ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 6, 1990 Математика

УДК 517.547

М. М. ДЖРБАШЯН, А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ОБОБЩЕННОЙ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 0. Введение

0.1. В двух работах 40-х годов [1, 2] одним из авторов данной статьи впервые были введены и изучены классы голоморфных в единичном круге $D=\{z:|z|<1\}$ функций f, подчиненных условию вида

$$\iint\limits_D |f(\zeta)|^p\cdot(1-|\zeta|^2)^\alpha d\xi d\eta<+\infty\ (\zeta=\xi+i\eta), \tag{0.1}$$

где $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1$. В работе [2] для этих классов было использовано довольно естественное обозначение $H^p(\alpha)$*, навеянное тем фактом, что при $1\leqslant p<+\infty$ классы $H^p(\alpha)$ $(\alpha>-1)$ являются существенными расширениями известных пространств Харди H^p в круге. Как оказалось, классы $H^p(\alpha)$ обладают рядом важных свойств, среди которых прежде всего следует отметить их интегральные представления—аналоги интегральной формулы Коши для пространств H^p $(1\leqslant p<+\infty)$. Более точно, в заметке [1] была анонсирована, а в работе [2] приведена с полным доказательством следующая

Теорема I. *Любая функция $f(z)\in H^p(\alpha)$ $(1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1)$ допускает интегральное представление*

$$f(z)=\frac{1+\alpha}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)\cdot(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\cdot\bar{\zeta})^{2+\alpha}}\,d\xi\,d\eta,\ z\in D. \tag{0.2}$$

Этот важный результат нашел существенные применения как уже в самой работе [2], так и в работах других авторов при решении ряда тонких задач комплексного анализа (см. обзорные работы [3, 4] и монографию [5]).

0.2. В дальнейшем в работах ряда авторов были установлены аналоги интегрального представления (0.2) для функций многих комплексных переменных. Прежде, чем ознакомить с соответствующими результатами, введем некоторые обозначения.

При $m\geqslant1$, $n\geqslant1$ обозначим через $M_{m,n}$ множество всех комплексных матриц из m строк и n столбцов и заметим, что $M_{1,n}$ суть обыч-

* Подробные замечания относительно искажения истории вопроса о введении классов $H^p(\alpha)$ приведены, в частности, в обзорных работах [3] и [4], а также в монографии [5].

ное n-мерное комплексное координатное пространство $\mathbf{C}^n$. Обобщенным единичным кругом (в пространстве $M_{m,n}$) называется область $R_{m,n}$, состоящая из тех матриц $\zeta\in M_{m,n}$, для которых матрица $I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*$ положительно определена. Здесь $I^{(m)}\in M_{m,m}$ суть квадратная единичная матрица порядка m, а $\zeta^*\in M_{n,m}$ обозначает эрмитово сопряженную к ζ матрицу. Нетрудно проверить, что $R_{1,n}$ совпадает с единичным шаром $\mathbf{B}_n=\{\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbf{C}^n:|\zeta|^2=\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2<1\}$ в пространстве $\mathbf{C}^n=M_{1,n}$. В частности, $R_{1,1}$ представляет собой единичный круг $D\subset\mathbf{C}$. Далее, при $m, n\geqslant 1$ через $\mu_{m,n}$ обозначим лебегову меру в пространстве $M_{m,n}\cong\mathbf{C}^{mn}$. Кроме того, для произвольного комплексного числа β такого, что $\operatorname{Re}\beta>-1$, положим

$$c_{m,n}(\beta)=\frac{\prod\limits_{l=1}^{m+n}\Gamma(\beta+l)}{\prod\limits_{k=1}^{m}\Gamma(\beta+k)\cdot\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\beta+j)}\cdot\frac{1}{\pi^{mn}}. \tag{0.3}$$

Справедлива следующая

Теорема II. *Пусть* $m, n\geqslant 1$ *и* $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1$. *Тогда каждая голоморфная в области* $R_{m,n}$ *функция* f, *подчиненная условию*

$$\int\limits_{R_{m,n}}|f(\zeta)|^p\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\alpha\,d\mu_{m,n}(\zeta)<+\infty, \tag{0.4}$$

допускает интегральное представление вида

$$f(Z)=c_{m,n}(\beta)\cdot\int\limits_{R_{m,n}}\frac{f(\zeta)\cdot[\det(I^{(m)}-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta\,d\mu_{m,n}(\zeta)}{[\det(I^{(m)}-Z\cdot\zeta^*)]^{m+n+\beta}},\quad Z\in R_{m,n}, \tag{0.5}$$

где комплексное число β *выбрано следующим образом:*

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\beta>(\alpha+1)/p-1, && 1<p<+\infty,\\ &\operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha, && p=1.\end{aligned} \tag{0.6}$$

При $m=n=1$, то есть для единичного круга $R_{1,1}=D\subset\mathbf{C}$, данная теорема была установлена в работе [2], когда $\beta=\alpha$. Однако развитый в указанной работе метод позволял установить этот же результат и при любом β, удовлетворяющем условию (0.6). В общем случае $m, n\geqslant 1$, однако для $p=2$ и $\alpha=\beta=0$ теорема II впервые была доказана в монографии Хуа Ло-кена [6]. В работе Форелли и Рудина [7] этот результат был установлен при $m=1$, $n\geqslant 1$, то есть для единичного шара $\mathbf{B}_n\subset\mathbf{C}^n$, в предположении $1\leqslant p<+\infty$ и $\alpha=0$. В обзорной работе [4] одного из авторов на основе методов, развитых в исследованиях [1, 2], теорема II была доказана опять же при $m=1$, $n>1$, но уже в предположении $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>-1$, то есть без ограничительного условия $\alpha=0$. Далее, в общем случае $m,n\geqslant 1$, но при

$1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha=0$ и вещественном $\beta > 0$ интегральное представление (0.5) вытекает из работы Штолля [8], в которой рассматривались произвольные ограниченные симметрические области, каковой, в частности, является область $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$. Наконец, в сформулированном выше наиболее общем виде теорема II анонсирована в работе [9], где приводится также краткая схема доказательства. Подробное доказательство этого результата изложено в работе [10].

0.3. Наряду с указанными работами велись исследования с целью получения аналогов интегрального представления (0.2) для определенных классов голоморфных функций в неограниченных областях. В этой связи в первую очередь следует отметить известную работу С. Г. Гиндикина [11], посвященную анализу в областях Зигеля. Эти области определяются следующим образом:

$$D = \{ \eta = (z, u) \in \mathbf{C}^{n+m},\ z = x + iy \in \mathbf{C}^n,\ u \in \mathbf{C}^m : \\ y - F(u, u) \in V \}, \tag{0.7}$$

где $V \subset \mathbf{R}^n$ суть острый открытый выпуклый конус, а отображение $F: \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ обладает некоторыми естественными свойствами, в силу которых F обычно называют V-эрмитовой формой, заданной на пространстве $\mathbf{C}^m$. Отметим по ходу, что при $m=0$, когда форма F попросту отсутствует, D является трубчатой областью в $\mathbf{C}^n$ с основанием $V \subset \mathbf{R}^n$. В указанной работе С. Г. Гиндикина [11] наряду с многочисленными глубокими результатами были построены воспроизводящие ядра для голоморфных в областях Зигеля функций из пространств L^2, но без веса. Причем методы построения проходили и в случае L^p-пространств, но только при $1 \leqslant p < 2$, поскольку доказательство существенно опиралось на технику преобразований Фурье-Планшереля.

В работе Койфмана и Рохберга [12] было приведено почти без доказательства утверждение о том, что на основе методов работы С. Г. Гиндикина [11] можно построить воспроизводящие ядра для некоторых весовых L^2-пространств функций, голоморфных в специальных областях Зигеля.

Но так или иначе, вопрос о существовании интегральных представлений для голоморфных в неограниченных областях функций из весовых L^p —пространств, где уже $1 \leqslant p < +\infty$, оставался открытым, т. е. оставалась нерешенной задача получения наиболее полного аналога интегрального представления (0.2) для неограниченных областей (пусть даже самых простейших).

Однако сравнительно недавно М. М. Джрбашян и А. Э. Джрбашян [13], основываясь на интегральном представлении (0.2), тонким предельным переходом впервые строго доказали следующую теорему.

Теорема III. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$, *тогда каждая голоморфная в верхней полуплоскости* $\Pi_+ = \{ \omega \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} \omega > 0 \}$ *функция* $f(\omega)$, $\omega \in \Pi_+$, *удовлетворяющая условию вида*

$$\int\limits_{\Pi^+} |f(\omega)|^p \cdot (\operatorname{Im} \omega)^\alpha \, du dv < +\infty \quad (\omega = u + iv), \tag{0.8}$$

допускает интегральное представление

$$f(w) = \frac{2^{\alpha}\cdot(\alpha+1)}{\pi}\cdot\int\limits_{\Pi_+}\frac{f(\omega)\cdot(\operatorname{Im}\omega)^{\alpha}\,du\,dv}{[\,i(\bar{\omega}-w)]^{2+\alpha}},\quad w\in\Pi_+. \tag{0.9}$$

Наконец, в нашей недавней работе [14] получен многомерный аналог теоремы III для области Зигеля вида

$$\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)\in \mathbf{C}^n : \operatorname{Im}\omega_1 > \sum_{j=2}^{n}|\omega_j|^2\}\ (n\geqslant 1), \tag{0.10}$$

совпадающей при $n=1$ с верхней полуплоскостью $\Pi_+\subset\mathbf{C}$. Более точно, на основе уже имеющегося соответствующего интегрального представления в единичном шаре $\mathbf{B}_n\subset\mathbf{C}^n$ (теорема II при $m=1$, $n\geqslant 1$; за доказательством отсылаем к работам [3, 4]) методами работы [13] была установлена следующая

Теорема IV. *Пусть* $1<p<+\infty$, $\alpha>-1$ *и комплексное число* β *выбрано так:*

$$\operatorname{Re}\beta > (1+\alpha)/p-1,\ 1<p<+\infty, \qquad \operatorname{Re}\beta\geqslant\alpha,\ p=1. \tag{0.11}$$

Тогда каждая голоморфная в области Ω_n *функция* $f(\omega)$, $\omega\in\Omega_n$, *подчиненная условию вида*

$$\int\limits_{\Omega_n}|f(\omega)|^p\cdot[\operatorname{Im}\omega_1-\sum_{j=2}^{n}|\omega_j|^2]^{\alpha}\,d\mu_{1,n}(\omega)<+\infty, \tag{0.12}$$

допускает интегральное представление

$$f(w)=2^{n-1+\beta}\cdot c_{1,n}(\beta)\cdot\int\limits_{\Omega_n}\frac{f(\omega)\cdot\left[\operatorname{Im}\omega_1-\sum\limits_{j=2}^{n}|\omega_j|^2\right]^{\beta}d\mu_{1,n}(\omega)}{\left[i(\bar{\omega}_1-w_1)-2\cdot\sum\limits_{j=2}^{n}w_j\cdot\bar{\omega}_j\right]^{1+n+\beta}},\quad w\in\Omega_n. \tag{0.13}$$

0.4. В настоящей работе мы, основываясь на интегральном представлении (0.5) и используя примененный в работах [13], [14] метод предельного перехода, обобщаем теорему III на случай областей, являющихся совершенно иными по сравнению с Ω_n многомерными аналогами верхней полуплоскости $\Pi_+\subset\mathbf{C}$. Доказывается также, что интегральные операторы, естественным образом возникающие из установленных представлений, при определенных условиях являются ограниченными проекторами в соответствующих весовых пространствах функций.

