ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 5, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.984.54

Т. Н. АРУТЮНЯН

ФУНКЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Рассмотрим каноническую систему уравнений Дирака на полуоси

$$ly \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ B\frac{d}{dx} + Q(x) \right\} y = \lambda y, \quad 0<x<\infty, \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{1}$$

где

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а p и q—действительные, локально суммируемые функции, т. е.

$$p, q \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty; R). \tag{2}$$

Через $D(Q, \alpha)$ будем обозначать самосопряженное расширение оператора, порожденного дифференциальным выражением l на множестве гладких, финитных (справа) вектор-функций, удовлетворяющих краевому условию

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in R. \tag{3}$$

Будем предполагать, что спектры операторов $D(Q, \alpha)$ (чисто) дискретные, т. е. состоят только из собственных значений (с. з.) $\lambda_n(\alpha)$ (по поводу достаточных условий см. [1]—[3]). Заметим, что если при некотором $\alpha=\alpha_0$ спектр оператора $D(Q, \alpha_0)$ дискретен, то дискретны спектры операторов $D(Q, \alpha)$ при всех действительных α.

Известно [1], что при условии (2) существует единственное (среди линейно независимых) решение $u(x, \lambda)$ системы (1), принадлежащее $L^2(0, \infty; C^2)$ при $Im\lambda \neq 0$ (решение Г. Вейля). При условии чистой дискретности спектра решение Г. Вейля можно выбрать таким (среди линейно зависимых), чтобы его компоненты $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ были целыми функциями параметра λ (при любом фиксированном $x \in [0, \infty)$) и для любого с. з. $\lambda_n(\alpha)$, $u(\cdot, \lambda_n(\alpha)) \in L^2(0, \infty; \mathbf{C}^2)$ (см. [1], [4]).

В дальнейшем важную роль играет следующая нумерация собственных значений. Сначала пронумеруем с. з. $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ оператора $D\left(Q, \frac{\pi}{2}\right)$ в порядке возрастания, причем через $\lambda_0\left(\frac{\pi}{2}\right)$ обозначим наименее удаленное от нуля неположительное с. з., т. е.

$$\cdots\ \lambda_{-n}\left(\frac{\pi}{2}\right)<\lambda_{-n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)<\cdots<\lambda_0\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant 0<\lambda_1\left(\frac{\pi}{2}\right)<\cdots,\ n=1,2,\cdots \tag{4}$$

(известно, что все с. з. простые [1] и оператор Дирака неполуограничен [1], [2], [5]). Далее, дадим нумерацию $\lambda_n(\alpha)$ для $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Для этого рассмотрим функцию

$$m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda)=\frac{u_1(0,\lambda)\cos\alpha+u_2(0,\lambda)\sin\alpha}{u_2(0,\lambda)},\quad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \tag{5}$$

где $u(x,\lambda)$—решение Г. Вейля. Легко видеть, что нули числителя есть с. з. $\lambda_n(\alpha)$, а нули знаменателя—с. з. $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Поскольку и числитель и знаменатель в (5) есть целые функции и (см. [6])

$$\operatorname{Im}\{m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda)\}=\frac{\int\limits_0^\infty |u(x,\lambda)|^2dx\cos\alpha}{|u_2(0,\lambda)|^2}\operatorname{Im}\lambda,$$

то $m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda)$ есть вещественная (т. е. $\operatorname{Im}\{\operatorname{Im}_{\frac{\pi}{2}}\alpha)\}=0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$) мероморфная функция, переводящая верхнюю полуплоскость в верхнюю. Известна (см. [7])

Теорема 0. Чтобы некоторая вещественная мероморфная функция переводила верхнюю полуплоскость в верхнюю, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде

$$m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda)=c\frac{\lambda-a_0}{\lambda-b_0}\Pi'\left(1-\frac{\lambda}{a_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{b_k}\right)^{-1}, \tag{6}$$

где

$$b_k<a_k<b_{k+1},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\ a_{-1}<0<b_1, \tag{7}$$

и $c>0$. Штрих при знаке бесконечного произведения означает, что индекс k принимает все целые значения, кроме нуля.

