ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 5, 1990 Математика

УДК 517.956

Г. Р. ОГАНЕСЯН

ВЕСОВАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Формулировка результата

Рассмотрим сингулярное при $t=0$ эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\partial_t^2 - A(t, x, D_x))\, y(t, x) = 0, \ (t, x) \in]0, T[\times R^n, \tag{1.1}$$

здесь символ $a(t, x, \xi)$ дифференциального оператора второго порядка A предполагается положительным и стремящимся к бесконечности при $t \to +0$ (например, $A = d(t, x) - \Delta$, $d(+0, x) = \Delta = \Delta_x$ — оператор Лапласа).

Хорошо известно, что для сигнулярных эллиптических уравнений задачу Дирихле надо ставить с весом (см., например, [1]—[6]).

Введем обозначения

$$\gamma(t, x, \xi) = a^{\frac{1}{4}} \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)_{tt}, \ a_0(t, x) = a(t, x, \xi)|_{\xi=0},$$

$$\mu(t, x) = \sqrt[4]{a_0(t, x)} \exp\left(\int_T^t \sqrt{a_0(t, x)}\, ds\right), \ \langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}. \tag{1.1'}$$

$H^s = H^s(R_x^n)$ — пространство Соболева (s — вещественное число).

Настоящая работа посвящена конструктивному доказательству теоремы существования решения в пространствах Соболева весовой задачи Дирихле

$$\lim_{t\to 0} \mu(t, x)\, y(t, x) = \Phi_1(x), \ y(T, x) = \Phi_2(x), \ x \in R^n \tag{1.2}$$

для уравнения (1.1). Мы рассматриваем случай сильной (нефуксовой) сингулярности и допускаем неограниченные при $t \to 0$ решения.

Пусть

i). $$a(t, x, \xi) \in C^2(]0, T], C^\infty(R^{2n})), \ \int_0^T \sqrt{a(s, \cdot)}\, ds = \infty,$$

ii). $$0 < c_1 < \frac{a(t, x, \xi)}{\langle\xi\rangle^2} < c_2 a_0(t, x), \ \frac{a}{a_0} > c_3 > 0,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{a_0}{a} = 1 \text{ при фиксированных } (x, \xi) \in R^{2n},$$

iii). существует функция $p(t) \in C^1(]0, T]$ и постоянные δ, ρ, $C_{\alpha\beta}$ такие, что для всех мультииндексов $\alpha, \beta \in Z^n_+$, $|\alpha| \leqslant 2$ и $(t, x, \xi) \in \in]0, T] \times R^{2n}$ справедливы оценки

$$\frac{1}{a}\left|\frac{p}{p_t}\right|^k \left|\partial_t^k \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(t, \cdot)\right| + \int_0^t (|\partial_\xi^\alpha \partial_{\xi_j} \partial_x^\beta a(s, \cdot)| +$$

$$+ t^{-\delta} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \gamma(s, \cdot)|) \frac{ds}{\sqrt{a(s, \cdot)}} \leqslant C_{\alpha\beta} t^{\delta|\beta|} < \xi >^{-\rho|\alpha|}, \ k=0, 1, \ \delta>0, \ 0<\rho\leqslant 1,$$

iv). T — достаточно малое число (меньше единицы), $|p_t p^{-1} a^{-\frac{1}{2}}| \leqslant c < \infty$.

Теорема. *В условиях* i) — iv) *весовая задача Дирихле* (1.1), (1.2) *при* $\Phi_1 \in H^{s+2}$, $\Phi_2 \in H^{s+\frac{5}{2}}$ *имеет решение* $y \in C^2(]0, T]$, H^s, *удовлетворяющее оценкам*

$$\|\mu a_0^{-\frac{k}{2}} \partial_t^k y(t, \cdot)\|_{s-k} \leqslant c\left(\|\Phi_1\|_s + \|\Phi_2\|_{s+\frac{1}{2}}\right), \ k = 0, 1, 2, \tag{1.3}$$

с постоянной c, *зависящей только от постоянных, фигурирующих в* ii) — iv).

Замечание 1.1. Однозначная разрешимость задачи (1.1, (1.2) в случае, когда a не зависит от x, доказана в [6].