В § 1 работы приводятся предварительные сведения, значительно облегчающие последующее чтение статьи. В частности, излагаются некоторые многократно используемые в дальнейшем свойства лебеговой меры $\mu_{n,n}$ на пространстве всех $n\times n$ — матриц $M_{n,n}$ $(n\geqslant 1)$ и лебеговой меры μ_n на пространстве всех эрмитовых $n\times n$ — матриц $\mathbf{H}_n$.

Далее, § 2 в основном посвящен выяснению сходимости и вычислению некоторых важных интегралов; особое значение имеет исследование следующего интеграла:

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det\,(\mathrm{Im}\,\omega)]^{\alpha}}{|\det(\omega^{*}-w)|^{\gamma}}\, d\mu_{n,n}(\omega),\ \ \alpha,\ \gamma\in\mathbf{R}, \tag{0.14}$$

где область π_n состоит из тех $\omega\in M_{n,n}$, для которых матрица $\mathrm{Im}\,\omega = =(\omega-\omega^{*})/2i$ положительно определена (предложения 2.3 и 2.4).

В § 3 при $n\geqslant 1$ и $0<p<+\infty$, $-\infty<\alpha<+\infty$ изучаются весовые пространства

$$L^p_\alpha(\pi_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ f: \|f\|^p_{p,\alpha} \equiv \int\limits_{\pi_n} |f(\omega)|^p\cdot[\det(\mathrm{Im}\omega)]^{\alpha}\, d\mu_{n,n}(\omega) < +\infty \right\} \tag{0.15}$$

и их подпространства $H^p_\alpha(\pi_n)$ голоморфных функций. Устанавливается следующий основной результат (теорема 3.1):

Если $n\geqslant 1$, $1\leqslant p<+\infty$ и $\alpha>\max\{-1;\ p(n-1)-(3n-1)\}$, то любая функция $f\in H^p_\alpha(\pi_n)$ допускает интегральное представление

$$f(w)\equiv 2^{n\beta}\cdot c_{n,n}(\beta)\cdot \int\limits_{\pi_n} \frac{f(\omega)\cdot[\det(\mathrm{Im}\omega)]^{\beta} d\mu_{n,n}(\omega)}{[\det\,(i\,(\omega^{*}-w))\,]^{2n+\beta}},\ \ w\in\pi_n, \tag{0.16}$$

где $\mathrm{Re}\,\beta>(\alpha+1)/p-1$, $1<p<+\infty$, $\mathrm{Re}\,\beta\geqslant\alpha$, $p=1$,

а константа $c_{n,n}(\beta)$ определяется из (0.3) при $m=n\geqslant 1$.

Наконец, в § 4 доказывается, что интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.16), является ограниченным проектором из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$, $n\geqslant 1$, если выполнены условия: $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>p(n-1)-n$, $\mathrm{Re}\,\beta>(\alpha+n)/p-1$ (теорема 4.1).

§ 1. Предварительные сведения

Всюду дальше мы будем работать с матрицами и при этом постоянно использовать относящиеся к ним различные понятия и факты, большинство из которых хорошо известны. Поэтому мы подробно останавливаемся лишь на некоторых узловых моментах. За более детальным изложением основных свойств матриц отсылаем к стандартным курсам линейной алгебры. Кроме того, в нашей работе [10] в сжатом виде также приведены сведения по этому вопросу.

1.1. (a). Прежде всего напомним (см. § 0), что для произвольных m, $n\geqslant 1$, $M_{m,n}$ обозначает множество всех комплексных матриц из m строк и n столбцов. С точки зрения результатов настоящей работы для нас представляет интерес случай $m=n$, и, таким образом, мы будем иметь дело с пространством $M_{n,n}$ $(n\geqslant 1)$, состоящим из всех комплексных $n\times n$-матриц. Лебегова мера $\mu_{n,n}$ на пространстве $M_{n,n}$ $(n\geqslant 1)$ задается следующим образом:

$$d\mu_{n,n}(\zeta)=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} dx_{ij}\, dy_{ij}, \tag{1.1}$$

где $\zeta=(\zeta_{ij})_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}\in M_{n,n}$ и $\zeta_{ij}=x_{ij}+i\cdot y_{ij}$.

Из (1.1) непосредственно следуют соотношения:

$$d\mu_{n,n}(\alpha\cdot\zeta)=|\alpha|^{2n^2}\cdot d\mu_{n,n}(\zeta),\ \forall\alpha\in\mathbf{C}\setminus\{0\},\tag{1.2}$$
$$d\mu_{n,n}(\zeta+\zeta_0)=d\mu_{n,n}(\zeta),\ \forall\zeta_0\in M_{n,n}.$$

Далее, если X, $Y\in M_{n,n}$—произвольные фиксированные матрицы, то имеет место соотношение:

$$d\mu_{n,n}(X\cdot\zeta\cdot Y)=|\det(X)|^{2n}\cdot|\det(Y)|^{2n}\cdot d\mu_{n,n}(\zeta),\tag{1.3}$$

на доказательстве которого мы останавливаться не будем.

В частности, если $X\in M_{n,n}$, а $X^*\in M_{n,n}$ суть эрмитово сопряженная к X матрица, то

$$d\mu_{n,n}(X\cdot\zeta\cdot X^*)=|\det(X)|^{4n}\cdot d\mu_{n,n}(\zeta).\tag{1.4}$$

(б) При произвольном $n\geqslant1$ через $\mathbf{H}_n$ обозначим множество всех эрмитовых $n\times n$—матриц, то есть таких матриц $\zeta\in M_{n,n}$, для которых $\zeta^*=\zeta$. Иначе говоря, матрица $\zeta=(\zeta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in M_{n,n}$ принадлежит $\mathbf{H}_n$ лишь при выполнении условий

$$\zeta_{ji}=\bar\zeta_{ij},\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n.\tag{1.5}$$

При $n\geqslant1$ лебегова мера μ_n на пространстве $\mathbf{H}_n$ задается так:

$$d\mu_n(H)=2^{n(n-1)/2}\cdot\prod_{l=1}^{n}dh_{ll}\times\prod_{1\leqslant j<l\leqslant n}dx_{lj}\,dy_{lj},\tag{1.6}$$

где $H=(h_{lj})_{1\leqslant l,j\leqslant n}\in\mathbf{H}_n$ и $h_{lj}=x_{lj}+i\cdot y_{lj}\ (1\leqslant j<l\leqslant n)$.

Из (1.6) легко получаются следующие соотношения:

$$d\mu_n(\alpha\cdot H)=|\alpha|^{n^2}\cdot d\mu_n(H),\ \forall\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{0\},\tag{1.7}$$
$$d\mu_n(H+H_0)=d\mu_n(H),\ \forall\ H_0\in\mathbf{H}_n.$$

Кроме того, для произвольной фиксированной матрицы $X\in M_{n,n}$ соответствие $H\to X\cdot H\cdot X^*$ отображает $\mathbf{H}_n$ в себя, и справедлива формула

$$d\mu_n(X\cdot H\cdot X^*)=|\det(X)|^{2n}\cdot d\mu_n(H),\tag{1.8}$$

доказательство которой также опускаем.

(в) Наконец, укажем полезную формулу, сводящую интегрирование по мере $\mu_{n,n}$ к вычислению интегралов по мере $\mu_n(n\geqslant1)$. А именно: для произвольной измеримой функции $f\colon M_{n,n}\to[0,+\infty]$ справедливо равенство

$$\int_{M_{n,n}}f(\zeta)\,d\mu_{n,n}(\zeta)=\int_{\mathbf{H}_n\times\mathbf{H}_n}f(X+i\cdot Y)\,d\mu_n(X)\times d\mu_n(Y).\tag{1.9}$$

1.2. При произвольном $n\geqslant1$ через $M^*_{n,n}$ обозначим множество матриц $\zeta\in M_{n,n}$, для которых $\det(\zeta)\neq0$. Иначе говоря, $M^*_{n,n}$ суть множество всех обратимых $n\times n$—матриц. Для каждого $\zeta\in M^*_{n,n}$ через ζ^{-1} будем обозначать обратную к ζ матрицу, так что

$$\zeta\cdot\zeta^{-1}=\zeta^{-1}\cdot\zeta=I^{(n)},\tag{1.10}$$

где $I^{(n)}$— единичная матрица порядка n.

Переходя к дифференциалам в равенстве (1.10), получим

$$d(\zeta^{-1}\cdot\zeta)\equiv d(I^{(n)})=0$$

или же

$$d(\zeta^{-1})\cdot\zeta+\zeta^{-1}\cdot d\zeta\equiv 0,$$

откуда вытекает, что

$$d(\zeta^{-1})\equiv-\zeta^{-1}\cdot d\zeta\cdot\zeta^{-1}. \tag{1.11}$$

Таким образом, мы приходим к следующей важной формуле:

$$d\mu_{n,n}(\zeta^{-1})\equiv\frac{1}{|\det(\zeta)|^{4n}}d\mu_{n,n}(\zeta),\ \zeta\in M^*_{n,n}. \tag{1.12}$$

1.3. (а) Пусть $A\in M_{n,n}$ $(n\geqslant 1)$—произвольная матрица. Договоримся употреблять запись $A>0\,(A\geqslant 0)$, если, во-первых, $A\in \mathbf{H}_n$, и, во-вторых, матрица A положительно определена (неотрицательно определена). И вообще, если $A_1,\ A_2\in M_{n,n}$, то будем писать $A_1>A_2$ $(A_1\geqslant A_2)$, если $A_1-A_2>0$ $(A_1-A_2\geqslant 0)$. Далее, хорошо известно (см., например, [10], § I, п. I. 3 (б)), что любая матрица $A\in M_{n,n}$ может быть единственным образом представлена в виде

$$A=B+i\cdot C,\quad B,\ C\in \mathbf{H}_n, \tag{1.13}$$

при этом используются обозначения

$$B=\operatorname{Re}A,\ C=\operatorname{Im}A. \tag{1.14}$$

В работе [10] была рассмотрена матричная область

$$\tilde{M}_{n,n}=\{A\in M_{n,n}:\operatorname{Re}A>0\}\cup\{A\in M_{n,n}:\operatorname{Im}A>0\}\cup$$
$$\cup\{A\in M_{n,n}:-\operatorname{Im}A>0\} \tag{1.15}$$

и установлены следующие утверждения:

— если $A\in M_{n,n}$, то $A\in\tilde{M}_{n,n}<=>A^*\in\tilde{M}_{n,n}$;

— если $A\in\tilde{M}_{n,n}$ и $a\in(0,+\infty)$, то $a\cdot A\in\tilde{M}_{n,n}$;

— множество $\mathbf{H}_n^+$ всех положительно определенных эрмитовых матриц содержится в $\tilde{M}_{n,n}$;

— область $\tilde{M}_{n,n}$ звездна относительно единичной матрицы $I^{(n)}$, то есть из $A\in\tilde{M}_{n,n}$ и $t\in[0,1]$ следует, что $t\cdot A+(1-t)\cdot I^{(n)}\in\tilde{M}_{n,n}$;

— $\tilde{M}_{n,n}\subset M^*_{n,n}$, то есть для любой матрицы $A\in\tilde{M}_{n,n}$, $\det(A)\neq 0$.

