ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 5, 1990 Математика

УДК 517.53

Г. А. БАРСЕГЯН, В. Г. ПЕТРОСЯН

СООТНОШЕНИЯ ТИПА ТОЖДЕСТВА КАРТАНА ДЛЯ ВЕЛИЧИН, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Основные результаты, следствия, обсуждения

Мы полагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений (см. [1]).

В теории распределения значений мероморфных функций в качестве меры близости мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a \in \mathbf{C}$ рассматривается обычно неванлинновская функция приближения ($z = re^{i\varphi}$)

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|}\, d\varphi.$$

С конца шестидесятых годов активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a, величина

$$L(r, a) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a|}.$$

Установлены многочисленные аналоги в поведении функций $L(r, a)$ и $m(r, a)$, составляющие сегодня предмет теории роста В. П. Петренко (см. [2]), в которой, между тем, до сих пор отсутствовал аналог известного тождества Картана, эквивалентного следующему соотношению (см. [3]):

$$\int_0^{2\pi} m(r, e^{i\theta})\, d\theta = o[T(r)], \ r \to \infty,$$

где $T(r)$ — характеристическая функция Р. Неванлинны.

В работах по теории мероморфных функций получение окончательных результатов зачастую упирается в оценки логарифмических производных функций $w(z)$, которые, однако, рассматривались как вспомогательные, технические средства (см. [1], [2], [4]—[6]). Между тем в [7] было установлено, что следующие интегралы от логарифмических производных

$$P(r, a) \overset{\text{def}}{=} r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi, \ \Delta(r, a) = \{z : |z| = r;\ |w(z) - a| \leqslant 1\},$$

обнаруживают свойства, аналогичные свойствам функций $m(r, a)$, т. е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны и, соответственно, аналог соотношения дефектов. Как следствия, получаются обобщения некоторых известных результатов В. П. Петренко и В. Фукса из [2] и [4].

Тем самым указанные интегралы становятся объектом самостоятельного изучения. На актуальность изучения таких объектов указывает, кроме всего, следующее простое предложение: если мероморфная в $|z| < \infty$ функция $w(z)$ имеет по крайней мере два исключительных в смысле Петренко значения, т. е. существуют значения a_1 и a_2, для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \beta(a, w) = \lim_{r\to\infty}\left(\max_{|z|=r}\ln^+\frac{1}{|w(z)-a|}/T(r)\right),$$

то для любого $a \in C$ и r справедливы неравенства $(z = re^{i\varphi})$

$$m(r, a) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta(r,a)}\ln\frac{1}{|w(z)-a|}\,d\varphi \leqslant \max_{|z|=r}\ln^+\frac{1}{|w(z)-a|} <$$

$$< \int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\frac{1}{|w(z)-a|}\right|d\varphi + O(1),\ r\to\infty, \tag{1}$$

$$\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\frac{1}{|w(z)-a|}\right|d\varphi \leqslant r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-a}\right|d\varphi. \tag{2}$$

В настоящей работе устанавливаются соотношения типа тождества Картана для величин $P(r, a)$ и, как следствие, аналогичное соотношение в теории роста В. П. Петренко.

В дальнейшем через $K(\beta)$ обозначим постоянные, зависящие от β.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; $\varphi(r)$ — монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r\to\infty$ $(\varphi^{35}(r) < A(r))$, где $A(z)$ — сферическая характеристика Л. Альфорса: $\beta = \mathrm{const} > 1$. Тогда на некоторой неограниченной последовательности значений r выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^{2\pi} P(r, e^{i\psi})\,d\psi \leqslant K(\beta)\,\varphi^8(\beta r)\,A^{2/3}(\beta r)\ln r + o[A(\beta r)],\ r\to\infty. \tag{3}$$

Следствие 1. *Если $|A(r)/\ln^{10} r| \to \infty$ при $r\to\infty$ (в частности, если нижний порядок λ функции $w(z)$ больше нуля), то на некоторой неограниченной последовательности значений r выполняется соотношение*

$$\int\limits_0^{2\pi} P(r, e^{i\psi})\,d\psi = o[A(\beta r)],\ r\to\infty. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция, существуют значения a_1 и a_2 такие, что $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$; $\varphi(r) \uparrow +\infty$ при $r\to\infty$ $(\varphi^{35}(r) < A(r))$: $\beta = \mathrm{const} > 1$. Тогда неравенство (3) можно заменить следующим неравенством:*

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\psi})\, d\psi \leqslant K(\beta)\, \varphi^8(\beta r)\, A^{2/3}(\beta r) \ln 2 + o[A(\beta r)], \quad r \to \infty. \tag{5}$$

Следствие 2. *Если* $\{A(r)/\ln^{10} r\} \to \infty$ *при* $r \to \infty$ *(в частности, если нижний порядок* λ *функции* $w(z)$ *больше нуля), то* (5) *можно заменить следующим соотношением:*

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\psi})\, d\psi = o[A(\beta r)], \quad r \to \infty. \tag{6}$$

Далее устанавливается одна модификация теоремы 1, в которой фигурируют площади множеств, в которых $w(z)$ близко к a.

