in \Delta_\alpha^\beta$, то во всех трех случаях возникает вопрос об оценке размеров множества точек $\in G(S_h)$, удовлетворяющих условию

$$|G^{-1}(\zeta)| \leqslant |\operatorname{Re} G^{-1}(z)| + 4h. \tag{2.9}$$

Для ответа на этот вопрос подставим в (2.6) последовательно $G(w) = z$ и $G(w) = \zeta$. Мы получим оценки

$$G(|\operatorname{Re} G^{-1}(z)|) \leqslant |z|,\ |\zeta| < G(|\operatorname{Re} G^{-1}(\zeta)|) + h.$$

В силу монотонности функций G и G^{-1} на $\mathbf{R}$, из первой оценки следует, что $|\operatorname{Re} G^{-1}(z)| \leqslant G^{-1}(|z|)$, и тогда с учетом (2.9) из второй оценки следует, что

$$|\zeta| \leqslant G(G^{-1}(|z|) + 4h) + h.$$

Отсюда с учетом (2.7) и неравенства

$$G(a + b) \leqslant G(a)e^b + G(b),\ a, b > 0$$

окончательно заключаем, что

$$|\zeta| \leqslant e^{4h}|z| + G(4h) + h < \tau = l|z| + l - 1.$$

Теперь из установленных выше оценок для величин $\mu_h(u, F)$, $m_h(u, F)$ и $m_h(u, \Phi)$ следует, что

$$\mu_h(u, F) \leqslant 2\lambda(\tau, f),\ m_h(u, F) \leqslant M(\tau, f),\ m_h(u, \Phi) \leqslant M(\tau, \varphi),$$

и оценка (2.4) вытекает из (2.8), если учесть также определение величины $a_h(u)$. Лемма 1 доказана.

Для доказательства теоремы нам понадобится также теорема 1 с замечанием 2 из работы авторов [3], являющейся усилением основного результата работы [2]. Мы приведем удобную для нас частную формулировку этого результата.

Теорема А ([3]). *Для функции* $\psi \in H(\Delta_\delta^h)$ *и чисел* $\varepsilon \in (0, 1]$ $l > 1$, $\delta < \gamma < \min\left\{\delta + 1, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ *существует мероморфная функция* G *такая что*

$$|\psi(z) - G(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } z \in \Delta_\gamma^{h \cdot l^{-1}}, \tag{2.10}$$

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k_1 \int_h^{lr}\int_h^{\eta} \frac{\log^+ M(\xi, \psi)}{\varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{\xi \cdot \eta} +$$

$$+ k_1 \log^2(r + 1) \text{ при } r \geqslant l(\gamma - \delta), \tag{2.11}$$

где константа $k_1 > 0$ *зависит только от* δ, h, γ *и* l.

Лемма 2. *Для функции* $q \in \mathrm{B}$ *и числа* $\beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *существует такая мероморфная функция* φ, *что*

$$q(|z|) < |\varphi(z)| < c_3 q(|z|) \text{ для } z \in \Delta_\beta^1, \tag{2.12}$$

$$T(r, \varphi) < c_4[1 + \log q(r)] \log^2(r + 1),\ r \geqslant 1, \tag{2.13}$$

где константы c_3 *и* c_4 *зависят лишь от* β *и выбора функции* q.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\beta \leqslant 1$. По теореме 5.1 монографии [6], для функции $q \in \mathrm{B}$ и числа β можно найти такую функцию $\Psi \in H(\Delta_{3/2}^2)$, что

$$2q(|z|) < |\psi(z)| < c_5 q(|z|) \text{ для } z \in \Delta_{3/2}^2. \tag{2.14}$$

Применим к функции ψ теорему А при $\delta = \beta/2$, $h = 2$, $\varepsilon = 1$ и $l = 2$, $\gamma = \beta$, так что $l(\gamma - \delta) = \beta \leqslant 1$, и положим $\varphi = G$. Оценка (2.12) теперь следует из (2.10) и (2.14) при $c_3 = c_5 + 1$, а оценка (2.13) — из (2.11), если учесть, что согласно (2.14) и (1.0)

$$M(\tau, \varphi) < c_3 q(\tau) \leqslant c_3 q(2r) \leqslant c_6 q(r),\ \tau \leqslant 2r.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Выберем число $l = l(p) > 1$ так, что

$$p > l^2 + l - 1$$

Сопоставим числу l числа σ, β, α и c_2 в соответствии с леммой 1, и пусть φ — мероморфная функция, построенная в лемме 2 для $q \in \mathrm{B}$ и числа β. Применение к произведению $f \cdot \varphi$ леммы 1 гарантирует наличие функции $\psi \in H(\Delta_\sigma^\circ)$, удовлетворяющей (2.3), рост которой, согласно (2.4) и (2.12), ограничивается неравенством

$$\log^+ \frac{M(\xi, \psi)}{\varepsilon} < c_7 \left[1 + \frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)\, q(\tau)}{\varepsilon} \right], \tag{2.15}$$

где $\tau = l\xi + l - 1$.