Замечание 1.2. Вводя пространство B^s как пополнение пространства дважды непрерывно дифференцируемых отображений $]0, T]$, в H^s, $s \geqslant 2$ по норме

$$\|y\| = \sup_{t \in]0, T]} \sum_{k=0}^{2} \|\mu(t, \cdot) a^{-\frac{k}{2}}(t, \cdot) \partial_t^k y(t, \cdot)\|_{s-k}$$

получим, что в условиях теоремы существует решение задачи (1.1) (1.2), принадлежащее B^s, если $\Phi_1 \in H^s$, $\Phi_2 \in H^{s+\frac{1}{2}}$.

Пример 1.3. Пусть $A = d(t, x) - \Delta$, $d = p(t)[2 + xt^\delta \varkappa(xt^\delta)]$,

$$p(t) = t^{-\sigma}, \ \sigma > 2, \ \varkappa(y) \in C_0^\infty(R), \ 0 \leqslant \varkappa(y) \leqslant 1,$$

$$\varkappa(y) \equiv 1, \ |y| < \frac{1}{2}, \ \varkappa(y) \equiv 0, \ |y| > 1.$$

Легко проверить, что справедливы неравенства

$$a(t, x, \xi) = \xi^2 + d \geqslant \xi^2 + p(t), \ \frac{a}{a_0} = \frac{\xi^2}{d} + 1 \leqslant \xi^2 + 1,$$

$$\left|\frac{a_t}{a}\right| \leqslant c \left|\frac{p_t}{p}\right|, \ |a^{-1} \partial_x^\beta a| \leqslant ct^{|\beta|}.$$

Проверяя остальные условия теоремы убеждаемся, что для этого примера они выполнены.

§ 2. Построение решения

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$y(t, x) = U(t)\, C_1(x) = \int e^{ix\xi} u(t, x, \xi)\, \tilde{C}_1(\xi)\, d\xi.$$

Подставляя это выражение в (1.1) и пользуясь формулой композиции ПДО получим

$$(\partial_t^2 - A)\, y = \int e^{ix\xi} (u_{tt} - au - \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!} \cdot \partial_\xi^\alpha a\, (D_x^\alpha u)\, \tilde{C}_1(\xi)\, d\xi = 0,$$

откуда, полагая

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(t, x, \xi), \quad \gamma \equiv (a^{-\frac{1}{4}})_{tt}\, a^{+\frac{1}{4}} = \frac{5\, a_t^2}{16\, a^2} - \frac{a_{tt}}{4\, a},$$

получаем следующие рекуррентные соотношения для функций b_j:

$$(\partial_t^2 - a(t, x, \xi) - \gamma(t, x, \xi))\, b_0(t, x, \xi) = 0. \tag{2.1}$$

$$(\partial_t^2 - a - \gamma)\, b_j(t, x, \xi) = -\gamma\, b_{j-1} + \sum_{1 < |\alpha| < j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a\, (D_x^\alpha b_{j-|\alpha|}), \tag{2.2}$$

$j = 1, 2, \cdots$.

Итак, общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$y(t, x) = U(t)\, C_1(x) + V(t)\, C_2(x), \tag{2.3}$$

где

$$U(t)\, C_1(x) = \int e^{ix\xi} u(t, x, \xi)\, \tilde{C}_1(\xi)\, d\xi, \quad V(t)\, C_2(x) =$$

$$= \int e^{ix\xi} v(t, x, \xi)\, \tilde{C}_2(\xi)\, d\xi, \tag{2.4}$$

$$u(t, x, \xi) = b_0(t, x, \xi)\left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{b_0}\right), \quad v(t, x, \xi) =$$

$$= k_0(t, x, \xi)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}\right). \tag{2.5}$$

Точные решения уравнения (2.1) имеют вид

$$b_0(t, x, \xi) = a^{-\frac{1}{4}}(t, x, \xi) \exp \int_T^t \sqrt{a(s, x, \xi)}\, ds, \tag{2.6}$$

$$\rho_0(t, x, \xi) = a^{-\frac{1}{4}}(t, x, \xi) \exp \int_t^T \sqrt{a(s, x, \xi)}\, ds. \tag{2.7}$$