Такого рода множества встречаются в различных ситуациях, в частности при установлении оценок величин $\sum\limits_{(a)} \delta^{\alpha}(a)$, $\sum\limits_{(a)} \beta^{\alpha}(a)$.

Теорема 3. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* $|z| < \infty$ *функция,* $\beta = \text{const} > 1$, $\varepsilon > 0$. *Тогда неравенство* (3) *теоремы 1 можно заменить следующим неравенством:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(r, e^{i\psi})\, d\psi}{[S_\beta(r, e^{i\psi})]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} < K(\varepsilon, \beta)\, r^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + o[A(\beta r)], \quad r \to \infty, \tag{7}$$

где

$S_\beta(r, e^{i\psi}) = \int\limits_{r/\beta}^{\beta r} \int\limits_{\Delta(t,\, e^{i\psi})} d\sigma$, $d\sigma$ — *элемент площади,* $K(\varepsilon, \beta)$ — *постоянная, зависящая от* ε *и* β.

§ 1. Вспомогательные результаты

Для доказательства теорем 1, 2 и 3 воспользуемся вспомогательными леммами, доказательства двух из которых базируются на следующем результате (см. [8], теорема 1.2).

Теорема А. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* $|z| < \infty$ *функция;* $\varphi(r) \uparrow +\infty$ *при* $r \to \infty$ $(\varphi^{35}(r) < A(r))$. *Тогда в круге* $|z| \leqslant r$ *можно указать* $\Phi(r)$ *попарно непересекающихся областей* $\tilde{E}_i(r)$, $i = 1, 2, \cdots, \Phi(r)$, *для которых справедливы следующие утверждения:*

I. $$|\Phi(r) - A(r)| = o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \overline{\in} E, \tag{1.1}$$

где E — *некоторое множество конечной логарифмической меры.*

II. *В каждой области* $\tilde{E}_i(r)$ *функция* $w(z)$ *одноместна; для каждой точки, принадлежащей* $\partial E_i(r)$, *существует некоторая ее окрестность, в которой* $w(z)$ *одноместна; замыкание множества* $w(E_i(r))$, *стереографически отображенное на риманову сферу, совпадает со сферой с некоторым числом* $\tilde{k}_i$, *исключенных из сферы односвязных областей* $\tilde{\Delta}_j$, $j = 1, 2, \cdots, \tilde{k}_i$.

III. $\rho(\tilde{\Delta}_j^i) \leqslant 1/\varphi(z),\ i=1, 2, \cdots, \Phi(r), j=1, 2, \cdots, \tilde{k}_i,$ (1.2)

где $\rho(\tilde{\Delta}_j^i)$ — *диаметр области* $\tilde{\Delta}_j^i$ *в сферической метрике* $r\overline{\in}E$.

IV. $\sum_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{k}_i < 4A(r) + o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in}E.$ (1.3)

V. $d(\tilde{E}_i(r)) \leqslant K\varphi^8(r)/A^{1/2}(r),\ i=1, 2, \cdots, \Phi(r),$ (1.4)

где K — *постоянная, не зависящая от* $w(z)$, $d(\tilde{E}_i(r)$ — *диаметр области* $\tilde{E}_i(r)$.

Теорема А представляет собой обобщенную формулировку свойства близости a-точек мероморфной функции $\omega(z)$, устанавливающую, что для «хороших» значений a и b a-точки и b-точки функции $w(z)$ близко располагаются друг от друга (поскольку они лежат в малых областях $\tilde{E}_i(r)$). Тем самым теорема А включает в себя ряд основных результатов теории распределения значений, устанавливающих, что близки количества таких a-точек и b-точек. В [9] приводилась схема применения этого свойства, одной из реализаций которой являются результаты данной работы.

Обозначим, соответственно, через $n(r, a)$ и $n(r, b)$ — количество a-точек и b-точек функции $w(z)$ в круге $|z| < r$, через $n^*(r, a)$ и $n^*(r, b)$ — количество a-точек и b-точек в области $\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{E}_i(r)$, через $n^{**}(r, a)$ и $n^{**}(r, b)$—количество a-точек и b-точек в области $\{|z| < r\} \setminus \setminus \left\{\bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{E}_i(r)\right\}$, а через $n^*(r, a, b)$ — количество тех a-точек $z_k(a) \in \in \tilde{E}_k(r) \subset \bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \tilde{E}_i(r)$, для каждой из которых находится b-точка $z_k(b)$ из $\tilde{E}_k(r)$.

Очевидно, что

$$n(r, a) = n^*(r, a, b) + [n^*[r, a) - n^*(r, a, b)] + n^{**}(r, a), \tag{1.5}$$

$$n(r, b) = n^*(r, a, b) + [n^*(r, b) - n^*(r, a, b)] + n^{**}(r, b). \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\Delta^*(r, \rho) = \int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta,\ \rho > 0,$$

$$\Delta^*(r, \rho_1, \rho_2) = \int_0^{2\pi} n^*(r, \rho_1 e^{i\vartheta}, \rho_2 e^{i\vartheta})\, d\vartheta,\ \rho_1 > 0,\ \rho_2 > 0.$$

Лемма 1. *Справедливы следующие неравенства:*

$$2\pi\Phi(r) - o[A(r)] < \Delta^*(r, \rho) < 2\pi\Phi(r),\ r\to\infty,\ r\overline{\in}E, \tag{1.7}$$

$$2\pi\Phi(r) - o[A(r)] \leqslant \Delta^*(r, \rho_1, \rho_2) \leqslant 2\pi\Phi(r),\ r\to\infty,\ r\overline{\in}E. \tag{1.8}$$

где E — некоторое множество конечной логарифмической меры.