(б) В указанной работе [10] было установлено также существование и единственность голоморфной в области $\tilde{M}_{n,n}$ функции $g(A)$, $A\in\tilde{M}_{n,n}$, удовлетворяющей условиям

$$\exp\{g(A)\}\equiv\det(A),\ A\in\tilde{M}_{n,n},\ g(I^{(n)})=0. \tag{1.16}$$

Эта функция g обозначается через Indet и обладает следующими свойствами:

$$\mathrm{Indet}\,(A^*) = \overline{\mathrm{Indet}\,(A)},\ A \in \tilde{M}_{n,n},$$

$$\mathrm{Indet}\,(a\cdot A) = n\cdot \ln a + \mathrm{Indet}\,(A),\ A \in \tilde{M}_{n,n},\ a \in (0, +\infty);$$

$$\mathrm{Indet}\,(A) = \ln\,[\det\,(A)],\ A \in \mathrm{H}_n^+ \subset \tilde{M}_{n,n}.$$

Имея в нашем распоряжении функцию Indet, можем определить степенные функции, полагая для произвольного $\beta \in \mathrm{C}$

$$[\det\,(A)]^\beta \equiv \exp\,\{\beta\cdot \mathrm{Indet}\,(A)\},\ A \in \tilde{M}_{n,n}. \tag{1.17}$$

При этом нетрудно проверить, что

$$[\,\det\,(a\cdot A)]^\beta = a^{n\beta}\cdot[\det\,(A)]^\beta,\ A \in \tilde{M}_{n,n},$$
$$a \in (0, +\infty). \tag{1.18}$$

(в) Как видим, хотя голоморфная в области $\tilde{M}_{n,n}$ функция Indet определена однозначно, она не задается конструктивно. Поэтому желательно иметь как можно больше относящейся к ней информации. Так, например, из (1.16) легко следует, что

$$\mathrm{Re}\,[\mathrm{Indet}\,(A)] = \ln|\det\,(A)|,\ A \in \tilde{M}_{n,n}. \tag{1.19}$$

Что же касается поведения мнимой части функции Indet, то этот вопрос подлежит более тщательному рассмотрению, к которому мы и приступаем. Прежде всего, справедлива

Лемма 1.1. *Пусть $P(z)$, $z \in \mathrm{C}$—такой многочлен степени $n \geqslant 0$, что $P(t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$, причем $P(0) = 1$. Обозначим через $\ln[P(t)]$, $t \in [0,1]$, непрерывную на $[0,1]$ функцию, однозначно определяемую условиями*

$$\exp\,\{\ln[P(t)]\} \equiv P(t),\ t \in [0,1],$$
$$\ln[P(t)]\,|_{t=0} = 0. \tag{1.20}$$

Тогда справедливо неравенство

$$|\,\mathrm{Im}\,\{\ln[\,P(t)\,]\}\,| \leqslant \pi\cdot n,\ t \in [0,1]. \tag{1.21}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что справедливо тождество

$$\ln[P(t)] \equiv \int_0^t \frac{P'(\tau)}{P(\tau)}\,d\tau,\ t \in [0,1]. \tag{1.22}$$

Затем исходный многочлен $P(z)$ запишем в виде

$$P(z) = A\cdot\prod_{k=1}^{n}(z - a_k),\ z \in \mathrm{C}, \tag{1.23}$$

где $A \in \mathrm{C}\setminus\{0\}$, $\{a_k\}_1^n \subset \mathrm{C}\setminus[0,1]$. Тогда легко проверяется равенство

$$\frac{P'(\tau)}{P(\tau)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tau - a_k}, \quad \tau \in [0,1]. \tag{1.24}$$

Полагая далее для произвольного $a \in \mathbf{C} \setminus [0,1]$

$$\Psi_a(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\tau - a}, \quad t \in [0,1], \tag{1.25}$$

из (1.22), (1.24) и (1.25) будем иметь

$$\ln[P(t)] = \sum_{k=1}^{n} \Psi_{a_k}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{1.26}$$

Следовательно, для доказательства основного неравенства (1.21) достаточно установить, что при любом фиксированном $a \in \mathbf{C} \setminus [0,1]$

$$|\operatorname{Im} \Psi_a(t)| \leqslant \pi, \quad t \in [0,1]. \tag{1.27}$$

Если к тому же $a \in \mathbf{R}$, то $\operatorname{Im} \Psi_a(t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$, и тогда (1.27) очевидно. Поэтому пусть теперь $a = \alpha \pm i \cdot \beta$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$. Тогда имеем

$$\Psi_a(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\tau - \alpha \mp i \cdot \beta} = \int_{-\alpha}^{t-\alpha} \frac{ds}{s \mp i \cdot \beta} = \int_{-\alpha}^{t-\alpha} \frac{s \pm i \cdot \beta}{s^2 + \beta^2} ds,$$

и потому

$$\operatorname{Im} \Psi_a(t) = \pm \beta \cdot \int_{-\alpha}^{t-\alpha} \frac{ds}{s^2 + \beta^2} = \pm \int_{-\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{t-\alpha}{\beta}} \frac{du}{u^2 + 1}. \tag{1.28}$$

Наконец, из (1.28) следует неравенство (1.27):

$$\left| \operatorname{Im} \Psi_a(t) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \pi, \quad t \in [0,1],$$

и тем самым лемма доказана.

Лемма 1.2. *Для произвольной матрицы $A \in \widetilde{M}_{n,n}$ справедливо неравенство*

$$\left| \operatorname{Im} \left[\operatorname{lndet}(A) \right] \right| < \pi \cdot n. \tag{1.29}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $A \in \widetilde{M}_{n,n}$ и положим

$$A(z) = z \cdot A + (1 - z) \cdot I^{(n)} \in M_{n,n}, \quad z \in \mathbf{C}, \tag{1.30}$$

$$P(z) = \det(A(z)),\ z \in \mathbf{C}. \tag{1.31}$$

Легко проверить, что $P(z)$ суть многочлен некоторой степени k, где $k \leqslant n$. Кроме того, поскольку область $\overline{M}_{n,n}$ звездна относительно единичной матрицы $\mathrm{I}^{(n)}$ (см. 1.3 (а)), то $A(t) \in \overline{M}_{n,n}$ при $t \in [0,1]$, и потому $P(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$. Очевидно также, что $A(0) = \mathrm{I}^{(n)}$, $A(1) = A$ и $P(0) = 1$. Таким образом, многочлен $P(z)$, $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяет всем условиям леммы 1.1. Следовательно, если через $\ln[P(t)]$ обозначить непрерывную на $[0,1]$ функцию, однозначно определяемую из соотношений (1.20), то будем иметь

$$\left|\operatorname{Im}\{\ln[P(t)]\}\right| \leqslant \pi \cdot k \leqslant \pi \cdot n,\ t \in [0,1]. \tag{1.32}$$

Далее, легко убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\ln[P(t)] = \ln\det(A(t)),\ t \in [0,1]. \tag{1.33}$$

Комбинируя (1.32) с (1.33) и полагая $t = 1$, с учетом того, что $A = A(1)$, мы получим (1.29), и лемма доказана.

§ 2. Вычисление некоторых интегралов и другие вспомогательные результаты

2.1. (а) При произвольном $n \geqslant 1$ обозначим через U_n множество всех унитарных $n \times n$-матриц, то есть тех матриц $U \in M_{n,n}$ для которых

$$U \cdot U^* = U^* \cdot U = \mathrm{I}^{(n)}. \tag{2.1}$$

Напомним также, что H_n и H_n^+ обозначают соответственно пространства эрмитовых и положительно определенных эрмитовых матриц. Далее, для произвольных комплексных чисел $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ договоримся обозначать через $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ квадратную $n \times n$ — матрицу, на диагонали которой стоят числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, а все остальные элементы равны нулю.

Хорошо известна следующая

Теорема 2.1. *Пусть эрмитовы матрицы $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathrm{H}_n$ коммутируют, то есть $A^{(1)} \cdot A^{(2)} = A^{(2)} \cdot A^{(1)}$. Тогда существует унитарная матрица $U \in \mathrm{U}_n$, такая, что справедливы представления*

$$A^{(i)} = U \cdot \Lambda^{(i)} \cdot U^* \qquad (i = 1,2), \tag{2.2}$$

где

$$\Lambda^{(i)} = \left[\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_n^{(i)}\right].$$

Следствие. Пусть эрмитовы матрицы $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathrm{H}_n$ коммутируют, причем $A^{(1)} \geqslant A^{(2)} \geqslant 0$, тогда

$$\det(A^{(1)}) \geqslant \det(A^{(2)}) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Иногда оказывается полезным следующий частный случай теоремы 2.1.

Теорема 2.1′. *Для любой эрмитовой матрицы* $A \in \mathrm{H}_n$ *справедливо представление*

$$A = U \cdot \Lambda \cdot U^*, \tag{2.4}$$

где $U \in \mathrm{U}_n$, $\Lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, *причем* $A \geqslant 0 <=> \lambda_n \geqslant 0$ и $A > 0 <=> \lambda_n > 0$.

Следствие. Пусть $A \geqslant 0$, тогда существует единственная матрица $B \geqslant 0$ такая, что

$$A = B^2 = B \cdot B. \tag{2.5}$$

Для нее используется обозначение $B = \sqrt{A}$. Заметим, что $\det(\sqrt{A}) = \sqrt{\det(A)}$, причем $\sqrt{A} > 0 <=> A > 0$.

(б) Сформулированные результаты в дальнейшем будут многократно использованы. Так, например, основываясь на них, мы сейчас установим некоторые полезные неравенства.