Составленный из этих решений вронскиан равен

$$W(\rho_0, b_0) = \rho_0\, b_{0t} - \rho_{0t}\, b_0 = 2. \tag{2.8}$$

Решение ρ_0 неудобно тем, что при $\xi \to \infty$ оно имеет экспоненциальный рост. Поэтому введем еще одно решение уравнения (2.1):

$$k_0(t, x, \xi) = \sigma(x, \xi)\rho_0(t, x, \xi), \quad \sigma = \exp\int_0^T (\sqrt{a_0(s, \cdot)} - \sqrt{a(s, \cdot)})\,ds, \tag{2.9}$$

ограниченное при $\xi \to \infty$ и фиксированных $(t, x) \in]0, T] \times R^n$.

Решение неоднородного уравнения

$$(\partial_t^2 - a - \gamma)\, w(t, \cdot) = f(t) \tag{2.10}$$

запишем в виде

$$w(t) = \int_0^t \frac{b_0(\tau, \cdot)\rho_0(t, \cdot)}{W(b_0, \rho_0)} f(\tau)\,d\tau + \int_t^T \frac{b_0(t, \cdot)\rho_0(\tau, \cdot)}{W(b_0, \rho_0)} f(\tau), d\tau,$$

или

$$\frac{w}{b_0}(t, \cdot) = \int_0^t K(\tau, t, \cdot)\frac{f(\tau)}{b_0(\tau, \cdot)}\,d\tau + \int_t^T K(\tau, \tau)\frac{f(\tau)}{b_0(\tau, \cdot)}\,d\tau, \tag{2.11}$$

$$\frac{w}{\rho_0}(t, \cdot) = \int_0^t K(\tau, \tau)\frac{f(\tau)}{\rho_0(\tau, \cdot)}\,d\tau + \int_t^T K_1(\tau, t)\frac{f(\tau)}{\rho_0(\tau, \cdot)}\,d\tau, \tag{2.12}$$

де при $\tau < t$

$$K(\tau, t) = \frac{\rho_0(t, \cdot)\, b_0^2(\tau, \cdot)}{b_0(t, \cdot)\, W(b_0, \rho_0)} = -\frac{1}{2\sqrt{a(\tau, \cdot)}}\exp\left(2\int_t^\tau \sqrt{a(s, \cdot)}\,ds\right), \tag{2.13}$$

и при $\tau > t$

$$K_1(\tau, t) = \frac{b_0(t, \cdot)\,\rho_0^2(\tau, \cdot)}{\rho_0(t, \cdot)\, W(b_0, \rho_0)} = -\frac{1}{2\sqrt{a(\tau, \cdot)}}\exp\left(2\int_\tau^t \sqrt{a(s, \cdot)}\,d\xi\right). \tag{2.14}$$

Из i), ii) следует, что при фиксированных $\xi \in R^n$

$$\lim_{t \to 0} \mu\, b_0 = \lim_{t \to 0}\left\{\sqrt[4]{\frac{a_0}{a}}\exp\int_T^t (\sqrt{a(s, \cdot)} + \sqrt{a_0(s, \cdot)})\,ds\right\} = 0,$$

$$\tag{2.15}$$

$$\lim_{t \to 0} \mu k_0 = \lim_{t \to 0}\left\{\sqrt[4]{\frac{a_0}{a}}\exp\int_0^t (\sqrt{a_0(s, \cdot)} - \sqrt{a(s, \cdot)})\,ds\right\} = 1,$$

откуда (применением теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла) следует, что решение краевой задачи (1.1), (1.4) имеет вид

$$y(t, x) = V(t)\,Q^{-1}\,\Phi_1(x) + U(t)\,U^{-1}(T)\,(\Phi_2(x) - V(T)\,Q^{-1}\Phi_1(x)), \tag{2.16}$$

где Q — ПДО с символом $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k_j}{k_0}(0, x, \xi)$, т. е.

$$Q\Phi(x) = \lim_{t \to 0} \mu\, V(t)\,\Phi(x) = \int e^{ix\xi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k_j}{k_0}(0, x, \xi)\,\widetilde{\Phi}(\xi)\,d\xi. \tag{2.17}$$

§ 3. Вспомогательные оценки

Обозначим через Ψ_ρ^m множество всех собственных ПДО с символами класса $S^m_{\rho,0}$ (см. [7], [8]).