Доказательство. Величина $\int\limits_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta})\rho d\vartheta$ показывает суммарную длину всех линий, лежащих на поверхностях $w(\widetilde{E}_j(r))$, $j=1, 2, \cdots, \Phi(r)$, проекции которых лежат над $\{w : |w|=\rho\}$. Определим величину $n_j^*(r, \rho e^{i\vartheta})$ равной нулю, если ни одна $\rho e^{i\vartheta}$-точка не принадлежит $\widetilde{E}_j(r)$, и равной единице, если существует $\rho e^{i\vartheta}$-точка принадлежащая $\widetilde{E}_j(r)$.

Поскольку $w(z)$ однолистна в каждой из областей $\widetilde{E}_j(r)$, то выполняется

$$n^*(r, \rho e^{i\vartheta}) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} n_j^*(r, \rho e^{i\vartheta}) \tag{1.9}$$

и, следовательно,

$$\Delta^*(r, \rho) = \sum_{j=1}^{\Phi(r)} \int\limits_0^{2\pi} n_j^*(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta < 2\pi\Phi(r),$$

т. е. правую часть неравенства (1.7).

По теореме А стереографическая проекция можества $\overline{w(\widetilde{E}_j(r))}$ на риманову сферу совпадает со сферой за исключением $\widetilde{k}_j$ штук односвязных областей $\widetilde{\Delta}_l^j$ $(l=1, 2, \cdots, \widetilde{k}_j)$, сферические диатетры которых меньше $1/\varphi(r)$. Обозначим $\widetilde{\Delta}_{l,\rho}^j$ проекции на плоскость тех областей $\widetilde{\Delta}_l^j$, которые пересекаются с $\{w : |w|=\rho\}$; $\overline{k}_{j,\rho}$ — их количество. Тогда ясно, что

$$\int\limits_0^{2\pi} n_j^*(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta \geqslant 2\pi - \frac{1}{\rho}\sum_{l=1}^{\overline{k}_{j,\rho}} d(\overline{\Delta}_{l,\rho}^j). \tag{1.10}$$

Из геометрических рассуждений ясно, что при $r > r_0$ (т. е. достаточно большом $\varphi(r)$).

$$d(\overline{\Delta}_{l,\rho}^j) < (\rho+2)^2/\varphi(r),\ l=1, 2, \cdots, \overline{k}_{j,\rho} \tag{1.11}$$

(используется формула $[w, a] = \dfrac{|w-a|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|a|^2}}$, показывающая сферическое расстояние между w и a).

Из неравенств (1.10) и (1.11) получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} n_j^*(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta \geqslant 2\pi - \frac{\overline{k}_{j,\rho}(\rho+2)^2}{\rho\varphi(r)} \geqslant 2\pi - \frac{\overline{k}_j(\rho+2)^2}{\rho\varphi(r)}.$$

Следовательно, согласно (1.9) имеем

$$\int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta \geqslant 2\pi(r) - \frac{(\rho+2)^2}{\rho\varphi(r)} \sum_{j=1}^{\Phi(r)} k_j.$$

Отсюда, используя неравенство (1.3), получаем

$$\int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta \geqslant 2\pi\Phi(r) - o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E,$$

т. е. левую часть неравенса (1.7).

Доказательство неравенства (1.8) следует из геометрического смысла $\Delta^*(r, \rho_1, \rho_2)$ и теоремы А.

Обозначим

$$\Delta^{**}(r,\rho) = \int_0^{2\pi} n^{**}(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta.$$

Лемма 2. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\Delta^{**}(r, \rho) = o[A(r)],\ r\to\infty,\ \overline{r\in} E, \tag{1.12}$$

де E — некоторое множество конечной логарифмической меры.

Доказательство. Согласно определениям имеем

$$\Delta^{**}(r,\rho) = \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta - \int_0^{2\pi} n^*(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta - \Delta^*(r,\rho). \tag{1.13}$$

Для заданного $\rho > 0$ обозначим через ρ_0 расстояние от стереографического образа на сфере Римана числа ρ до оси сферы Римана, соединяющей точки 0 и ∞. Тогда величина

$$\frac{1}{2\pi\rho_0}\int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta})\rho_0\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta \tag{1.14}$$

показывает среднее число накрытия над кривой, являющейся стереографическим образом окружности $|w| = \rho$. Следовательно, согласно теории поверхностей наложения (см. [1], гл. XIII, стр. 338 вторая теорема о покрытиях) из (1.14) получим

$$\int_0^{2\pi} n(r, \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta = 2\pi A(r) + o[A(r)],\ r\to\infty,\ r\overline{\in} E. \text{ *}$$

Отсюда и из (1.1), (1.7), (1.13) следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $w(z)$ — мероморфная в $|z| < \infty$ функция; a, $b\in \mathbf{C}$ — комплексные числа такие, что $|a-b| > 2$. Тогда выполняется неравенство* ($z = re^{i\varphi}$)

* Здесь E — то же самое, что и в теореме А.

$$\int_0^R \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)-b} \right| r d\varphi dr < KRA^{\frac{1}{2}}(R), \qquad (1.15)$$

где $K = K(a)\,\text{const} < \infty$.