Для произвольного $n \geqslant 1$ положим

$$\pi_n = \{\omega \in M_{n,n} : \mathrm{Im}\,\omega > 0\} = \mathrm{H}_n + i \cdot \mathrm{H}_n^+. \tag{2.6}$$

Область π_n называется обобщенной верхней полуплоскостью и будет главным объектом нашего рассмотрения.

Лемма 2.1. *Для любой матрицы* $\omega \in \pi_n$ *справедливы неравенства*

$$|\det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})| \geqslant 1, \tag{2.7}$$

$$|\det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})| \geqslant \det(\mathrm{Im}\,\omega). \tag{2.8}$$

Доказательство. Для произвольной матрицы $\omega \in M_{n,n}$ имеем

$$|\det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})|^2 = \det(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)}) \cdot \det(\omega^* - i \cdot \mathrm{I}^{(n)}) =$$

$$= \det[(\omega + i \cdot \mathrm{I}^{(n)}) \cdot (\omega^* - i \cdot \mathrm{I}^{(n)})] =$$

$$= \det[\omega \cdot \omega^* + 2 \cdot \mathrm{Im}\,\omega + \mathrm{I}^{(n)}]. \tag{2.9}$$

Если к тому же $\omega \in \pi_n$, то

$$\omega \cdot \omega^* + 2 \cdot \mathrm{Im}\,\omega + \mathrm{I}^{(n)} \geqslant \mathrm{I}^{(n)}. \tag{2.10}$$

Поэтому в силу следствия из теоремы 2.1

$$\det[\omega \cdot \omega^* + 2 \cdot \mathrm{Im}\,\omega + \mathrm{I}^{(n)}] \geqslant \det[\mathrm{I}^{(n)}] = 1. \tag{2.11}$$

Комбинируя (2.9) и (2.11), мы получим (2.7).

Необходимо отметить, что неравенство (2.7) допускает следующее обобщение:

Если $\omega \in \pi_n$ и $A > 0$, то

$$|\det(\omega + i \cdot A)| \geqslant \det(A). \tag{2.12}$$

Действительно, пусть $T = \sqrt{A} > 0$, тогда $T^{-1} \cdot \omega \cdot T^{-1} \in \pi_n$, так что в силу (2.7) имеем

$$|\det(T^{-1} \cdot \omega \cdot T^{-1} + i \cdot \mathrm{I}^{(n)})| \geqslant 1. \tag{2.13}$$

Следовательно, справедлива цепочка соотношений

$$
\begin{aligned}
|\det(\omega+i\cdot A)| &= |\det[T\cdot(T^{-1}\cdot\omega\cdot T^{-1}+i\cdot I^{(n)})\cdot T]| = \\
&= [\det(T)]^2\cdot|\det(T^{-1}\cdot\omega\cdot T^{-1}+i\cdot I^{(n)})| \geqslant \\
&\geqslant [\det(T)]^2=\det(A)
\end{aligned}
$$

и, тем самым, (2.12) установлено. Наконец, (2.8) вытекает из (2.12) следующим образом: если $\omega\in\pi_n$, то

$$|\det(\omega+i\cdot I^{(n)})| = |\det[(\mathrm{Re}\,\omega+i\cdot I^{(n)})+i\cdot\mathrm{Im}\,\omega]| \geqslant \det(\mathrm{Im}\,\omega).$$

Итак, лемма 2.1 полностью доказана.

2.2. (а) При вычислении некоторых интегралов мы будем существенно опираться на следующее индуктивное описание множества всех положительно определенных эрмитовых $n\times n$-матриц H_n^+ $(n\geqslant 1)$, приведенное в монографии [6, гл. II, § 2.1]:

$$
\begin{aligned}
&H_1^+=(0,+\infty)\subset R,\\
&H_n^+=\left\{H=\begin{pmatrix} A & p^*\\ p & l\end{pmatrix}:\ A\in H_{n-1}^+,\ p\in C^{n-1},\ l\in R,\right.\\
&\qquad\left. l-p\cdot A^{-1}\cdot p^*>0\right\}\quad(n>1),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

причем справедливо равенство

$$\det(H)=\det(A)\cdot(l-p\cdot A^{-1}\cdot p^*),\quad H\in H_n\ (n>1). \tag{2.15}$$

Кроме того, лебегова мера μ_n на пространстве H_n допускает следующее разложение:

$$
\begin{aligned}
&d\mu_n(H)=2^{n-1}\cdot d\mu_{n-1}(A)\times d\mu_{1,n-1}(p)\times d\mu_1(l),\\
&\qquad H\in H_n^+\ (n>1).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

(б) При произвольном $n\geqslant 1$ введем в рассмотрение интегралы, зависящие от соответствующих параметров:

$$H_n(\alpha)=\int\limits_{H_n}\frac{d\mu_n(H)}{[\det(H^2+I^{(n)})]^{\alpha}},\quad \alpha\in R; \tag{2.17}$$

$$I_n(\alpha,\beta)=\int\limits_{H_n^+}\frac{[\det(H)]^{\alpha}}{[\det(H+I^{(n)})]^{\beta}}\,d\mu_n(H),\quad \alpha,\beta\in R; \tag{2.18}$$

$$J_n(\alpha,\gamma)=\int\limits_{\pi_n}\frac{[\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^{\alpha}}{|\det(\omega^*-i\cdot I^{(n)})|^{\gamma}}\,d\mu_{n,n}(\omega),\quad \alpha,\gamma\in R. \tag{2.19}$$

Затем приступим к изучению вопросов сходимости введенных интегралов.

Предложение 2.1. *Пусть $n \geqslant 1$, тогда*

$$0 < H_n(\alpha) < +\infty, \text{ если } \alpha > n - \frac{1}{2}, \tag{2.20}$$

$$H_n(\alpha) = +\infty, \quad \text{если} \quad \alpha \leqslant n - \frac{1}{2}.$$

За доказательством мы отсылаем к монографии [6] (см. теорему 2.1.5).

Предложение 2.2. *Пусть $n \geqslant 1$, тогда*

$$0 < \mathrm{I}_n(\alpha, \beta) < +\infty \text{ при } \alpha > -1,\ \beta - \alpha > 2n - 1, \tag{2.21}$$

$\mathrm{I}_n(\alpha, \beta) = +\infty$, *если хотя бы одно из этих неравенств нарушается.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по размерности n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Допустив справедливость (2.21) при $n-1$, перейдем к доказательству для случая $n > 1$:

$$\mathrm{I}_n(\alpha, \beta) = 2^{n-1} \cdot \int\limits_{\mathrm{H}_{n-1}^{+}} \frac{[\det(A)]^{\alpha}\, d\mu_{n-1}(A)}{[\det(A + \mathrm{I}^{(n-1)})]^{\beta}} \int\limits_{\mathrm{C}^{n-1}} d\mu_{1,n-1}(p) \times$$

$$\times \int\limits_{p \cdot A^{-1} \cdot p^*}^{+\infty} \frac{(l - p \cdot A^{-1} \cdot p^*)^{\alpha}}{[l + 1 - p \cdot (A + \mathrm{I}^{(n-1)})^{-1} \cdot p^*]^{\beta}}\, d\mu_1(l). \tag{2.22}$$

Введем следующее обозначение:

$$\lambda = 1 + p \cdot A^{-1} \cdot p^* - p \cdot (A + I^{(n-1)})^{-1} \cdot p^* =$$
$$= 1 + p \cdot X \cdot p^* > 0, \tag{2.23}$$

где

$$X = A^{-1} - (A + I^{(n-1)})^{-1} > 0. \tag{2.24}$$

Тогда внутренний интеграл в (2.22) по переменной l равен

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{l^{\alpha}}{(l + \lambda)^{\beta}}\, dl = \frac{1}{\lambda^{\beta-\alpha-1}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}\, dt = \frac{I_1(\alpha, \beta)}{\lambda^{\beta-\alpha-1}}. \tag{2.25}$$

Сопоставляя (2.22) и (2.25), получим

$$I_n(\alpha, \beta) = 2^{n-1} \cdot I_1(\alpha, \beta) \cdot \int\limits_{\mathrm{H}_{n-1}^{+}} \frac{[\det(A)]^{\alpha}\, d\mu_{n-1}(A)}{[\det(A + I^{(n-1)})]^{\beta}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathrm{C}^{n-1}} \frac{d\mu_{1,n-1}(p)}{(1 + p \cdot X \cdot p^*)^{\beta-\alpha-1}}. \tag{2.26}$$

Далее, поскольку $X > 0$, то $T = \sqrt{X} > 0$, и во внутреннем интеграле (2.26) произведем замену переменной: $p = u \cdot T^{-1}$, $u \in \mathrm{C}^{n-1}$. Тогда

$$d\mu_{1,n-1}(u \cdot T^{-1}) = |\det(T^{-1})|^2\, d\mu_{1,n-1}(u) = \frac{d\mu_{1,n-1}(u)}{\det(X)}, \tag{2.27}$$

поэтому в (2.26) интеграл по переменной ρ равен

$$\frac{1}{\det(X)}\cdot\int\limits_{C^{n-1}}\frac{d\mu_{1,n-1}(u)}{(1+u\cdot u^*)^{\beta-\alpha-1}}=\frac{\text{const}}{\det(X)}\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^{2n-3}\,dr}{(1+r^2)^{\beta-\alpha-1}}=\frac{\text{const}}{\det(X)}\cdot I_1(n-2,\ \beta-\alpha-1). \tag{2.28}$$

Затем, принимая во внимание (2.24), получим

$$(A+I^{(n-1)})\cdot X\cdot A=I^{(n-1)}, \tag{2.29}$$

и, следовательно

$$\det(A+I^{(n-1)})\cdot\det(X)\cdot\det(A)=1. \tag{2.30}$$

Комбинируя (2.26), (2.28) и (2.30), окончательно получаем

$$I_n(\alpha,\beta)=\text{const}\cdot I_1(\alpha,\beta)\cdot I_1(n-2,\ \beta-\alpha-1)\times$$

$$\times\int\limits_{H^+_{n-1}}\frac{[\det(A)]^{\alpha+1}\,d\mu_{n-1}(A)}{[\det(A+I^{(n-1)})]^{\beta-1}}=$$

$$=\text{const}\cdot I_1(\alpha,\beta)\cdot I_1(n-2,\ \beta-\alpha-1)\cdot I_{n-1}(\alpha+1,\ \beta-1). \tag{2.31}$$

Учитывая (2.31), а также индуктивное предположение, мы приходим к следующим (необходимым и достаточным!) условиям сходимости интеграла $I_n(\alpha,\beta)$:

$$\alpha>-1,\ \beta-\alpha>1,\ n-2>-1,\ \beta-\alpha-1-(n-2)>1,$$

$$\alpha+1>-1,\ (\beta-1)-(\alpha+1)>2(n-1)-1,$$

которые равносильны соотношениям $\alpha>-1$, $\beta-\alpha>2n-1$ и, таким образом, предложение 2.2 доказано.