Наша ближайшая цель показать, что операторы $U(t)$, $V(t)$, определяемые формулами (2.4), (2.5), являются ПДО класса Ψ_ρ^m. Введем удобное обозначение

$$\gamma_\beta^{(\alpha)}(t, x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \gamma(t, x, \xi).$$

Лемма 3.1. *Справедливы формулы*

$$\partial_\xi^\beta \ln g(\xi) = \sum r_j \frac{g^{(j_1)}(\xi)}{g(\xi)} \frac{g^{(j_2)}(\xi)}{g(\xi)} \cdots \frac{g^{(j_s)}(\xi)}{g(\xi)}, \quad |\beta| \geqslant 1, \tag{3.1}$$

$$(\exp(-f(\xi)))\, \partial_\xi^\beta \exp f(\xi) = \sum p_j f^{(j_1)}(\xi) \cdots f^{(j_s)}(\xi), \tag{3.2}$$

где β — мультииндекс, а суммирования ведутся по всем мультииндексам $j_1, j_2, \cdots, j_s$ таким, что $|j_1| + \cdots + |j_s| = |\beta|$, r_j, p_j — постоянные.

Доказательство проведем индукцией по β. При $(\beta) = 1$ формула (3.1) очевидна. Полагая (3.1) верным (предположением индукции) имеем

$$\partial_{\xi_k} \partial^\beta \ln g = \partial_{\xi_k} \sum r_j \frac{g^{(j_1)}}{g} \cdots \frac{g^{(j_s)}}{g} = -\sum r_j \frac{g_{\xi_k}}{g} \frac{g^{(j_1)}}{g} \cdots \frac{g^{(j_s)}}{g} +$$

$$+ \sum r_j \frac{\partial_{\xi_k} g^{(j_1)}}{g} \cdots \frac{g^{(j_s)}}{g} + \cdots = \sum r_k \frac{g^{(k_1)}}{g} \cdots \frac{g^{(k_p)}}{g},$$

где $|k_1| + |k_2| + |k_p| = 1 + |\beta|$. Формула (3.1) доказана.

Докажем одномерный вариант ($\xi \in R$) формулы (3.2):

$$\exp(-f(\xi)))\, \partial_\xi^n \exp f(\xi) = \sum p_j f^{(j_1)} f^{(j_2)} \cdots f^{(j_s)}, \quad j_1 + \cdots + j_s = n \tag{3.2'}$$

индукцией по n. При $n = 1$ формула (3.2′) очевидна: $(\exp(-f))\, \partial_\xi \exp f = f'(\xi)$. Далее, полагая (3.2′) верным, получаем

$$(\exp(-f))\, \partial_\xi^{n+1} \exp f = (\exp(-f))\, \partial_\xi [(\exp f) \sum p_j f^{(j_1)} \cdots f^{(j_s)}] =$$

$$= f'(\xi) \sum p_j f^{(j_1)} \cdots f^{(j_s)} + \sum f^{(k_1)} \cdots f^{(k_s)} = \sum p_s f^{(k_1)} \cdots f^{(k_s)},$$

где $|k_1| + \cdots + |k_s| = 1$, $j_1 + \cdots + j_s = n$.

Многомерная формула (3.2) доказывается аналогично.

Лемма 3.2. *Для того, чтобы выполнялись оценки*

$$a^{-1}(t, x, \xi) |a_{(\beta)}^{(\alpha)}(t, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} <\xi>^{-\rho|\alpha|} \tag{3.3}$$

для всех мультииндексов α, $\beta \in Z_+^n$ и $(t, x, \xi) \in]0, T] \times R^{2n}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\ln a)| \leqslant C'_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} <\xi>^{-\rho|\alpha|} \tag{3.4}$$

для всех α, β, $|\alpha| + |\beta| > 0$ и $(t, x, \xi) \in]0, T] \times R^{2n}$.