Доказательство. Очевидно, что $|w(z)-b| > 1$, когда $z \in \Delta(r, a)$.

Следовательно

$$\int_0^R \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)-b} \right| r d\varphi dr \leqslant \int_0^R \int_{\Delta(r,a)} |w'(z)|\, r d\varphi dr =$$

$$= \int_0^R \int_{\Delta(r,a)} \frac{|w'(z)|\,(1+|w(z)|^2)}{(1+|w(z)|^2)} r d\varphi dr$$

и, так как $z \in \Delta(r, a)$, $|w(z)| \leqslant K(a)$, то

$$\int_0^R \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)-b} \right| r d\varphi dr \leqslant K(a) \int_0^R \int_{\Delta(r,a)} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2} r d\varphi dr. \qquad (1.16)$$

Оценим интеграл в правой части неравенства (1.16), используя неравенство Коши—Буняковского

$$\int_0^R \int_{\Delta(r,a)} \frac{|w(z)|}{1+|w(z)|^2} r d\varphi dr < \left(\int_0^R \int_{\Delta(r,a)} \frac{|w(z)|^2 r}{(1+|w(z)|^2)^2} d\varphi dr \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int_0^R \int_{\Delta(r,a)} r d\varphi dr \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \pi R A^{\frac{1}{2}}(R).$$

Отсюда и из неравенства (1.16) получаем утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Пусть* $w(z)$ — *мероморфная в* $|z| < \infty$ *функция;* a, $b \in C$ *такие, что* $|a-b| > 2$, α_1, α_2 — *постоянные* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, $\varepsilon > 0$. *Тогда выполняется следующее соотношение;*

$$\int_{\alpha_1 R}^{\alpha_2 R} \int_{\Delta(r,a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z)-b} \right| r d\varphi dr \leqslant \left[K_1 R^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} + K_2 A^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}(R) \right] \left[S(R, a) \right]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}, \qquad (1.17)$$

где

$$S(R, a) = \int_{\alpha_1 R}^{\alpha_2 R} \int_{\Delta(r,a)} d\sigma, \quad d\sigma \text{ — элемент площади,}$$

K_1, K_2 — *постоянные*.*

---

* В дальнейшем обозначаем через K_i, $i = 1, 2, \ldots$, постоянные, не обязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки неравенств.

Доказательство. Пользуясь неравенством Гельдера при $p=2-\varepsilon$, $q=(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ и тем, что при $z\in\Delta(r, a)\,|w(z)-b|>1$, получим

$$\int\limits_{a_1R}^{a_2R}\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-b}\right|d\sigma<\left(\int\limits_{a_1R}^{a_2R}\int\limits_{\Delta(r,a)}|w'(z)|^{2-\varepsilon}d\sigma\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}[S(R,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}. \quad (1.18)$$

Если $|w'(z)|<1$, то

$$\left(\int\limits_{a_1R}^{a_2R}\int\limits_{\Delta(r,a)}|w'(z)|^{2-\varepsilon}d\sigma\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\leqslant K_1R^{\frac{2}{2-\varepsilon}}. \quad (1.19)$$

При $|w'(z)|<1$, имея в виду, что $|w(z)|<K_2$, когда $z\in\Delta(r, a)$, имеем

$$\left(\int\limits_{a_1R}^{a_2R}\int\limits_{\Delta(r,a)}|w'(z)|^{2-\varepsilon}d\sigma\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}=\left(\int\limits_{a_1R}^{a_2R}\int\limits_{\Delta(r,a)}|w'(z)|^{2}d\sigma\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\leqslant$$

$$\leqslant K_2\left(\int\limits_{a_1R}^{a_2R}\int\limits_{\Delta(r,a)}\frac{|w'(z)|^2d\sigma}{(1+|w(z)|^2)^2}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\leqslant K_2[A(R)]^{\frac{1}{2-\varepsilon}}. \quad (1.20)$$

Из неравенств (1.18)—(1.20) получаем утверждение леммы 4.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть a_1, a_2 — постоянные, $0<a_1<a_2<1$; $a, b\in\mathbf{C}$ — комплексные числа такие, что $\arg a=\arg b=\psi$, $|a|=1$, $|a-b|>2$; $R_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Обозначим, соответственно, через $z_\nu(a)$ и $z_\mu(b)$ a-точки и b-точки функции $w(z)$, лежащие в круге $|z|<R_n$.