(в) На основе предложений 2.1 и 2.2 устанавливается

Предложение 2.3. *Пусть $n\geqslant 1$, тогда*

$0<J_n(\alpha,\gamma)<+\infty$ *при* $\alpha>-1$, $\gamma>2n-1$, $\gamma-\alpha>3n-1$; $J_n(\alpha,\gamma)=+\infty$ *если хотя бы одно из этих неравенств нарушается.*

Доказательство. Согласно формуле интегрирования (1.9) имеем

$$J_n(\alpha,\gamma)=\int\limits_{H_n\times H_n^+}\frac{[\det(H)]^\alpha\,d\mu_n(S)\times d\mu_n(H)}{|\det(S-i\cdot(H+I^{(n)}))|^\gamma}=$$

$$=\int\limits_{H_n^+}[\det(H)]^\alpha d\mu_n(H)\int\limits_{H_n}\frac{d\mu_n(S)}{|\det(S-i\cdot(H+I^{(n)}))|^\gamma}. \tag{2.32}$$

Во внутреннем интеграле (2.32) произведем замену переменной

$$S=\sqrt{H+I^{(n)}}\cdot Q\cdot\sqrt{H+I^{(n)}},\quad Q\in H_n. \tag{2.33}$$

Тогда в силу формулы (1.8)

$$d\mu_n(S) = [\det(H + I^{(n)})]^n \, d\mu_n(Q), \tag{2.34}$$

и потому в (2.32) интеграл по S равен

$$\frac{1}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}} \cdot \int\limits_{H_n} \frac{d\mu_n(Q)}{|\det(Q - i \cdot I^{(n)})|^{\gamma}} =$$

$$= \frac{1}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}} \cdot \int\limits_{H_n} \frac{d\mu_n(Q)}{[\det(Q^2 + I^{(n)})]^{\gamma/2}} =$$

$$= \frac{H_n(\gamma/2)}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}}. \tag{2.35}$$

Комбинируя (2.32) и (2.35), приходим к равенству

$$J_n(\alpha, \gamma) = H_n(\gamma/2) \int\limits_{H_n^+} \frac{[\det(H)]^{\alpha}}{[\det(H + I^{(n)})]^{\gamma-n}} \, d\mu_n(H) =$$

$$= H_n(\gamma/2) \cdot I_n(\alpha, \gamma - n), \tag{2.36}$$

откуда на основании предложений 2.1 и 2.2 получаем требуемый результат.

Доказанное предложение полезно сопоставить со следующей формулой.

Предложение 2.4. *Пусть* $n \geqslant 1$ *и* $\alpha, \gamma \in \mathbf{R}$, *тогда при любом* $w \in \pi_n$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha}}{|\det(\omega^* - w)|^{\gamma}} \, d\mu_{n,n}(\omega) = \frac{J_n(\alpha, \gamma)}{[\det(\operatorname{Im} w)]^{\gamma-\alpha-2n}}. \tag{2.37}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу (1.2) интеграл в (2.37) может быть записан в виде

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha}}{|\det(\omega^* - i \cdot \operatorname{Im} w)|^{\gamma}} \, d\mu_{n,n}(\omega). \tag{2.38}$$

Затем в этом интеграле произведем замену переменной

$$\omega = \sqrt{\operatorname{Im} w} \cdot \tau \cdot \sqrt{\operatorname{Im} w}, \quad \tau \in \pi_n \tag{2.39}$$

и при этом заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$d\mu_{n,n}(\omega) = [\det(\operatorname{Im} w)]^{2n} \cdot d\mu_{n,n}(\tau),$$

$$\det(\operatorname{Im}\omega) = \det(\operatorname{Im} w) \cdot \det(\operatorname{Im}\tau),$$

$$\det(\omega^* - i \cdot \operatorname{Im} w) = \det(\operatorname{Im} w) \cdot \det(\tau^* - i \cdot I^{(n)}), \tag{2.40}$$

с помощью которых уже легко устанавливается формула (2.37).

§ 3. Основные интегральные представления в обобщенной верхней полуплоскости π_n $(n \geqslant 1)$

3.1. (а) Напомним, что в § 0 обобщенным единичным кругом в пространстве $M_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ всех комплексных $m \times n$-матриц мы называли область

$$\mathrm{R}_{m,n} = \{ \zeta \in M_{m,n} : I^{m} - \zeta \cdot \zeta^{*} > 0 \}. \tag{3.1}$$

В частности, при $m = n \geqslant 1$ будем иметь

$$\mathrm{R}_{n,n} = \{ \zeta \in M_{n,n} : I^{(n)} - \zeta \cdot \zeta^{*} > 0 \}. \tag{3.2}$$

Можно показать (см., например, [15, стр. 61—62]), что при произвольном $n \geqslant 1$ между обобщенным единичным кругом $\mathrm{R}_{n,n}$ и обобщенной верхней полуплоскостью π_n существует биголоморфный изоморфизм, осуществляемый посредством матричных преобразований Кэли:

$$\Phi(\zeta) = i \cdot (I^{(n)} + \zeta) \cdot (I^{(n)} - \zeta)^{-1}, \ \zeta \in \mathrm{R}_{n,n}; \tag{3.3}$$
$$\Phi^{-1}(\omega) = (\omega - i \cdot I^{(n)}) \cdot (\omega + i \cdot I^{(n)})^{-1}, \ \omega \in \pi_n.$$

Заметим, что поскольку $\operatorname{Re}(I^{(n)} - \zeta) > 0$, $\operatorname{Im}(\omega + i \cdot I^{(n)}) > 0$, то обратные матрицы в (3.3) существуют.

При произвольном $\rho \in (0,1)$ будем полагать:

$$\rho \cdot \mathrm{R}_{n,n} = \{ \rho \cdot \zeta, \ \zeta \in \mathrm{R}_{n,n} \},$$
$$\pi_{n,\rho} = \Phi(\rho \cdot \mathrm{R}_{n,n}).$$

Перед тем, как перейти к изучению свойств преобразований Кэли, ради упрощения записи, договоримся обозначать впредь единичную матрицу $I^{(n)} \in M_{n,n}$ просто через I.

Лемма 3.1. 1. *Имеют место следующие формулы замены переменных:*

$$d\mu_{n,n}\left(\Phi(\zeta)\right) = \frac{4^{n^2}}{|\det(I - \zeta)|^{4n}} d\mu_{n,n}(\zeta), \quad \zeta \in \mathrm{R}_{n,n}; \tag{3.4}$$

$$d\mu_{n,n}\left(\Phi^{-1}(\omega)\right) = \frac{4^{n^2}}{|\det(\omega + i \cdot I)|^{4n}} d\mu_{n,n}(\omega), \quad \omega \in \pi_n. \tag{3.5}$$

2. *При любых w, $\omega \in \pi_n$ справедливы равенства*

$$\det[I - \Phi^{-1}(w) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^{*}] = \frac{\det[2i \cdot (\omega^{*} - w)]}{\det[w + i \cdot I] \cdot \det[\omega^{*} - i \cdot I]}, \tag{3.6}$$

$$\det[I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^{*}] = \frac{\det[4 \cdot \operatorname{Im} \omega]}{\det[\omega + i \cdot I] \cdot \det[\omega^{*} - i \cdot I]}. \tag{3.7}$$

3. *Для любых w, $\omega \in \pi_n$ выполняется равенство*

$$\operatorname{lndet}[I - \Phi^{-1}(w) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^{*}] = \operatorname{lndet}[2i \cdot (\omega^{*} - w)] - \\ - \operatorname{lndet}[w + i \cdot I] - \operatorname{lndet}[\omega^{*} - i \cdot I]. \tag{3.8}$$

Доказательство. Утверждение 1 легко вытекает из соотношений (1.2) и (1.12), 2. проверяется непосредственно при помощи формул (3.3), а 3. следует из 2. и соответствующих свойств функции Indet.

(б) Пусть $n \geqslant 1$ и $p \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Для произвольной измеримой по Лебегу (вообще говоря, комплекснозначной) функции f, определенной в области π_n, положим

$$\| f \|^p_{p,\alpha} = \int_{\pi_n} |f(\omega)|^p \cdot [\det (\operatorname{Im} \omega)]^\alpha \, d\mu_{n,n}(\omega) \tag{3.9}$$

и затем введем соответствующее пространство:

$$L^p_\alpha(\pi_n) = \left\{ f : \| f \|_{p,\alpha} < +\infty \right\}. \tag{3.10}$$

А через $H^p_\alpha(\pi_n)$ обозначим множество всех голоморфных в области π_n функций, принадлежащих классу $L^p_\alpha(\pi_n)$.

Следует отметить, что аналогичные классы для обобщенного единичного круга $R_{m,n}$ $(m, n \geqslant 1)$ рассматривались нами ранее в работе [10]. Представляется целесообразным напомнить определение этих классов хотя бы в важном для нас случае $m = n \geqslant 1$.

Пусть $p \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, для измеримой функции $g(\zeta)$, $\zeta \in \mathrm{R}_{n,n}$, полагается

$$\| g \|^p_{p,\alpha} = \int_{\mathrm{R}_{n,n}} |g(\zeta)|^p \cdot [\det (I - \zeta \cdot \zeta^*)]^\alpha \, d\mu_{n,n}(\zeta), \tag{3.11}$$

затем

$$L^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n}) = \left\{ g : \| g \|_{p,\alpha} < +\infty \right\}, \tag{3.12}$$

а $H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n})$ обозначает пространство голоморфных в $\mathrm{R}_{n,n}$ функций из класса $L^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n})$. Из предложения 2.4 работы [10] вытекает следующий факт: пусть $n \geqslant 1$; если $0 < p + \infty$ и $-\infty < \alpha \leqslant -1$, то пространство $H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n}) = \{0\}$, то есть состоит лишь из тождественного нуля.

(в) Путем несложных вычислений устанавливается следующая

Лемма 3. 2. *Пусть* $n \geqslant 1$ *и* $0 < p < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$.

1. *Если* $f \in H^p_\alpha(\pi_n)$, *то функция*

$$g(\zeta) = \frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det (I - \zeta)]^{2(2n+\alpha)/p}} \in H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n}). \tag{3.13}$$

2. *Если* $g \in H^p_\alpha(\mathrm{R}_{n,n})$, *то функция*

$$f(\omega) = \frac{g(\Phi^{-1}(\omega))}{[\det (\omega + i \cdot I)]^{2(2n+\alpha)/p}} \in H^p_\alpha(\pi_n). \tag{3.14}$$

Следствие. Пусть $n \geqslant 1$; если $0 < p < +\infty$ и $-\infty < \alpha \leqslant -1$, то $H^p_\alpha(\pi_n) = \{0\}$.