Из этой теоремы следует, что в формулах (6) и (7) мы можем принять $a_k=\lambda_k(\alpha)$ и $b_k=\lambda_k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и что при $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)<\lambda\ (\alpha)<\lambda_{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad n\in Z, \tag{8}$$

т. е. то единственное с. з. оператора $D(Q,\alpha)$, которое лежит между $\lambda_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\lambda_{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, мы пронумеровали номером n. Для всех остальных действительных чисел γ (которые, очевидно, можно представить в виде $\gamma=\alpha-\pi m$, где $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $m\in Z$) мы примем следующую нумерацию:

$$\lambda_n(\gamma)=\lambda_n(\alpha-\pi m)=\lambda_{n+m}(\alpha),\ n,\ m\in \mathbf{Z}, \tag{9}$$

где $\lambda_k(\alpha)$ для $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ уже пронумерованы через (4) и (8).

Из периодичности (с периодом π) краевого условия (3) очевидно следует, что нумерация (4), (8), (9) непротиворечива. Таким образом, каждое собственное значение λ_n мы рассматриваем как функцию (от параметра α, входящего в краевое условие (3)), определенную на всей действительной оси.

Определение. Функция $\lambda(\gamma)$ действительной переменной γ называется функцией собственных значений семейства операторов $\left\{D(Q,\alpha),\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}$ (коротко ФСЗ), если для любого $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и любого $m\in\mathbf{Z}$

$$\lambda(\alpha-\pi m)=\lambda_m(\alpha), \tag{10}$$

где $\lambda_m(\alpha)$ пронумерованы согласно (4) и (8).

Из (9) легко видеть, что свойством (10) обладает $\lambda_0(\gamma)$, т. е. существование ФСЗ очевидно.

Обозначим еще через $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ решение задачи Коши

$$l\varphi=\lambda\varphi,\ \varphi(0,\lambda,\alpha)=\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbf{R}. \tag{11}$$

Если спектр оператора $D(Q,\alpha)$ дискретный, то из единственности решения задачи Коши следует, что $\varphi(x,\lambda_n(\alpha),\alpha)$ есть собственные функции оператора $D(Q,\alpha)$. Числа

$$a_n(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\|\varphi(\cdot,\lambda_n(\alpha),\alpha)\|^2\overset{\text{def}}{=}\int_0^{\pi}\{|\varphi_1(x,\lambda_n(\alpha),\alpha)|^2+|\varphi_2(x,\lambda_n(\alpha),\alpha)|^2\}dx$$

называются нормировочными постоянными.

Теорема 1. *Функция собственных значений $\lambda(\gamma)$ есть вещественная аналитическая функция. Ее производная обладает свойством*

$$\left.\frac{\partial\lambda(\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha-\pi m}=-\frac{1}{a_m(\alpha)},\ \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ m\in\mathbf{Z}. \tag{12}$$

Существует $\alpha_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *такое, что* $\lambda(\alpha_0)=0$.

Для доказательства рассмотрим функцию

$$F(\lambda,\gamma)=u_1(0,\lambda)\cos\gamma+u_2(0,\lambda)\sin\gamma.$$

Очевидно, что $F(\lambda,\gamma)$ есть целая функция двух комплексных переменных λ и γ. Пусть $\alpha_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\gamma_0=\alpha_0-\pi m$, где m—произвольное целое число, а λ_0 есть значение ФСЗ в точке γ_0, т. е. $\lambda_0=\lambda(\alpha_0-\pi m)=$ $=\lambda_m(\alpha_0)$. Тогда из леммы:

Лемма 1 (о предельной точке). *При условии (2) для любого комплексного λ существует не более одного линейно независимого решения системы (1), принадлежащего $L^2(0,\infty;\mathbb{C}^2)$,*