Используя формулу Неванлинны и равенства (1.5), (1.6), получим $(z=re^{i\varphi})$

$$\int\limits_{a_1R_n}^{a_2R_n}\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-a}\right|rd\varphi dr\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|\frac{w(R_ne^{i\theta})-a}{w(R_ne^{i\theta})-b}\right|\right|d\theta\,\times\right.$$

$$\times\int\limits_{a_1R_n}^{a_2R_n}\int\limits_{\Delta(r,a)}\frac{2R_nrd\varphi dr}{(R_n-r)^2}+\sum_{i=1}^{n^*(R_n,a,b)}\int\limits_{a_1R_n}^{a_2R_n}r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{1}{z-z_i(a)}-\frac{1}{z-z_i(b)}\right|d\varphi dr\,+$$

$$\sum_{i=1}^{n^*(R_n,a,b)}\int\limits_{a_1R_n}^{a_2R_n}r\int\limits_{\Delta(r,a)}\frac{R_n^2|z_i(a)-z_i(b)|\,d\varphi dr}{|R_n^2-\bar z_i(a)z|\,|R_n^2-\bar z_i(b)z|}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n^*(R_n,a)-n^*(R_n,a,b)}\int\limits_{a_1R_n}^{a_2R_n}r\int\limits_{\Delta(r,a)}\frac{d\varphi dr}{|z-z_j(a)|}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n^*(R_n,a)-n^*(R_n,a,b)}\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n} r\int_{\Delta(r,a)}\frac{|\overline{z}_j(a)|\,d\varphi dr}{|R_n^2-\overline{z}_j(a)z|}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n^{**}(R_n,a)}\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n} r\int_{\Delta(r,a)}\frac{d\varphi dr}{|z-z_k(a)|}+\sum_{k=1}^{n^{**}(R_n,a)}\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n} r\int_{\Delta(r,a)}\frac{|\overline{z}_k(a)|\,d\varphi dr}{|R_n^2-\overline{z}_k(a)z|}+$$

$$+\sum_{l=1}^{n^*(R_n,b)-n^*(R_n,a,b)}\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n} r\int_{\Delta(r,a)}\frac{d\varphi dr}{|z-z_l(b)|}+$$

$$+\sum_{l=1}^{n^*(R_n,b)-n^*(R_n,a,b)}\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n} r\int_{\Delta(r,a)}\frac{|\overline{z}_l(b)|\,d\varphi dr}{|R_n^2-\overline{z}_l(b)z|}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n^{**}(R_n,b)}\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n} r\int_{\Delta(r,a)}\frac{d\varphi dr}{|z-z_p(b)|}+\sum_{p=1}^{n^{**}(R_n,b)}\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n} r\int_{\Delta(r,a)}\frac{|\overline{z}_p(b)|\,d\varphi dr}{|R_n^2-\overline{z}_p(b)z|}+$$

$$+\int_{\alpha_1R_n}^{\alpha_2R_n}\int_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-b}\right| r\,d\varphi dr = J_1(R_n,\psi)+\cdots+J_2(R_n,\psi),\quad R_n\,\overline{\in}\,E. \tag{2.1}$$

Оценим эти интегралы. Обозначим

$$J(R_n,a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|\frac{w(R_ne^{i\theta})-a}{w(R_ne^{i\theta})-b}\right|\right|d\theta. \tag{2.2}$$

Если $|w(R_ne^{i\theta})|>\max\{|a|,|b|\}+1$, то вклад таких величин в (2.2) есть величина $O(1)$. Если $|w(R_ne^{i\theta})|\leqslant\max\{|a|,|b|\}+1$, то

$$J(R_n,a,b)\leqslant m\left(R_n,\frac{w-a}{w-b}\right)+m\left(R_n,\frac{w-b}{w-a}\right)+O(1)\leqslant$$
$$\leqslant m(R_n,a)+m(R_n,b)+O(1). \tag{2.3}$$

Следовательно

$$J_1(R_n,\psi)\leqslant K_1\,[m(R_n,a)+m(R_n,b)+O(1)]\,R_n$$

и так как (см. [3], стр. 28)

$$\int_0^{2\pi} m(R_n,\rho e^{i\psi})\,d\psi=O(1),\ \rho>0,\ R_n\to\infty, \tag{2.4}$$

то получим

$$\int_0^{2\pi} J_1(R_n,\psi)\,d\psi\leqslant K_1R_n. \tag{2.5}$$

Обозначим через $D_{z_0}(r) = \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$, $\rho_i = |z_i(a) - z_i(b)|$, $i = 1, 2, \cdots, n^*(R_n, a, b)$.