Достаточность. Из (3.2) и (3.4) имеем

$$a^{-1} |a_{(\beta)}^{(\alpha)}| = |\sum p_{\alpha\beta} (\ln a)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)} \cdots (\ln a)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)}| \leqslant C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} <\xi>^{-\rho|\alpha|},$$

т. е. (3.3).

Необходимость доказываем индукцией по α, β. При $|\alpha| + |\beta| = 1$

(3.4) очевидно. Далее, полагая (3.4) верным (предположение индукции) из (3.1) имеем

$$\partial_{\xi_k} (\ln a)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \sum r_{\gamma\beta} \frac{a^{(\gamma_1)}_{(\beta_1)}}{a} \cdots \frac{a^{(\gamma_s)}_{(\beta_s)}}{a} \leqslant C'_{\alpha\beta}\, T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{-\rho(|\alpha|+1)},$$

так как здесь суммирование идет по всем γ и β таким, что

$$|\gamma_1| + \cdots + |\gamma_s| = 1 + |\alpha|,\ \beta_1 + \cdots + |\beta_s| = |\beta|.$$

Лемма 3.3. *Пусть существуют положительные постоянные* ρ, δ, $C_{\alpha\beta}$ *такие, что для всех* α, $\beta \in Z^n_+$, $(t, x, \xi) \in]0, T] \times R^{2n}$ *выполнены неравенства*

$$\frac{a^{(\alpha)}_{(\beta)}}{a} + \int_0^T \frac{\partial_{\xi_k} a^{(\alpha)}_{(\beta)}| + T^{-\delta}|\gamma^{(\alpha)}_{(\beta)}|}{\sqrt{a}} (\tau,\ \cdot)\, d\tau < C'_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}. \tag{3.5}$$

Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\frac{|(b_0)^{(\alpha)}_{(\beta)}|}{b_0},\ \frac{|(\rho_0)^{(\alpha)}_{(\beta)}|}{\rho_0},\ \frac{|k^{(\alpha)}_{0(\beta)}|}{k_0} < C_{\alpha\beta} < \xi <^{\rho(1-|\alpha|)} T^{\delta|\beta|}, \tag{3.6}$$

$$| K^{(\alpha)}_{(\beta)}(\tau,\ t)| \leqslant C_{\alpha\beta}\, a^{-\frac{1}{2}}(\tau)\, T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|},\ \tau \leqslant t,$$

$$|K^{(\alpha)}_{1(\beta)}(\tau,\ t)| < C_{\alpha\beta}\, a^{-\frac{1}{2}}(\tau)\, T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|},\ \tau \geqslant t, \tag{3.7}$$

$$\left|\left(\frac{b_j}{b_0}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)}\right|,\ \frac{|b^{(\alpha)}_{j(\beta)}|}{b_0},\ \left|\left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)}\right|;\ \frac{|\rho^{(\alpha)}_{j(\beta)}|}{\rho_0},\ \frac{|k^{(\alpha)}_{0j(\beta)}|}{k_0} \leqslant C_{\alpha\beta}\, T^{\delta(|\beta|+j)} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}. \tag{3.8}$$

Докажем вначале первую оценку (3.6). Так как при $|\alpha| \geqslant 1$ ввиду (3.5)

$$\int_t^T (\sqrt{a(\tau,\ \cdot)})^{(\alpha)}_{(\beta)}\, d\tau = \int_t^T \left(\frac{a_{\xi_k}}{\sqrt{a}}\right)^{(\alpha-1)}_{(\beta)} d\tau = \text{формула Лейбница)}$$

$$= \int_t^T \sum C_{\alpha,s} \frac{(a_{\xi_k})^{(s)}_{(s)}}{2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a}\,(a^{-\frac{1}{2}})^{(\alpha-1-s)}_{(\beta-s)} \leqslant$$

$$\leqslant C'_{\alpha\beta} \sum T^{\delta|s'|} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}\, T^{\delta|\beta-s|} \langle\xi\rangle^{-\rho(|\alpha-s|-1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta}\, T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{-\rho(|\alpha|-1)}, \tag{3.9}$$