Применим теперь к функции ψ теорему A, полагая там $h = \sigma$ $\delta = \alpha$ и $l(\gamma - \alpha) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < 1$. Аппроксимирующая мероморфная функция будет удовлетворять, согласно (2.10) и (2.3), неравенству

$$|f(x)\varphi(x) - G(x)| < \varepsilon \text{ для } x \in \mathbf{R}. \tag{2.16}$$

Рост функции G оценивается согласно (2.11), где, в свою очередь, рост функции ψ ограничивается неравенством (2.15). Обозначим через $A(\tau)$ выражение в квадратных скобках этого неравенства. Из (2.11), осуществив в двойном интеграле замену переменных

$$\tau = l\xi + l - 1, \quad t = l\eta + l - 1,$$

где

$$l\sigma < \tau \leqslant t \leqslant l^2 r + l - 1 < pr \text{ при } r \geqslant 1,$$

и учитывая, что $(\xi\eta)^{-1}\, d\xi d\eta < k_2 (\tau t)^{-1}\, d\tau dt$, приходим к оценке

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k_3 \int\limits_{l\sigma}^{pr} \int\limits_{l\sigma}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} \text{ при } r \geqslant 1.$$

Докажем, что в этой оценке нижние пределы $l\sigma$ в двойном интеграле можно заменить на 1. В самом деле, с учетом монотонности функции $A(\tau)$ имеем

$$\int\limits_{l\sigma}^{pr} \int\limits_{l\sigma}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} < k_4 A(1) \log(pr) + \int\limits_{1}^{pr} \int\limits_{1}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} <$$

$$< k_5 \int\limits_{1}^{pr} \int\limits_{1}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} \cdot$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$T(r, \varepsilon^{-1} G) < k_6 \int\limits_{1}^{pr} \int\limits_{1}^{t} A(\tau) \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t} < k_7 [1 + \log q(r)] \log^2 (pr) +$$

$$+ \int\limits_{1}^{pr} \int\limits_{1}^{t} \left[\frac{\lambda(\tau, f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau \cdot t}, \quad r \geqslant 1. \tag{2.17}$$

Искомую мероморфную функцию g мы получим, полагая $g = G/\varphi$. Из (2.10) и (2.12) следует, что возможные полюсы функции g должны лежать в Ω_γ. Неравенство (1.1) следует из (2.16), если учесть левую часть оценки (2.12). Из этой же оценки следует, что $|\varphi(0)| > |q(0)| > 1$, поэтому

$$T(r, \varepsilon^{-1}g) \leqslant T(r, \varepsilon^{-1}G) + T\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) =$$

$$= T(r, \varepsilon^{-1}G) + T(r, \varphi) + \log\frac{1}{|\varphi(0)|} < T(r, \varepsilon^{-1}G) + T(r, \varphi).$$

Отсюда с учетом оценок (2.17) и (2.13) приходим к неравенству (1.2). Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2 (ср. [4], § 1, пункт 2). Определим функцию $\varphi \in C^1$ формулой

$$\varphi(y) = \frac{1}{\delta}\int\limits_y^{y+\delta}(f\circ\mu)(t)\,dt,\quad y \in \mathbf{R}.$$

Очевидно, что для $y \in \mathbf{R}$

$$|(f\circ\mu)(y) - \varphi(y)| \leqslant \omega(\delta),\quad |\varphi'(y)| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

Отсюда, считая функцию ν продолженной на $\mathbf{R}$ нечетным образом, для функции $F = \varphi_0\nu \in C^1$ получим оценки

$$|f(x) - F(x)| \leqslant \omega(\delta),\quad x \in \mathbf{R}, \tag{2.18}$$

$$|F'(x)| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}\cdot\nu'(x),\quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что

$$\frac{\lambda(\tau, F)}{\omega(\delta)} \leqslant \frac{\lambda(\tau, \nu)}{\delta}\quad \text{для } \tau \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Кроме того, интегрируя (2.19), получим оценку

$$|F(x) - F(0)| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}\cdot\nu(|x|),\quad x \in \mathbf{R}.$$