Имеем

$$J_2(R_n, \psi) \leqslant \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \left\{ \iint\limits_{D_{z_i(a)}(2\rho_i)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|} + \iint\limits_{D_{z_i(b)}(2\rho_i)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(b)|} + \right.$$

$$\left. + K_2 \rho_i \iint\limits_{D_{z_i(a)}(2R_n) \setminus D_{z_i(a)}(\rho_i/2)} \frac{d\sigma}{|z - z_i(a)|^2} \right\}.$$

Отсюда исходя из геометрических соображений нетрудно видеть, что

$$J_2(R_n, \psi) \leqslant K_2 \ln R_n \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \rho_i + K_2 \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \rho_i \ln \frac{1}{\rho_i}. \tag{2.6}$$

Так как $\rho_i < d(\widetilde{E}_i(r))$, $i = 1, 2, \cdots, n^*(R_n, a, b)$, то из неравенств (1.4) и (2.6) получим

$$J_2(R_n, \psi) \leqslant K_2 \frac{\varphi^8(R_n) R_n \ln R_n}{A^{1/s}(R_n)} \cdot n^*(R_n, a, b),\ R_n > R_0.$$

Отсюда и из неравенства (1.8) леммы 1 следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} J_2(R_n, \psi)\, d\psi \leqslant K_2 \frac{\varphi^8(R_n) R_n \ln R_n}{A^{1/s}(R_n)} \cdot \Phi(R_n). \tag{2.7}$$

Используя неравенства $\rho_i < K\varphi^8(R_n)/A^{1/s}(R_n)$, $i = 1, 2, \cdots, n^*(R_n, a, b)$ имеем

$$J_3(R_n, \psi) < K_3 \frac{\varphi^8(R_n) R_n^3}{A^{1/s}(R_n)} \int\limits_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int\limits_{\Delta(r, a)} \frac{r\, d\varphi\, dr}{|R_n^2 - \bar{z}_i(a) z|\, |R_n^2 - \bar{z}_i(b) z|} <$$

$$\leqslant K_3 \frac{\varphi^8(R_n) R_n}{A^{1/s}(R_n)} n^*(R_n, a, b).$$

Следовательно

$$\int\limits_0^{2\pi} J_3(R_n, \psi)\, d\psi < K_3 \frac{\varphi^8(R_n) R_n}{A^{1/s}(R_n)} \Phi(R_n). \tag{2.8}$$

Имеем

$$J_4(R_n, \psi) = \sum_{j=1}^{n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)} \int\limits_{a_1 R_n}^{a_2 R_n} \int\limits_{\Delta(r, a)} \frac{r\, d\varphi\, dr}{|z - z_j(a)|} \leqslant$$

$$\leqslant K_4 \{n^*(R_n, a) - n^*(R_n, a, b)\} R_n.$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} J_4(R_n, \psi)\, d\psi \leqslant K_4 R_n \{o[A(R_n)]\},\ R_n \to \infty,\ R_n \overline{\in} E. \tag{2.9}$$

Аналогично получаем, что

$$\int_0^{2\pi} J_5(R_n, \psi)\, d\psi \leqslant K_5 R_n \{o[A(R_n)]\}, \quad R_n \to \infty, \quad R_n \overline{\in} E. \tag{2.10}$$

Используя лемму 2 имеем

$$\int_0^{2\pi} J_6(R_n, \psi)\, d\psi \leqslant K_6 R_n \{o[A(R_n)]\}, \quad R_n \to \infty, \quad R_n \overline{\in} E. \tag{2.11}$$

И аналогично приведенным выше случаям получим

$$\int_0^{2\pi} J_i(R_n, \psi)\, d\psi \leqslant K_i R_n \{o[A(R_n)]\}, \quad R_n \to \infty, \quad R_n \overline{\in} E, \quad i = 7, 8, \cdots, 11. \tag{2.12}$$

По лемме 3 имеем

$$\int_0^{2\pi} J_{12}(R_n, \psi)\, d\psi \leqslant K_{12} R_n A^{1/8}(R_n). \tag{2.13}$$

Из неравенства (2.1) и из неравенств (2.5), (2.7)—(2.13) получаем следующее неравенство:

$$\int_{\alpha_1 R_n}^{\alpha_2 R_n} \int_0^{2\pi} P(r, e^{i\psi})\, d\psi\, dr \leqslant K_1 \frac{\varphi^8(R_n)\Phi(R_n) R_n \ln R_n}{A^{1/3}(R_n)} +$$
$$+ K_2 R_n \{o[A(R_n)]\} \leqslant K_1 \varphi^8(R_n) A^{2/3}(R_n) R_n \ln R_n +$$
$$+ K_2 R_n \{o[R_n)]\}, \quad R_n \to \infty, \quad R_n \overline{\in} E \tag{2.14}$$

(здесь мы использовали соотношение (1.1) теоремы А).

Отсюда выбрав для заданного $\beta > 1$ число $\alpha_1 = 1/\beta$, а $\alpha_2 \in (\alpha_1, 1)$ получаем неравенство (3) теоремы 1.

Доказательство следствия 1 вытекает из неравенства (2.14) и из соотношения (1.1) теоремы А.

Доказательство теоремы 2 следует из неравенств (1), (2) и теоремы 1.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим интегралы, приведенные в (2.1), проводя их оценку с учетом площадей, фигурирующих в теореме 3.