доказательство которой мы опускаем и из того факта, что $\varphi(\cdot,\lambda_0,\alpha_0)=$ $=\varphi(\cdot,\lambda_m(\alpha_0),\alpha_0)\in L^2$, следует, что $u(\cdot,\lambda_0)$ линейно зависимо с $\varphi(\cdot,\lambda_m(\alpha_0),\alpha_0)$ и, в частности

$$u(0,\lambda_0)=c\,\varphi(0,\lambda_m(\alpha_0),\alpha_0)=c\begin{pmatrix}\sin\alpha_0\\-\cos\alpha_0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\sin\gamma_0\\-\cos\gamma_0\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $c_1=\pm c\neq 0$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial F(\lambda,\gamma_0)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}=\frac{\partial u_1(0,\lambda_0)}{\partial\lambda}\cos\gamma_0+\frac{\partial u_2(0,\lambda_0)}{\partial\lambda}\sin\gamma_0=$$

$$=-\frac{1}{c_1}\left(\frac{\partial u_1(0,\lambda_0)}{\partial\lambda}u_2(0,\lambda_0)-\frac{\partial u_2(0,\lambda_0)}{\partial\lambda}u_1(0,\lambda_0)\right). \tag{14}$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial u_1(0,\lambda_0)}{\partial\lambda}u_2(0,\lambda_0)-\frac{\partial u_2(0,\lambda_0)}{\partial\lambda}u_1(0,\lambda_0)=\int_0^\infty|u(x,\lambda_0)|^2\,dx. \tag{15}$$

В процессе доказательства леммы 2 мы используем непрерывность ФСЗ $\lambda(\gamma)$, которая доказывается на основе строгой убываемости функции $\lambda(\gamma)$. Строгое убывание $\lambda(\gamma)$ доказывается так же, как и неравенства (8) (перемежаемость) на основе теоремы О, где вместо $m_{\frac{\pi}{2}}(\lambda)$ рассматривается функция

$$m_\beta(\lambda)=\frac{u_1(0,\lambda)\cos\alpha+u_2(0,\lambda)\sin\alpha}{u_1(0,\lambda)\cos\beta+u_2(0,\lambda)\sin\beta},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta\leq\frac{\pi}{2}.$$

Из (13), (14) и (15) следует, что $F(\alpha_0,\gamma_0)=0$ и $\dfrac{\partial F(\lambda_0,\gamma_0)}{\partial\lambda}\neq 0$.

Отсюда, согласно теореме о неявной функции (см., например, [8], стр. 166), следует, что для любой точки $\gamma_0\in\mathbb{R}$ существует некоторая ее окрестность $V_i\subset\mathbb{C}$, в которой единственным образом определена аналитическая функция $\lambda=\lambda(\gamma)$, которая для действительных γ совпадает с ФСЗ $\lambda=\lambda(\gamma)$). Так как на пересечении любых двух пересекающихся таких окрестностей V_1 и V_2 эти однозначные аналитические функции совпадают, то, в силу единственности аналитического продолжения, существует единственная аналитическая функция в некоторой комплексной окрестности действительной оси $\mathbb{R}$, которая совпадает с ФСЗ $\lambda(\gamma)$ $\mathbb{R}$. Таким образоэм, доказано первое предложение теоремы 1.