Отсюда и из (2.18) выводим, что

$$M(\tau, F) \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta}\cdot\nu(\tau) + \omega(\delta) + |f(0)|,\quad \tau \geqslant 0,$$

$$M(\tau, F) \leqslant M(\tau, f) + \omega(\delta),\quad \tau \geqslant 0.$$

Отсюда приходим к оценкам

$$\log^+\frac{M(\tau, F)}{\omega(\delta)} \leqslant \log^+\frac{\nu(\tau)}{\delta} + \log^+\frac{|f(0)|}{\delta} + \log 3,\quad \tau > 0, \tag{2.21}$$

$$\log^+\frac{M(\tau, F)}{\omega(\delta)} \leqslant \log^+\frac{M(\tau, f)}{\delta} + \log 2,\quad \tau > 0. \tag{2.21'}$$

Применим теперь к функции F теорему 1, когда $q \equiv 1$ и $\varepsilon = \omega(\delta)$ при $\delta \in (0, \delta_0)$ (см. условие (1.3)). Полученная мероморфная функция удовлетворяет всем условиям теоремы 2: неравенство (1.4) следует из (1.1) и (2.18), а оценка (1.5)—из оценки (1.2) с учетом (2.20) и (2.21). Оценка (1.5′) следует из (1.2) с учетом (2.20) и (2.21′).

Доказательство 1-й части теоремы 3. Оценку (1.7) можно легко вывести из теоремы 2. В самом деле, считая, что $f \not\equiv \mathrm{const}$, фиксируем число $\delta_0 \in (0, 1]$ так, что

$$|f(0)|\,\delta^2 \leqslant \omega(\delta) < 1 \quad \text{для } \delta \in (0, \delta_0]. \tag{2.22}$$

Поскольку все условия теоремы 2 соблюдены, применим к функции f эту теорему, фиксируя $p = 2$, и оценим ν-тип аппроксимирующей функции g.

С этой целью заметим сначала, что из условий $\nu \in \mathbf{B}$ и $\rho_\nu > 0$ следует существование таких констант $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, зависящих лишь от выбора функции ν, что

$$\frac{\lambda(\tau, \nu)}{\lambda_1} < \nu(\tau) < \lambda_2 (1 + \tau\lambda'(\tau)) \text{ при } \tau \geqslant 1. \tag{2.23}$$

Из (1.5) с учетом (2.23) и (2.22) получим

$$T(r, g) \leqslant T\left(r, \frac{g}{\omega(\delta)}\right) < c\frac{(\lambda_1 + 1)}{\delta}\int_1^{2r} [\log t + \nu(t)]\frac{dt}{t} +$$

$$+ \frac{3c}{\delta}\log^2(2r) < \frac{\lambda_3}{\delta}\,[\nu(2r) + \log^2(2r)] \text{ для } r \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом (1.0) и условия $\rho_\nu > 0$ окончательно получим

$$T(r, g) < \frac{\lambda_4}{\delta}\cdot\nu(r) \text{ для } r \geqslant 1,$$

где $\lambda_4 > 0$ зависит только от выбора ν. Полагая $\sigma_0 = \lambda_4/\delta_0$ и для произвольного $\sigma \geqslant \sigma_0$ определяя δ из соотношения $\delta = \lambda_4/\sigma$, получаем, что $g \in \mathfrak{M}_\sigma^\nu$. Поэтому из (1.4) следует, что

$$a_\sigma^\nu(f) < 2\omega\left(\frac{\lambda_4}{\delta}\right) < 2(\lambda_4 + 1)\,\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right) \text{ для } \sigma \geqslant \sigma_0.$$

Оценка (1.7) доказана.

Доказательство 2-й части теоремы 3. Оно основано на трех леммах, возможно представляющих самостоятельный интерес. Для дальнейшего изложения положим для $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $\theta \in R$

$$\Delta_\alpha(\theta) = \left\{ z \in \mathbf{C} : |\arg z - \theta| < \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Лемма 3. *Пусть мероморфная (в* C*) функция g не имеет полюсов в $\Delta_\alpha(\theta)$. Тогда для произвольных чисел $p > 1$ и $\beta \in (0, \alpha)$ имеем оценку*

$$\log|g(z)| \leqslant c\,T(p|z|, g) \text{ для } z \in \Delta_{\alpha-\beta}(\theta), \tag{2,24}$$

где константа $c > 0$ зависит лишь от β и p, Доказательство. Ввиду нерерывности по z участвующих в (2.17) величин, достаточно установить эту оценку для положительных значений параметра $r=|z|$ таких, что на окружности $|\zeta|=\rho$ при $\rho=\sqrt{pr}$ функция g не имеет полюсов.