Таким образом, изучение пространств $H^p_\alpha(\pi_n)$ $(n \geqslant 1)$ представляет интерес только в случае $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

3.2. (а) Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > -1$; для комплексного числа β договоримся писать $\beta \vdash (p, \alpha)$, как только будут выполнены условия:

$$\operatorname{Re}\beta > (\alpha+1)/p - 1, \text{ если } 1 < p < +\infty, \tag{3.15}$$
$$\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha, \text{ если } p = 1.$$

Справедлива важная

Лемма 3.3 *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > \max\{-1;\ p(n-1)-(3n-1)\}$ *и* $f \in L^p_\alpha(\pi_n)$. *Если* $\beta \vdash (p, \alpha)$, *то функция*

$$F_\beta(\omega) \equiv \frac{f(\omega)\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^\beta}{[\det(\omega^* - i\cdot I)]^{2n+\beta}} \in L^1(\pi_n). \tag{3.16}$$

Доказательство. Пусть $\omega \in \pi_n$, тогда на основании леммы 1.2 имеем

$$|F_\beta(\omega)| = \frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^* - i\cdot I)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}} \times$$
$$\times \exp\{\operatorname{Im}\beta\cdot\operatorname{Im}[\ln\det(\omega^* - i\cdot I)]\} \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{F}_\beta(\omega)\cdot\exp\{\pi\cdot n\cdot|\operatorname{Im}\beta|\}, \tag{3.17}$$

где

$$\tilde{F}_\beta(\omega) = \frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^* - i\cdot I)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}},\ \omega \in \pi_n. \tag{3.18}$$

Нам достаточно установить, что $\tilde{F}_\beta \in L^1(\pi_n)$. Если $p = 1$, то в силу исходных предположений будем иметь: $\alpha > -1$, $\operatorname{Re}\beta \geqslant \alpha$. Поэтому с учетом леммы 2.1 получим

$$\tilde{F}_\beta(\omega) = |f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^\alpha \times$$
$$\times \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta-\alpha}}{|\det(\omega^* - i\cdot I)|^{\operatorname{Re}\beta-\alpha}}\cdot\frac{1}{|\det(\omega^* - i\cdot I)|^{2n+\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant |f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^\alpha \in L^1(\pi_n), \tag{3.19}$$

и, таким образом, при $p=1$ лемма доказана.

Если же $1 < p < +\infty$, то перепишем (3.18) в виде

$$\tilde{F}_\beta(\omega) = |f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha/p} \times$$
$$\times \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta-\alpha/p}}{|\det(\omega^* - i\cdot I)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}},\ \omega \in \pi_n, \tag{3.20}$$

и затем применим интегральное неравенство Гёльдера с сопряженными показателями p и $q = p/(p-1)$:

$$\int_{\pi_n} \bar{F}_\beta(\omega)\, d\mu_{n,n}(\omega) \leqslant \| f \|_{p,\alpha} \cdot J^{1/q}, \tag{3.21}$$

$$J = \int_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{q(\operatorname{Re}\beta - \alpha/p)}}{|\det(\omega^* - i\cdot I)|^{q(2n+\operatorname{Re}\beta)}}\, d\mu_{n,n}(\omega). \tag{3.22}$$

Очевидно, сходимость интеграла J влечет включение $\bar{F}_\beta \in L^1(\pi_n)$. А для сходимости J, как это следует из предложения 2.3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$q(\operatorname{Re}\beta - \alpha/p) > -1,$$
$$q(2n + \operatorname{Re}\beta) > 2n - 1,$$
$$q(2n + \operatorname{Re}\beta) - q(\operatorname{Re}\beta - \alpha/p) > 3n - 1, \tag{3.23}$$

которые действительно имеют место в силу исходных условий, наложенных на параметры. Итак, лемма полностью доказана.

(б) При произвольных $n \geqslant 1$ и $\beta \in \mathbf{C}$ $(\operatorname{Re}\beta > -1)$ на функциях $f(w)$, заданных в области π_n, рассмотрим интегральный оператор

$$T_{n,\beta} f(w) = 2^{n\beta} \cdot c_{n,n}(\beta) \cdot \int_{\pi_n} \frac{f(\omega) \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^\beta\, d\mu_{n,n}(\omega)}{[\det(i(\omega^* - w))]^{2n+\beta}} =$$

$$= \frac{4^{n^2+n\beta} \cdot c_{n,n}(\beta)}{[\det(w + i\cdot I)]^{2n+\beta}} \cdot \int_{\pi_n} G_n(w, \omega; \beta, f)\, d\mu_{n,n}(\omega), \quad w \in \pi_n, \tag{3.24}$$

где
$$G_n(w, \omega; \beta, f) = \frac{f(\omega) \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^\beta}{[\det(I - \Phi^{-1}(w) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^{2n+\beta}} \times$$

$$\times \frac{1}{[\det(\omega^* - i\cdot I)]^{2n+\beta}}, \quad w, \omega \in \pi_n, \tag{3.25}$$

а константа $c_{n,n}(\beta)$ определяется из соотношения (0.3) при $m=n$.

Лемма 3.4. *Положим* $1 \leqslant p < +\infty$, $\alpha > \max\{-1;\, p(n-1) - (3n-1)\}$ *и* $f \in L^p_\alpha(\pi_n)$.

1. *Пусть* $p=1$, *компакт* $K \subset \pi_n$, $0 < A < +\infty$ *и* $\alpha < a < +\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\omega) \equiv \Psi_1(\omega) \in L^1(\pi_n)$ *такая, что оценка*

$$|G_n(w, \omega; \beta, f)| \leqslant \Psi(\omega), \quad \omega \in \pi_n, \tag{3.26}$$

справедлива равномерно по $w \in K$ *и* $\beta \in \mathbf{C}$ *при* $|\operatorname{Im}\beta| \leqslant A$ *и* $\alpha \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant a$.

2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, *компакт* $K \subset \pi_n$, $0 < A < +\infty$ *и* $(\alpha+1)/p - 1 < a_1 < a_2 < +\infty$. *Тогда существует функция* $\Psi(\omega) \equiv \Psi_2(\omega) \in L^1(\pi_n)$ *такая, что оценка* (3.26) *имеет место равномерно по* $w \in K$ *и* $\beta \in \mathbf{C}$ *при* $|\operatorname{Im}\beta| \leqslant A$, $a_1 \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant a_2$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$\eta\ (Z,\ \zeta,\beta)=[\det\ (I-Z\cdot\zeta^*)\ ]^{2n+\beta}\equiv$$

$$\equiv\exp\ \{\ (2n+\beta)\ \ln\det\ (I-Z\cdot\zeta^*)\ \},\ Z\in\mathbf{R}_{n,n},\ \zeta\in\overline{\mathbf{R}}_{n,n},\ \beta\in\mathbf{C}\ (\mathrm{Re}\beta>-1).\quad (3.27)$$

Из предоложения 2.2 (в) работы [10] следует, что если $Z\in\mathbf{R}_{n,n}$ и $\zeta\in\overline{\mathbf{R}}_{n,n}$, то $\mathrm{Re}\ (I-Z\cdot\zeta^*)>0$, и потому $I-Z\cdot\zeta^*\in\overline{M}_{n,n}$. Следовательно, функция η посредством формулы (3.27) определяется корректно; к тому же очевидно, что эта функция непрерывна по совокупности переменных Z, ζ, β и не обращается в нуль во всей области своего определения. Поэтому существует число $\delta\in(0,\ +\infty)$, такое, что в обоих рассматриваемых в лемме 3.4 случаях 1 и 2 справедлива оценка снизу

$$|\,[\det\ (I-\Phi^{-1}\ (w)\cdot\Phi^{-1}\ (\omega)^*)\ ]^{2n+\beta}|\geqslant\delta>0,\quad (3.28)$$

которая с учетом леммы 1.2 дает неравенство

$$|G_n\ (w,\ \omega;\beta,\ f)|\leqslant\frac{|f(\omega)|\cdot[\det\ (\mathrm{Im}\ \omega)\ ]^{\mathrm{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-i\cdot I)\ |^{2n+\mathrm{Re}\beta}}\cdot\frac{\exp\ \{\pi\cdot n\cdot A\}}{\delta}.\quad (3.29)$$

Наконец, комбинируя (3.29) и леммы 2.1, 3.3, при $p=1$ приходим к неравенству

$$|\ G_n\ (w,\ \omega;\ \beta,\ f)\ |\leqslant\mathrm{const}\cdot\frac{|\ f\ (\omega)\ |\ \cdot\ [\det\ (\mathrm{Im}\ \omega)\ ]^{\alpha}}{|\det\ (\omega^*-i\cdot I)\ |^{2n+\alpha}}\equiv$$

$$\equiv\Psi_1\ (\omega)\in L^1\ (\pi_n),\quad (3.30)$$

а при $1<p<+\infty$ — к неравенству

$$|G_n\ (w,\ \omega;\ \beta,\ f)\ |\leqslant\mathrm{const}\cdot\frac{|\ f(\omega)|\cdot[\det\ (\mathrm{Im}\ \omega)\ ]^{\alpha_1}}{|\ \det\ (\omega^*-i\cdot I)\ |^{2n+\alpha_1}}\equiv$$

$$\equiv\Psi_2\ (\omega)\in L^1\ (\pi_n),\quad (3.31)$$

что и завершает доказательство леммы.

Следствие (а). *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>\max\ \{-1;\ p\ (n-1)-(3n-1)\}$, $f\ (\omega)\in L^p_\alpha\ (\pi_n)$ *и* $\beta\succ(p,\ \alpha)$. *Тогда* $T_{n,\beta}f\ (w)$, *как функция от* $w\in\pi_n$, *голоморфна в* π_n.

Следствие (б). *В тех же предположениях* $1\leqslant p<+\infty$ $\alpha>\max\ \{-1;\ p\ (n-1)-(3n-1)\ \}$, $f\ (\omega)\in L^p_\alpha\ (\pi_n)$, при $w\in\pi_n$:

—если $p=1$, то $T_{n,\beta}\ f\ (w)$, как функция от β, голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой области $\mathrm{Re}\,\beta\geqslant\alpha$;

—если же $1<p<+\infty$, то $T_{n,\beta}f\ (w)$, как функция от β, голоморфна в области $\mathrm{Re}\,\beta>(\alpha+1)/p-1$.

3.3. Перейдем к установлению основного результата данной работы.