Для доказательства (12) заметим, что из определения $\varphi(\chi,\lambda,\alpha)$ как решения задачи Коши (11) легко получается тождество $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Big)$

$$[\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)]\,(\varphi(\cdot,\lambda_n(\alpha),\alpha),\ \varphi(\cdot,\lambda_n(\beta),\beta))=\sin(\beta-\alpha), \tag{16}$$

где (f, g)—скалярное произведение в $L^2(0, \infty; C^2)$. Можно доказать также, что $(\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha), \varphi(\cdot, \lambda_n(\beta), \beta)) \to (\varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha), \varphi(\cdot, \lambda_n(\alpha), \alpha))$ при $\beta \to \alpha$. Учитывая, что $\lambda_n(\alpha)-\lambda_n(\beta)=\lambda(\alpha-\pi n)-\lambda(\beta-\pi n)$, разделим обе стороны (16) на $\alpha-\beta$ и устремим $\beta\to\alpha$.
Так из (16) получим

$$\left.\frac{\partial\lambda(\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha-\pi n}=-\frac{1}{\|\varphi(\cdot,\lambda_n(\alpha),\alpha)\|^2}=-\frac{1}{a_n(\alpha)}.$$

Из аналитичности (достаточно здесь непрерывности) ФСЗ $\lambda(\gamma)$ следует, что, при изменении γ на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ она принимает все значения от $\lambda_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\lambda_1\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ до $\lambda_0\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant 0$. Следовательно, существует точка $\alpha_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ такая, что $\lambda(\sigma_0)=0$. Теорема 1 доказана.

Из неполуограниченности множества с. з. следует, что значения ФСЗ заполняют всю действительную ось, из чего, в свою очередь, следует, что $u(\cdot, \lambda)\in L^2(0,\infty; C^2)$ при любом действительном λ.

В дальнейшем будем использовать обозначения $\lambda(\gamma)=\lambda(Q, \gamma)$, чтобы подчеркнуть зависимость ФСЗ от «потенциальной» матрицы Q. Аналитичность ФСЗ подсказывает следующую теорему единственности в обратной задаче:

Теорема 2. *Пусть спектры операторов $D(Q_1, \alpha)$ и $D(Q_2, \alpha)$ чисто дискретны и пусть $\lambda(Q_1, \gamma_k)=\lambda(Q_2, \gamma_k)$, $k=1,2,3,\cdots$, где $\{\gamma_k\}$—сходящаяся последовательность. Тогда $Q_1(x)=Q_2(x)$ почти всюду.*

Для доказательства этой теоремы мы используем теорему единственности «по двум спектрам»:

Теорема 3. Пусть $\lambda_n(Q_1, \alpha_0)=\lambda_n(Q_2, \alpha_0)$ и $\lambda_n(Q_1, \beta_0)=\lambda_n(Q_2, \beta_0)$ для всех $n\in Z$, $\alpha_0\neq\beta_0$, $\alpha_0, \beta_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $Q_1(x)=Q_2(x)$ почти всюду, доказательство которой можно провести почти дословно так же, как доказательство аналогичной теоремы для операторв Штрума-Лиувилля [9], и которое, в свою очередь, опирается на теорему единственности по спектральной функции, формулировка (в терминах ФСЗ удобная формулировка такова: из $\lambda(Q_1, \alpha_0-\pi n)=\lambda(Q_2, \alpha_0-\pi n)$ и $\left.\frac{\partial\lambda(Q_1,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha_0-\pi n}=$ $=c\left.\frac{\partial\lambda(Q_2,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\alpha_0-\pi n}$ для всех $n\in Z$ следует, что $c=1$ и $Q_1(x)=Q_2(x)$ почти всюду) и доказательство которой также совершенно аналогичны случаю оператора Штурма-Лиувилля [9].

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Пусть $u(x,\lambda)$ есть решение Г. Вейля системы $Bu'+Q_1(x)u=\lambda u$, а $v(x,\lambda)$ — аналогичное решение системы $Bv'+Q_2(x)v=\lambda v$. Рассмотрим целую функцию