Рассмотрим голоморфную на $\bar{D}_\rho$ функцию $\varphi=g\cdot B$, где

$$B(z)=\prod_{k=1}^{m}\frac{\rho(z-b_k)}{\rho^2-\bar{b}_k z},$$

если функция g имеет в D_ρ полюсы $b_1, b_2, \cdots, b_m$ (перечисленные с учетом их кратности) и $B(z)\equiv 1$ — в противном случае. Поскольку $T(\rho, B)=0$, то имеем, что $T(\rho, \varphi)\leqslant T(\rho, g)$ Отсюда с учетом известной оценки голоморфной функции через ее характеристику (см. [8] стр. 222) получим

$$\log|\varphi(z)|\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}\cdot T(\rho, g)=c_1(p)\,T(\rho, g). \tag{2.25}$$

Для оценки функции $\log|B|^{-1}$ заметим, что если $z\in\Delta_{\alpha-\beta}(\theta)$, то поскольку $(b_k)_1^m\subset\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha(\theta)$, очевидно существует такая зависящая лишь от β константа $c_2=c_2(\beta)>0$, что $|z-b_k|\geqslant c_2 r$. Поэтому

$$\log\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_k z}{\rho(z-b_k)}\right|\leqslant\log\frac{2\sqrt{p}}{c_2}=c_3.$$

Полагая также $c_4=(\log\sqrt{p})^{-1}$, имеем

$$\log|B(z)|^{-1}\leqslant c_3 m=c_3 n(\rho, g)\leqslant(c_3c_4)\,N(pr, g)\leqslant(c_3c_4)\,T(pr, g). \tag{2.26}$$

Оценка (2.24) следует теперь из (2.25) и (2.26) с константой $c=c_1+$ $+c_3c_4$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $g\in H(D_R)$, $|g(\zeta)|<M$ *для* $\zeta\in D_R$ *и* $|g(t)|\leqslant 1$ *при* $-R<t<R$. *Тогда*

$$|g'(0)|<\frac{6}{R}(1+\log^+ M). \tag{2.27}$$

Доказательство. По теореме о двух константах имеем оценку

$$\log M(\rho, g)\leqslant(\log^+ M)\sup_{|\zeta|=\rho}\omega_R(\zeta),\quad \rho<R,$$

где ω_R — гармоническая мера полуокружности $\partial D_R\cap\Delta_\pi(\pi/2)$ относительно полукруга $D_R\cap\Delta_\pi(\pi/2)$. Указанный супремум, очевидно, достигается в точке $\zeta=i\rho$, поэтому

$$\sup_{|\zeta|=\rho}\omega_R(\zeta)=\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{\rho}{\sqrt{R^2+\rho^2}}\leqslant\frac{2\rho}{R}.$$

По неравенству Коши

$$|g'(0)|\leqslant\rho^{-1}M(\rho, g)\leqslant\rho^{-1}\exp\left(\frac{2\rho}{R}\log^+ M\right).$$

Полагая здесь $\rho=2^{-1}R(1+\log^+ M)^{-1}$, получим (2.27). Лемма доказана.

Леммы 3 и 4 позволяют доказать следующий грубый аналог известного неравенства С. Н. Бернштейна [7] для функций $M^{\cdot}$.

Лемма 5. *Пусть* $g \in M^{\cdot}$, $\nu \in B$, $\rho_{\nu} > 0$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} \frac{|g'(x)|}{\nu'(|x|)} < +\infty, \tag{2.28}$$

Доказательство. Так как $g \in M^{\cdot}$, то g не имеет полюсов в некоторой области вида Δ^{*}_{α}. Применим к функции g и к углам $\Delta_{2\beta}(0)$ и $\Delta_{2\beta}(\pi)$ лемму 3 при $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ и $p = 2$. Из оценки (2.24) с учетом того, что $g \in M^{\cdot}$, получим

$$\log |g(z)| < c_1 \nu(|z|) \text{ для } z \in \Delta_{\beta}(0) \cup \Delta_{\beta}(\pi), \tag{29}$$

где c_1 не зависит от z. Можно также считать, что $\sup |g| (R) = 1$.