Теорема 3.1. *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$, $\alpha>\max\ \{-1;\ p\ (n-1)-(3n-1)\}$ *и* $\beta\succ(p,\ \alpha)$. *Тогда любая функция* $f\in H^p_\alpha\ (\pi_n)$ *допускает интегральное представление*

$$f\ (w)\equiv T_{n,\beta}\ f\ (w),\ w\in\pi_n,\quad (3.32)$$

Доказательство. Допустим, что $f \in H^p_\alpha(\pi_n)$ и зафиксируем произвольное $w_0 \in \pi_n$. Мы должны показать, что

$$f(w_0) = T_{n,\beta} f(w_0) \tag{3.33}$$

при любом $\beta \in \mathbf{C}$, удовлетворяющем условию $\beta \vdash (p, \alpha)$. Но поскольку $T_{n,\beta} f(w_0)$ голоморфно зависит от β (см. следствие (б) из леммы 3.4), то нам достаточно установить (3.33) лишь при вещественных $\beta > \beta_0 = \max\{0; (\alpha+1)/p-1\}$. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$g(\zeta) = \frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det(I-\zeta)]^{2n+\beta}}, \ \zeta \in \mathbf{R}_{n,n}, \tag{3.34}$$

которая, очевидно, голоморфна в области $\mathbf{R}_{n,n}$. Следовательно, при любом $\rho \in (0,1)$ функция $g(\rho\cdot\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{R}_{n,n}$, ограничена в области $\mathbf{R}_{n,n}$ и потому принадлежит классу $H^p_\beta(\mathbf{R}_{n,n})$. Применяя теорему II (§ 0) при $m=n$, для любого $\rho \in (0,1)$ будем иметь:

$$g(\rho\cdot Z) = c_{n,n}(\beta)\cdot \int\limits_{\mathbf{R}_{n,n}} \frac{g(\rho\cdot\zeta)\cdot[\det(I-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta}{[\det(I-Z\cdot\zeta^*)]^{2n+\beta}}\, d\mu_{n,n}(\zeta),$$

$$Z \in \mathbf{R}_{n,n}. \tag{3.35}$$

Далее, полагая $Z_0 = \Phi^{-1}(w_0) \in \mathbf{R}_{n,n}$, подберем $\rho_0 \in (0,1)$ таким образом, чтобы при $\rho_0 \leqslant \rho < 1$:

$$Z_0/\rho \in \mathbf{R}_{n,n} <=> w_0 \in \Phi(\rho\cdot\mathbf{R}_{n,n}) = \pi_{n,\rho}. \tag{3.36}$$

Затем при $\rho_0 < \rho < 1$ в (3.35) произведя замену переменной $\zeta \to \zeta/\rho$ и полагая $Z = Z_0/\rho$, приходим к равенству:

$$g(Z_0) = c_{n,n}(\beta)\cdot\rho^{2n^2}\cdot \int\limits_{\rho\cdot\mathbf{R}_{n,n}} \frac{g(\zeta)\cdot[\det(\rho^2\cdot I-\zeta\cdot\zeta^*)]^\beta\, d\mu_{n,n}(\zeta)}{[\det(\rho^2\cdot I-Z_0\cdot\zeta^*)]^{2n+\beta}},$$

$$\rho_0 < \rho < 1. \tag{3.37}$$

После этого при фиксированном ρ, $\rho_0 \leqslant \rho < 1$, в (3.37) подставим явное выражение (3.34) для функции $g(\zeta)$, в интеграле справа произведем замену переменной $\zeta = \Phi^{-1}(\omega)$, $\omega \in \pi_n$, притом не забудем положить $Z_0 = \Phi^{-1}(w_0)$. В результате после несложных преобразований получим следующую формулу:

$$f(w_0)\cdot[\det(w_0+i\cdot I)]^{2n+\beta} = c_{n,n}(\beta)\cdot\rho^{2n^2}\cdot\int\limits_{\pi_n} F_\rho(\omega)\, d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega)),$$

$$\rho_0 \leqslant \rho < 1, \tag{3.38}$$

где ради сокращения записи положено

$$F_\rho(\omega) = \frac{[\det(\rho^2\cdot I-\Phi^{-1}(\omega)\cdot\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(\rho^2\cdot I-\Phi^{-1}(w_0)\cdot\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{2n+\beta}} \times$$

$$\times f(\omega)\cdot[\det(\omega+i\cdot I)]^{2n+\beta}\cdot\chi_{n,\rho}(\omega), \ \omega \in \pi_n \tag{3.39}$$

и $\chi_{n,\rho}(\omega)$, $\omega \in \pi_n$, суть характеристическая функция области $\pi_{n,\rho}$, Далее, легко видеть, что существует такое $\delta \in (0, +\infty)$, при котором

$$|\det(\rho^2 \cdot I - Z_0 \cdot \zeta^*)| > \delta > 0 \tag{3.40}$$

равномерно по $\rho \in [\rho_0, 1]$ и $\zeta \in \rho \cdot \overline{R}_{n,n}$.

Таким образом, имеет место следующая оценка:

$$|F_\rho(\omega)| \leqslant \frac{[\det(\rho^2 \cdot I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{\delta^{2n+\beta}} \times$$

$$\times |f(\omega)| \cdot |\det(\omega + i \cdot I)|^{2n+\beta},$$

$$\rho_0 \leqslant \rho < 1, \ \omega \in \pi_{n,\rho}. \tag{3.41}$$

Кроме того, в силу следствия из теоремы 2.1, при $\rho_0 < \rho < 1$ и $\omega \in \pi_{n,\rho}$ имеем также

$$0 < [\det(\rho^2 \cdot I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)] < [\det(I - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]. \tag{3.42}$$

И поскольку $\beta > 0$, то на основании (3.41) и (3.42) приходим к неравенству

$$|F_\rho(\omega)| \leqslant \frac{[\det(I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{\delta^{2n+\beta}} \times$$

$$\times |f(\omega)| \cdot |\det(\omega + i \cdot I)|^{2n+\beta}, \ \omega \in \pi_n, \tag{3.43}$$

для всех $\rho \in [\rho_0, 1)$.

Из формул (3.5) и (3.7), в силу леммы 3.3, заключаем, что правая часть (3.43) из класса $L^1(\pi_n; d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega)))$, и, тем самым, для семейства функций $|F_\rho(\omega)|$ $(\rho_0 \leqslant \rho < 1)$ она является мажорантой, интегрируемой по области π_n относительно меры $d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega))$. Поэтому переходя в правой части формулы (3.38) к пределу при $\rho \uparrow 1$, мы на основе теоремы Лебега об ограниченной сходимости будем иметь:

$$f(w_0) \cdot [\det(w_0 + i \cdot I)]^{2n+\beta} = c_{n,n}(\beta) \cdot \int\limits_{\pi_n} f(\omega) \cdot [\det(\omega + i \cdot I)]^{2n+\beta} \times$$

$$\times \frac{[\det(I - \Phi^{-1}(\omega) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(I - \Phi^{-1}(w_0) \cdot \Phi^{-1}(\omega)^*)]^{2n+\beta}} d\mu_{n,n}(\Phi^{-1}(\omega)). \tag{3.44}$$

Остается заметить, что в силу формул (3.5)—(3.8) (см. лемму 3.1) равенство (3.44) в точности совпадает с (3.33), и, таким образом, теорема 3.1 установлена.

§ 4. Ограниченные проекторы

Оказывается, что введенные выше интегральные операторы $T_{n,\beta}$ являются ограниченными проекторами в весовых пространствах $L^p_\alpha(\pi_n)$ при определенных условиях, наложенных на параметры α и β. Точнее, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть $n\geqslant 1$, $1<p<+\infty$, $\alpha>p(n-1)-n$ и комплексное число β выбрано так:*

$$\operatorname{Re}\beta>(\alpha+n)/p-1. \tag{4.1}$$

Тогда оператор $T_{n,\beta}$ является ограниченным проектором из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$.

Доказательство. Прежде всего отметим два обстоятельства $(1\leqslant p<+\infty)$:

—если $\alpha>p(n-1)-n$, то тем более

$\alpha>\max\{-1;\ p(n-1)-(3n-1)\}$;

—если $\operatorname{Re}\beta>(\alpha+n)/p-1$, то $\beta\vdash(p,\alpha)$.

Допустим далее, что параметры p, α и β выбраны именно так, как это оговорено в формулировке теоремы 4.1. Тогда для произвольной функции $f\in L^p_\alpha(\pi_n)$ в силу следствия (а) леммы 3.4 функция $T_{n,\beta}f(w)$, $w\in\pi_n$, голоморфна в области матриц π_n. Поэтому, установив оценку вида

$$\|T_{n,\beta}f\|_{p,\alpha}\leqslant\text{const}\cdot\|f\|_{p,\alpha},\quad\forall f\in L^p_\alpha(\pi_n), \tag{4.2}$$

мы тем самым докажем ограниченность $T_{n,\beta}$, как линейного оператора из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$. Учитывая затем, что согласно теореме 3.1

$$f(w)\equiv T_{n,\beta}f(w),\ \forall f\in H^p_\alpha(\pi_n), \tag{4.3}$$

мы получим, что $T_{n,\beta}$ является ограниченным проектором из $L^p_\alpha(\pi_n)$ в $H^p_\alpha(\pi_n)$, то есть утверждение теоремы 4.1. Таким образом, дело сводится к установлению оценки (4.2).

С этой целью заметим, что для произвольной функции $f(\omega)\in L^p_\alpha(\pi_n)$ справедливо неравенство:

$$|T_{n,\beta}f(w)|\leqslant A_{n,\beta}\cdot\int\limits_{\pi_n}\frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-w)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}}\,d\mu_{n,n}(\omega),\quad w\in\pi_n, \tag{4.4}$$

где

$$A_{n,\beta}=|2^{n\cdot\beta}\cdot c_{n,n}(\beta)|\cdot\exp\{\pi\cdot n\cdot|\operatorname{Im}\beta|\}. \tag{4.5}$$

При $p=1$, на основании (4.4), теоремы Фубини и предложения 2.4, получаем следующую цепочку соотношений:

$$\|T_{n,\beta}f\|_{1,\alpha}=\int\limits_{\pi_n}|T_{n,\beta}f(w)|\cdot[\det(\operatorname{Im}w)]^\alpha\,d\mu_{n,n}(w)\leqslant$$

$$\leqslant A_{n,\beta}\cdot\int\limits_{\pi_n}[\det(\operatorname{Im}w)]^\alpha\,d\mu_{n,n}(w)\int\limits_{\pi_n}\frac{|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}}{|\det(\omega^*-w)|^{2n+\operatorname{Re}\beta}}\,d\mu_{n,n}(\omega)=$$

$$=A_{n,\beta}\cdot\int\limits_{\pi_n}|f(\omega)|\cdot[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\operatorname{Re}\beta}\times$$

$$\times \int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im} w)]^{\alpha}}{|\det(w^*-\omega)|^{2n+Re\beta}} d\mu_{n,n}(w)\, d\mu_{n,n}(\omega) =$$

$$= A_{n,\beta} \cdot \int\limits_{\pi_n} |f(\omega)| \cdot [\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta} \cdot \frac{J_n(\alpha, 2n+\operatorname{Re}\beta)}{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta-\alpha}} d\mu_{n,n}(\omega) =$$

$$= A_{n,\beta} \cdot J_n(\alpha, 2n+\operatorname{Re}\beta) \cdot \|f\|_{1,\alpha}. \tag{4.6}$$

Остается проверить, что $J_n(\alpha, 2n+\operatorname{Re}\beta) < +\infty$, а это согласно предложению 2.3 равносильно выполнению условий:

$$\alpha > -1,\ 2n+\operatorname{Re}\beta > 2n-1,\ 2n+\operatorname{Re}\beta-\alpha > 3n-1, \tag{4.7}$$

которые действительно имеют место в силу исходных предположений. Итак, при $p=1$ теорема доказана.