$$f(\lambda)=u_1(0,\lambda)\,v_2(0,\lambda)-u_2(0,\lambda)\,v_1(0,\lambda).$$

Согласно условию теоремы 2 функция $f(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda=\lambda_k=\lambda(Q_1,\gamma_k)=\lambda(Q_2,\gamma_k)$, ибо при этих значениях λ обе функции (u и v) удовлетворяют одному и тому же краевому условию (3) с $\alpha=\gamma_k$ (см. (13)). Поскольку последовательность $\{\gamma_k\}$ сходится, то сходится и последовательность $\{\lambda_k\}$. Следовательно, целая функция $f(\lambda)$ тождественно равна нулю. Поэтому она равна нулю, в частности, на спектрах $\{\lambda_n(Q_1,0),\ n\in\mathbf{Z}\}$ и $\{\lambda_n(Q_1,\frac{\pi}{2}),\ n\in\mathbf{Z}\}$. Но согласно (13),

$$u(0,\lambda_n(Q_1,0))=\begin{pmatrix}0\\ c_n\end{pmatrix},\quad u\left(0,\lambda_n\left(Q_1,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\begin{pmatrix}d_n\\ 0\end{pmatrix},\ \text{где } c_n\neq 0,\ d_n\neq 0.$$

Из этого и из $f(\lambda)\equiv 0$ теперь следует, что $v_1(0,\lambda_n(Q_1,0))=0$ и $v_2\left(0,\lambda_n\left(Q_1,\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$ для всех $n\in Z$, а это значит (поскольку $v(\cdot,\lambda)\in L^2$ при всех действительных λ), что спектр $\{\lambda_n(Q_1,0),\ n\in\mathbf{Z}\}$ оператора $D(Q_1,0)$ содержится в спектре $\{\lambda_n(Q_2,0),\ n\in\mathbf{Z}\}$ оператора $D(Q_2,0)$. Аналогично в случае $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Но поменяв местами $D(Q_1,0)$ и $D(Q_2,0)$ мы получим обратное включение. Аналогично для операторов

$$D\left(Q_1,\frac{\pi}{2}\right)\ \text{и}\ D\left(Q_2,\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом получили, что $\lambda_n(Q_1,0)=\lambda_n(Q_2,0)$ и $\lambda_n\left(Q_1,\frac{\pi}{2}\right)=\lambda_n\left(Q_2,\frac{\pi}{2}\right)$ для всех $n\in\mathbf{Z}$. Согласно теореме 3 отсюда следует, что $Q_1(x)=Q_2(x)$ почти всюду. Теорема 2 доказана. Отметим, что аналогичная теорема единственности для обратной задачи Штурма-Лиувилля на $[0,1]$ доказана впервые в [10]. Заметим также, что теоремы типа 1 и 2 можно доказать совершенно аналогично и для регулярного оператора Дирака на конечном интервале.

Ереванский государственный
университет

Поступила 12.I. 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* Введение в спектральную теорию, «Наука», М., 1970.
2. *В. В. Мартынов.* Прямые методы качественного спектрального анализа несамосопряженной системы дифференциальных уравнений первого порядка, дифф. уравнения, 4, № 8, № 12, 1960, 1494—1508, 2243—2257.
3. *D. B. Hinton, J. K. Shaw.* Dirac systems with discrete spectra, Canad. J Math., XXXIX, 1, 1987, 100—122.
4. *D. B. Hinton, J. K. Shaw.* On the spectrum of singular Hamiltonian system Quaestiones Math., 5, 1982, 29—81.
5. *В. А. Яврян.* Об асимптотике спектральной матрицы-функции канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН Арм. ССР, 56, № 3, 1973, 129—134.
6. *Т. Н. Арутюнян.* Обратная задача для канонической системы Дирака с дискретным спектром, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XX, № 4, 1985, 245—268.
7. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, «Гостехиздат», 1956.
8. *Ю. Н. Бибиков.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, изд-во ЛГУ, 1981.
9. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, 1, Труды ММО, 1, 1952, 327—420.
10. *J. R. McLaughlin, W. Rundell.* A uniqueness theorem for an inverse Sturm—Liouville problem, J. Math. Phys., 28, 7, 1987, 1471—72.