Выберем произвольную точку $x \in R$, $x \neq 0$ и рассмотрим голоморфную функцию $g_x : g_x(\zeta) = g(x + \zeta)$ для $\zeta \in D_R$, где $R = |x| \sin \beta$. Из (2.29) следует, что

$$|g_x(\zeta)| < M = \exp (c_1 \nu (2|x|)) \text{ для } \zeta \in D_R.$$

Применяя к g_x лемму 4, из оценки (2.27), с учетом (1.0) и условия $\rho_{\nu} > 0$, получим

$$|g'(x)| < \frac{6}{|x| \sin \beta} (1 + c_1 \nu (2|x|)) < c_2 \frac{\nu(|x|)}{|x|} < c_3 \nu'(|x|), \ |x| \geqslant r_0,$$

что доказывает (2.28) и лемму.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 4. Пусть $\in C$ ограничена на R и $a^{*}_{\sigma}(f) \to 0$ при $\sigma \to \infty$. Тогда существует последовательность функций $\{g_n\}_1^{\infty}$, $g_n \in M^{\cdot}$ такая, что $g_n \to f$ равномерно на R. Очевидно тогда $g_n \circ \mu \to f \circ \mu$ также равномерно на R. Для доказательства условия $\omega(\delta, f \circ \mu) \to 0$ при $\delta \to 0$ достаточно теперь убедиться, что $\omega(\delta, g \circ \mu) \to 0$ при $\delta \to 0$ для произвольной функции $g \in M^{\cdot}$. Последнее утверждение гарантируется ограниченностью производной композиции $g \circ \mu$ вне некоторого интервала, что, в свою очередь, следует из оценки (2.28) леммы 5:

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} |(g \circ \mu)'(x)| = \overline{\lim_{|x| \to \infty}} |\mu'(x) g'(\mu(x))| = \overline{\lim_{|x| \to \infty}} \frac{|g'(\mu(x))|}{\nu'(\mu(x))} < +\infty.$$

Теорема 3 доказана.

Институт математики АН Армении Поступила 22. IX. 1989

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ. Լավագույն մոտավորությունները մերոմորֆ ֆունկցիաներով իրական առանցքի վրա *(ամփոփում)*

Սույն աշխատանքում ստացված են արդյունքներ իրական առանցքի վրա կամայական անընդհատ կամ անընդհատորեն դիֆերենցելի ֆունկցիաների մերոմորֆ ֆունկցիաներով լավագույն և շոշափումային մոտավորության մասին, վերջիններիս աճի ճշգրիտ գնահատականներով: Ներմուծվում են իրական առանցքի վրա անընդհատ ֆունկցիաների այնպիսի դասեր, որոնք լիովին նկարագրվում են դրական կարգի մերոմորֆ ֆունկցիաների լավագույն մոտավորությունների տերմիններով:

R. A. AVETISYAN, N. U. ARAKELYAN. *Best approximations by meromorphic functions on real axis* (summary)

This paper establishes some results on uniform and tangential approximation of continuous or continuously differentiable on real axis functions, by meromorphic functions with exact estimates of their growth. Classes of continuous functions on real axis are introduced, which are completely described in terms of the best approximations by meromorphic functions of the given positive order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. У. Аракелян, Р. А. Аветисян.* О наилучшем равномерном приближении мероморфными функциями на вещественной оси, ДАН СССР, 1981, 257, № 6, 1289—1293.
2. *А. А. Тер-Исраелян.* Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста, Изв. АН АрмССР, сер. матем., 1971, 6, № 1, 67—80.
3. *Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян.* Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях, Изв. АН АрмССР, «Математика», XXIII № 6, 1988, 547—556.
4. *Н. У. Аракелян.* О равномерном и касательном приближени на вещественной оси целыми функциями с оценкой их роста, Мат. сб., 1980, вып. 113 (155), № 1 (9), 3—40.
5. *T. Carleman.* Sur un theoreme de Weierstrass, Arkiv Math., Astr. Och. Fisik, 20 № 4, 1927, 1—5.
6. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., Наука, 1970.
7. *С. Н. Бернштейн.* Об одном свойстве целых функций, Собрание сочинений, изд. АН СССР, т. 1, 1952, 261—270.
8. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941.