С учетом оценки (2.3) имеем

$$J_1(R_n, \psi) \leqslant K_1 R_n \{m(R_n, a) + m(R_n, b) + O(1)\} \int_{\alpha_1 R_n}^{\alpha_2 R_n} \int_{\Delta(r, a)} \frac{r\, d\varphi\, dr}{(R_n - r)^2}.$$

Используя неравенство Гельдера при $p=2-\varepsilon$, $q=(2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ имеем

$$J_1(R_n, \psi) \leqslant K_1 R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \{m(R_n, a)+m(R_n b+O(1)\}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\varepsilon_1 R_n}^{\varepsilon_2 R_n}\int\limits_{\Delta(r,a)} r d\varphi dr\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} = K_1 R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\{m(R_n, a)+m(R_n, b)+$$

$$+O(1)\}\,[S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}, \tag{3.1}$$

где

$$S(R_n, a) = \int\limits_{\varepsilon_1 R_n}^{\varepsilon_2 R_n}\int\limits_{\Delta(r,a)} d\sigma, \quad d\sigma \text{ — элемент площади.}$$

По неравенству Гельдера получаем

$$J_2(R_n, \psi) \leqslant [S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} \sum_{i=1}^{n^*(R_n, a, b)} \rho_i A_i^{\varepsilon}(R_n, \psi), \tag{3.2}$$

где

$$A_i^{\varepsilon}(R_n, \psi) = \left(\int\limits_{\varepsilon_1 R_n}^{\varepsilon_2 R_n}\int\limits_{\Delta(r,a)} \frac{d\sigma}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}},$$

$$i=1,\cdots, n^*(R_n, a, b).$$

Обозначим через $D_{z_1, z_2}(r) = \left\{z : \left|z-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right| \leqslant r\right\}$,

$$\overline{D}_{z_1, z_2}(r) = D_{z_1, z_2}(r) \setminus \{D_{z_1}(r/2) \cup D_{z_2}(r/2)\}.$$

Используя неравенство $(\sum c_\nu)^\alpha \leqslant \sum c_\nu^\alpha$, $0<\alpha<1$, $c_\nu>0$, имеем

$$A_i^{\varepsilon}(R_n, \psi) \leqslant \left(\iint\limits_{D_{z_i(a)}(\rho_i/2)} \frac{d\sigma}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} +$$

$$+\left(\iint\limits_{D_{z_i(b)}(\rho_i/2)} \frac{d\sigma}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} +$$

$$+\left(\iint\limits_{\overline{D}_{z_i(a), z_i(b)}(\rho_i)} \frac{d\sigma}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} +$$

$$+\left(\iint\limits_{D_{z_i(a),\, z_i(b)}(2R_n)\setminus D_{z_i(a),\, z_i(b)}(\rho_i)} \frac{d\sigma}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}\,|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}=$$

$$=I^{\varepsilon}_{i,1}(R_n,\psi)+\cdots+I^{\varepsilon}_{i,4}(R_n,\psi).$$

Оценим эти интегралы.

Так как при $z\in D_{z_i}(a)(\rho_i/2)$ выполняется неравенство $|z-z_i(b)|\geqslant\geqslant\rho_i/2$, то нетрудно видеть, что $I^{\varepsilon}_{i,1}(R_n,\psi)\leqslant K_1\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$. Точно так же $I^{\varepsilon}_{i,2}(R_n,\psi)\leqslant K_2\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$.

Исходя из геометрических соображений получаем, что

$$I^{\varepsilon}_{i,3}(R_n,\psi)\leqslant K_3\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}},\quad I^{\varepsilon}_{i,4}(R_n,\psi)\leqslant K_4\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Суммируя полученные неравенства имеем

$$A^{\varepsilon}_i(R_n,\psi)<K_2\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}},\quad i=1,2,\cdots,n^*(R_n,a,b).$$

Отсюда и из неравенства (3.2) получим

$$J_2(R_n,\psi)\leqslant K_2[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}\sum_{i=1}^{n^*(R_n,a,b)}\rho_i^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Так как $\rho_i\leqslant K\varphi^8(R_n)R_n/A^{\frac{1}{2}}(R_n)$, $i=1,\cdots,n^*(R_n,a,b)$, то

$$J_2(R_n,\psi)\leqslant K_2[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}\frac{[\varphi(R_n)]^{\frac{8\varepsilon}{2-\varepsilon}}R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}}{[A(R_n)]^{\frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}}}n^*(R_n,a,b).\tag{3.3}$$

Применяя неравенство Гельдера, аналогично получаем

$$J_3(R_n,\psi)<K_3[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}\frac{\varphi^8(R_n)R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}}{A^{\frac{1}{2}}(R_n)}n^*(R_n,a,b),\tag{3.4}$$

$$J_4(R_n,\psi)\leqslant K_4[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\{n^*(R_n,a)-n^*(R_n,a,b)\},\tag{3.5}$$

$$J_5(R_n,\psi)\leqslant K_5[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\{n^*(R_n,a)-n^*(R_n,a,b)\},\tag{3.6}$$

$$J_6(R_n,\psi)\leqslant K_6[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}n^{**}(R_n,a)],\tag{3.7}$$

$$J_7(R_n,\psi)\leqslant K_7[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}n^{**}(R_n,a),\tag{3.8}$$

$$J_8(R_n,\psi)<K_8[S(R_n,a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}\{n^*(R_n,b)-n^*(R_n,a,b)\},\tag{3.9}$$

$$J_9(R_n, \psi) \leqslant K_9 [S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} |n^*(R_n, b) - n^*(R_n, a, b)|, \quad (3.10)$$

$$J_{10}(R_n, \psi) \leqslant K_{10} [S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} n^{**}(R_n, b), \quad (3.11)$$

$$J_{11}(R_n, \psi) \leqslant K_{11} [S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} n^{**}(R_n, b). \quad (3.12)$$