то $\left(\text{так как } \ln b_0 = \int_T^t \sqrt{a}\, d\tau - \frac{\ln a}{4}\right)$ получаем

$$b_0^{-1}\, b_{0(\beta)}^{(\alpha)} = \sum p_{\alpha\beta} \left(\int_T \sqrt{a}\, d\tau - \frac{\ln a}{4}\right)^{(\alpha_1)}_{(\beta_1)} \cdots \left(\int_T^t \sqrt{a}\, d\tau - \frac{\ln a}{4}\right)^{(\alpha_s)}_{(\beta_s)} \leqslant$$

$$< C'_{\alpha\beta}\, T^{\delta|\beta|} (\langle\xi\rangle^{\rho(1-|\alpha|)} + \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}) < C_{\alpha\beta}\, T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}.$$

Остальные оценки (3.6) доказываются аналогично. Заметим только, что ввиду (3.2), (3.9) имеем

$$\frac{\sigma_{(\beta)}^{(\alpha)}}{\sigma}=\sum p_{\alpha\beta}\left(\int\limits_0^T(\sqrt{a_0}-\sqrt{a})\,d\tau\right)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)}\cdots$$

$$\cdots\left(\int\limits_0^T(\sqrt{a_0}-\sqrt{a})\,d\tau\right)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)}\leqslant C_{\alpha\beta}\, ... \langle\xi\rangle ...,$$

а из формулы Лейбница

$$\frac{k_{0\,(\beta)}^{(\alpha)}}{k_0}=\frac{(\sigma\rho_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}}{\sigma\rho_0}=\sum C_{\gamma s}\,\frac{\rho_{0\,(s)}^{(\gamma)}}{\rho_0}\,\frac{\sigma_{(\beta-s)}^{(\alpha-\gamma)}}{\sigma}.$$

Для доказательства первого из неравенства (3.7) заметим, что

$$K(\tau,\,t)=\exp\left\{2\int\limits_t^\tau\sqrt{a(s)}\,ds-\frac{1}{2}\ln a(\tau)\right\},$$

$$K_{(\beta)}^{(\alpha)}(\tau,\,t)=K(\tau,\,t)\,\sum p_{\alpha\beta}\left(2\int\limits_t^\tau\sqrt{a}\,ds-\frac{\ln a}{2}\right)_{(\beta_1)}^{(\alpha_1)}\cdots$$

$$\cdots\left(2\int\limits_t^\tau\sqrt{a}\,ds-\frac{\ln a}{2}\right)_{(\beta_s)}^{(\alpha_s)}\leqslant C'_{\alpha\beta}\,a^{-\frac{1}{2}}(\tau)\,T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}\times$$

$$\times\left(\int\limits_\tau^t\sqrt{a}\,ds\right)^{|\alpha|+|\beta|}\exp\left(2\int\limits_t^\tau\sqrt{a}\,ds\right)\leqslant\frac{C_{\alpha\beta}}{\sqrt{a(\tau)}}\,T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для всех k и $\tau\leqslant t\leqslant T$

$$\left(\int\limits_\tau^T\sqrt{a(s)}\,ds\right)^k\exp\left(2\int\limits_t^\tau\sqrt{a(s)}\,ds\right)\leqslant\text{const}.\tag{3.10}$$

Аналогично доказывается второе неравенство (3.7).

Далее из (2.2), (2.11)

$$\left(\frac{b_1}{b_0}\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}=\left[\left(\int\limits_0^t K(\tau,\,t)+\int\limits_t^T K(\tau,\,\tau)\right)\left(\frac{1}{b_0}\sum_{|p|=1}a^{(p)}D_x^p\,b_0-\gamma\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\leqslant\right.$$

$$\leqslant\sum C'_{\alpha,s}\int\limits_0^T\left|K_{(s)}^{(\alpha_1)}(\tau,\,t)\left(\sum_{|p|=1}\frac{a^p}{b_0}D_x^p\,b_0-\gamma\right)_{(\beta-s)}^{(\alpha-\alpha_1)}\right|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta}\,T^{\delta(1+|\beta|)}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}.\tag{3.11}$$

Оценки

$$\left|\left(\frac{b_j}{b_0}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)}\right| \leqslant C_{\alpha\beta}\, T^{\delta\,(j+|\beta|)} <\xi>^{-\rho\,|\alpha|} \tag{3.12}$$