Если же $1 < p < +\infty$, то положив $q = p/(p-1)$, введем обозначения

$$d\nu(\omega) = [\det(\operatorname{Im}\omega)]^{\alpha}\, d\mu_{n,n}(\omega),\ \omega \in \pi_n; \tag{4.8}$$

$$Q(w, \omega) = \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta-\alpha}}{|\det(\omega^*-w)|^{2n+Re\beta}},\ w, \omega \in \pi_n. \tag{4.9}$$

С учетом введенных обозначений неравенство (4.4) принимает вид

$$|T_{n,\beta} f(w)| \leqslant A_{n,\beta} \cdot \int\limits_{\pi_n} Q(w, \omega) \cdot |f(\omega)|\, d\nu(\omega),\ w \in \pi_n,$$
$$\forall f \in L^p_\alpha(\pi_n). \tag{4.10}$$

Следовательно, если воспользоваться леммой Форелли-Рудина (см. [7]), то для установления оценки (4.2) достаточно указать заданную в области π_n положительную измеримую функцию g такую, что

$$\int\limits_{\pi_n} Q(w, \omega) \cdot [g(\omega)]^q\, d\nu(\omega) \leqslant \mathrm{const} \cdot [g(w)]^q,\ w \in \pi_n;$$

$$\int\limits_{\pi_n} Q(w, \omega) \cdot [g(w)]^p\, d\nu(w) \leqslant \mathrm{const} \cdot [g(\omega)]^p,\ \omega \in \pi_n.$$

В более подробной записи последние соотношения соответственно могут быть записаны в виде

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta}}{|\det(\omega^*-w)|^{2n+Re\beta}} [g(\omega)]^q\, d\mu_{n,n}(\omega) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const} \cdot [g(w)]^q,\ w \in \pi_n; \tag{4.11}$$

$$\int\limits_{\pi_n} \frac{[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{Re\beta-\alpha} \cdot |\det(\operatorname{Im} w)|^{\alpha}}{|\det(\omega^*-w)|^{2n+Re\beta}} [g(w)]^p\, d\mu_{n,n}(w) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const} \cdot [g(\omega)]^p,\ \omega \in \pi_n. \tag{4,12}$$

Эту функцию мы будем искать в виде

$$g(\omega)=[\det(\operatorname{Im}\omega)]^{-\left\{\frac{n-1}{q}+\varepsilon\right\}},\quad \omega\in T_n, \tag{4.13}$$

где $0<\varepsilon<+\infty$.

Из предложений 2.3 и 2.4 следует, что функция $g(\omega)$ вида (4.13) будет искомой, если одновременно имеют место следующие две совокупности условий:

$$\operatorname{Re}\beta-(n-1)-q\cdot\varepsilon>-1,\ 2n+\operatorname{Re}\beta>2n-1, \tag{4.14}$$
$$2n+\operatorname{Re}\beta-\{\operatorname{Re}\beta-(n-1)-q\cdot\varepsilon\}>3n-1;$$

$$\alpha-p\cdot\left(\frac{n-1}{q}+\varepsilon\right)>-1,\ 2n+\operatorname{Re}\beta>2n-1, \tag{4.15}$$

$$2n+\operatorname{Re}\beta-\left\{\alpha-p\cdot\left(\frac{n-1}{q}+\varepsilon\right)\right\}>3n-1.$$

После небольших упрощений эти же условия в своей совокупности принимают вид

$$\operatorname{Re}\beta>-1,\ \frac{\operatorname{Re}\beta-(n-2)}{q}>\varepsilon,\ \frac{\alpha+1}{p}-\frac{n-1}{q}>\varepsilon,$$
$$\varepsilon>\frac{n-1-\operatorname{Re}\beta+\alpha}{p}-\frac{n-1}{q}. \tag{4.16}$$

Поскольку условие $\operatorname{Re}\beta>-1$ выполнено в силу (4.1), то нам остается выбрать положительное число ε так, чтобы имели место и остальные неравенства (4.16). Для этого заметим, что в силу условий теоремы 4.1 справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\operatorname{Re}\beta-(n-2)}{q}>0,\ \frac{\alpha+1}{p}-\frac{n-1}{q}>0,$$
$$\frac{\operatorname{Re}\beta-(n-2)}{q}>\frac{n-1-\operatorname{Re}\beta+\alpha}{p}-\frac{n-1}{q}, \tag{4.17}$$
$$\frac{\alpha+1}{p}-\frac{n-1}{q}>\frac{n-1-\operatorname{Re}\beta+\alpha}{p}-\frac{n-1}{q}.$$

А из (4.17) уже следует возможность выбора $\varepsilon>0$, удовлетворяющего (4.16), следовательно, установлено существование функции g, удовлетворяющей интегральным неравенствам (4.11) и (4.12). Тем самым, теорема 4.1 доказана и при $1<p<+\infty$.

В заключение отметим, что для авторов остался открытым вопрос о возможности ослабления условий, налагаемых на параметры α и β в формулировках обеих основных теорем 3.1 и 4.1.

Поступила 21.VII.1989

Институт математики АН Армении

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Ինտեգրալ ներկայացումներ ընդհանրացված վերին կիսահարթությունում *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկված է ընդհանրացված վերին կիսահարթություն կոչվող π_n $(n\geq 1)$ մատրիցային տիրույթը, բաղկացած այն $n\times n$ չափսի ω մատրիցներից, որոնց $Im\,\omega \overset{def}{=} (\omega-\omega^*)/2i$ կեղծ մասը դրականորեն որոշված է։ Ներմուծված են π_n տիրույթում հոլոմորֆ և $L^p(\pi_n; [\det(Im\,\omega)]^\alpha\, d\mu_{n,n}(\omega))$ կշռային տարածություններին պատկանող f ֆունկցիաների $H^p_\alpha(\pi_n)$ դասերը $(0<p<+\infty, -\infty<\alpha<+\infty)$։ Ապացուցված է, որ եթե $1\leq p<+\infty$, $\alpha>\max\{-1; p(n-1)-(3n-1)\}$, ապա $H^p_\alpha(\pi_n)$ դասի ֆունկցիաները թույլ են տալիս ինտեգրալ ներկայացումներ հետևյալ վերարտադրող կորիզով.

$$\mathrm{const}\cdot\frac{[\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^\beta}{[\det(i(\omega^*-w))]^{2n+\beta}},\quad \mathrm{Re}\,\beta>\frac{\alpha+1}{p}-1\ (1<p<+\infty),$$
$$\mathrm{Re}\,\beta>\alpha\ (p=1).$$

Ցույց է տրված նաև, որ համապատասխան ինտեգրալ օպերատորը որոշակի պայմանների դեպքում հանդիսանում է սահմանափակ պրոյեկտոր։

M. M. DJRBASHIAN, A. H. KARAPETIAN. *Integral representatons in a generalized upper half-plane* (summary)

In the paper a matrix domain π_n $(n\geq 1)$ consisting of all $n\times n$—matrices ω with positively determined imaginary part $\mathrm{Im}\,\omega=(\omega-\omega^*)|2i$ (the so-called generalized up per half-plane) is considered. The classes $H^p_\alpha(\pi_n)$ $(0<p<+\infty, -\infty<\alpha<+\infty)$ of holomorphic functions $f(\omega)$, $\omega\in\pi_n$, from the weighted spaces $L^p(\pi_n; [\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^\alpha\, d\mu_{n,n}(\omega))$ are introduced, where $\mu_{n,n}$ $(n\geq 1)$ denotes the Lebesgue measure on the set of all complex $n\times n$—matrices. It is proved that for $p\in[1,+\infty)$ and $\alpha>\max\{-1; p(n-1)-(3n-1)\}$ the functions in the class $H^p_\alpha(\pi_n)$ admit an integral representations with the reproducing kernel

$$\mathrm{const}\cdot\frac{[\det(\mathrm{Im}\,\omega)]^\beta}{[\det(i(\omega^*-w))]^{2n+\beta}},\quad \mathrm{Re}\,\beta>\frac{\alpha+1}{p}-1\quad(1<p<+\infty),$$
$$\mathrm{Re}\,\beta\geq\alpha\ (p=1).$$

It is established also, that under certain conditions the corresponding integra eperator is a bounded projection.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О представимости некоторых классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН АрмССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. Ин-та матем. и механики АН АрмССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *M. M. Džarbašjan.* Survey of some achievements of Armenian mathematicians in the theory of integral representations and factorization of analytic functions, Математички Весник (Югославия), 39. 1987, 263—282.
4. *М. М. Джрбашян.* Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений, Изв. АН АрмССР, «Математика», 23, № 6, 1988, 517—545.
5. *A. E. Djrbashian F. A. Shamoian.* Topics in the theory of A^p_α spaces, TEUBNER-TEXTE zur Mathematik, 105. Leipzig, 1988.
6. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., ИЛ, 1959.
7. *F. Forelli, W. Rudin.* Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Ind. Univ. Math. J., 24, № 6, 1974, 593—602.
8. *M. Stoll.* Mean value theorems for harmonic and holomorphic functions on bounded symmetric domains, J. reine und angew. Math., 290, 1977, 191—198.

9. *М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян*. Интегральные представления в обобщенном единичном круге, ДАН СССР, 312, № 1, 1990, 24—27.

10. *М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян*. Интегральные представления в обобщенном единичном круге, Изв. АН АрмССР, «Математика», 24, № 6, 1989, 523—546.

11. *С. Г. Гиндикин*. Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.

12. *R. R. Coifman, R. Rochberg*. Representations theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p, Astérisque, 77, 1980, 11—66.

13. *М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян*. Интегральные представления для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости, ДАН СССР, 285, № 3, 1985, 547—550.

14. *М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян*. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля, Изв. АН АрмССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 399—405.

15. *Б. В. Шабат*. Введение в комплексный анализ, ч. II, М., Наука, 1985.