Учитывая неравенства (2.1), (3.1), (3.3)—(3.12) и неравенство (1.17) лемм 4, получим

$$\int\limits_{\alpha_1 R_n}^{\alpha_2 R_n} \int\limits_0^{2\pi} \frac{P(r, a)\, d\psi dr}{[S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_1 R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int\limits_0^{2\pi} |m(R_n, a) + m(R_n, b)|\, d\psi +$$

$$+ \left| K_2 \frac{[\varphi(R_n)]^{\frac{8\varepsilon}{2-\varepsilon}}}{[A(R_n)]^{\frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}}} + K_3 \frac{\varphi^8(R_n)}{A^{\frac{1}{2}}(R_n)} \right| R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int\limits_0^{2\pi} n^*(R_n, a, b)\, d\psi +$$

$$+ K_4 R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int\limits_0^{2\pi} |n^*(R_n, a) + n^*(R_n, b) - 2n^*(R_n, a, b)|\, d\psi +$$

$$+ K_5 R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int\limits_0^{2\pi} n^{**}(R_n, a)\, d\psi + K_6 R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int\limits_0^{2\pi} n^{**}(R_n, b)\, d\psi +$$

$$+ K_7 R_n^{\frac{2}{2-\varepsilon}} + K_8 [A(R_n)]^{\frac{1}{2-\varepsilon}}, \quad R_n > R_0.$$

Используя леммы 1, 2 и соотношения (1.1), (2.4), из неравенства (3.13) получим ($R_n \to \infty$, $R_n \overline{\in} E$)

$$\int\limits_{\alpha_1 R_n}^{\alpha_2 R_n} \int\limits_0^{2\pi} \frac{P(r, a)\, d\psi\, dr}{[S(R_n, a)]^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_1 R_n^{\frac{2}{2-\varepsilon}} + K_2 R_n^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \{o[A(R_n)]\}.$$

Отсюда выбрав для заданного $\beta > 1$ число $\alpha_1 = 1/\beta$, а $\alpha_2 \in (\alpha_1, 1)$, получим неравенство (7) теоремы 3.

Институт математики
АН Армении

Поступила 24. X. 1989

Գ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ, Վ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների լոգարիթմական ածանցյալների հետ ասոցիացված մեծությունների համար Կարտանի նույնության տիպի առնչություններ *(ամփոփում)*

Մերոմորֆ ֆունկցիաների տեսության բազմաթիվ վերջնական արդյունքների ապացույցները հանգում են լոգարիթմական ածանցյալների գնահատականներին, որոնք սովորաբար հանդես են գալիս որպես օժանդակ տեխնիկական միջոցներ: Աշխատանքում ցույց է տրված, որ հետևյալ ինտեգրալների համար

$$r \int\limits_{\Delta(r,\, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| d\varphi,$$

որտեղ $\Delta(r, a) = \{z : |z| = r;\ |w(z) - a| < 1\}$, $w(z)$-ը մերոմորֆ է վերջավոր հարթության վրա, տեղի ունի Կարտանի նույնության տիպի առնչություններ։ Որպես հետևանք ստացվում է այդ առնչության անալոգը Վ. Պետրենկոյի աճի տեսությունում։

G. A. BARSEGIAN, V. G. PETROSIAN. *Cartan identity type relations for the quantities associated with the logarithmic derivatives of meromorphic functions* (summary)

In the paper it is shown that for the integrals of the form

$$r \int\limits_{\Delta(r,\, a)} \left| \frac{w'(z)}{w(z) - a} \right| d\varphi$$

where $\Delta(r, a) = \{z : |z| = r;\ |w(z) - a| \leqslant 1$, $w(z)$ is meromorphic in the finite plane, the Cartan identity type relations take place. An analogous relation in the V. Petrenko theory of growth is also obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941.
2. *В. П. Петренко.* Рост мероморфных функций, Харьков, Вища Школа, 1978.
3. *В. К. Хейман.* Мероморфные функции, М., Мир, 1966.
4. *W. H. J. Fuchs.* A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order, Ann. Math., 1958, 68, № 2, 203—209.
5. *W. H. J. Fuchs.* Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series, III, J. Math., 1963, 7, № 4, 661—667.
6. *E. Mues.* Über eine Vermutung von Hayman, Math. Z., 1971, 119, № 1, 11—20.
7. *Г. А. Барсегян.* Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 16, № 5, 1981, 408—423.
8. *Г. А. Барсегян.* Свойство близости a-точек мероморфных функций и структура одноместных областей римановых поверхностей, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XX, № 5, 1985, 375—400, XX, № 6, 1985, 407—425.
9. *Г. А. Барсегян.* Свойство близости a-точек мероморфных функций, Матем. сб. 120 (162), № 1, 1983, 42—67.