докажем индукцией по j. При $j=1$ это уже доказанная оценка (3.11). Полагая (3.12) верным (предположение индукции) из (2.2), (2.11), (3.5) имеем

$$\left(\frac{b_{j+1}}{b_0}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \Bigg[\Bigg(\int\limits_0^t K(\tau, t) + \int\limits_t^T K(\tau, \tau)\Bigg)\Bigg(\sum_{1\leqslant |p|\leqslant j+1} \frac{a^p}{p!\, b_0} D_x^p b_{j+1-|p|} -$$

$$- \frac{b_j}{b_0}\gamma\Bigg) d\tau\Bigg]^{(\alpha)}_{(\beta)} \leqslant C'_{\alpha\beta}\, T^{\delta\,(j+1+|\beta|)} <\xi>^{-\rho\,(\alpha)},$$

что и требовалось доказать.

Остальные оценки (3.8) доказываются аналогично.

Замечание 3.1. Из неравенств (3.8) следует, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{b_0}(t, x, \xi),\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j}{k_0}(t, x, \xi) \in S^0_{\rho,\,0}. \tag{3.13}$$

Действительно, при $T<1$ имеем

$$\left(\sum_0^{\infty} \frac{b_j}{b_0}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)}, \left(\sum_0^{\infty} \frac{k_j}{k_0}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)} \leqslant C_{\alpha\beta} <\xi>^{-\rho\,|\alpha|} \sum_{j=0}^{\infty} T^{\delta(j+|\beta|)} \leqslant$$

$$\leqslant C'_{\alpha\beta} <\xi>^{-\rho\,|\alpha|}\, T^{\delta\,|\beta|} (1-T^{\delta})^{-1} \leqslant C_{\alpha\beta}\, T^{\delta\,|\beta|} <\xi>^{-\rho\,|\alpha|}.$$

Далее из (3.5) нетрудно вывести оценки

$$a^{\frac14} (a^{-\frac14})^{(\alpha)}_{(\beta)},\ a^{-\frac12} (a^{\frac12})^{(\alpha)}_{(\beta)},\ \left(\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac14}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)},$$

$$\left(\exp \int\limits_T^t (\sqrt{a} + \sqrt{a_0}\, d\tau\right)^{(\alpha)}_{(\beta)}, \left(\exp \int\limits_0^t (\sqrt{a_0} - \sqrt{a})\, d\tau\right)^{(\alpha)}_{(\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta}\, T^{\delta\,|\beta|} <\xi>^{-\rho\,|\alpha|}. \tag{3.14}$$

Лемма 3.5. *В условиях леммы* 3.3 *операторы* $\mu U(t)$ *и* $\mu V(t)$ *принадлежат классам* Ψ^0_ρ *и имеют место оценки*

$$\|\mu(t, \cdot)\, U(t)\, \Phi(\cdot)\|_s,\ \|\mu(t, \cdot)\, V(t)\, \Phi(\cdot)\|_s \leqslant c\, |\Phi|_s. \tag{3.15}$$

Для доказательства этой леммы достаточно показать, что

$$\mu(t, x)\, u(t, x, \xi),\ \mu(t, x)\, v\ (t, x, \xi) \in S^0_{\rho,\,0}. \tag{3.16}$$

Первое из этих утверждений следует, с помощью (3.14), (3.13), из оценок

$$(\mu u)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac14} \left(\exp \int\limits_T^t (\sqrt{a} + \sqrt{a_0})\, d\tau\right) \sum_0^{\infty} \frac{b_j}{a_0}\right]^{(\alpha)}_{(\beta)} =$$

$$= \sum C_{m\sigma s p}\left(\left(\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{(\sigma)}_{(s)}\left(\exp\int_T^t(\sqrt{a}+\sqrt{a_0})\,d\tau\right)^{(m)}_{(p)}\left(\sum_0^{\infty}\frac{b_j}{b_0}\right)^{(\alpha-\sigma-m)}_{(\beta-s-p)}\leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|},$$

а второе доказывается аналогично.

Оценки (3.15) следуют из теоремы об L^2-ограниченности операторов класса Ψ^0_ρ (см. теорему 3.1 из [8]).

Замечание 3.6. Легко убедиться, что операторы $U(t)$, $V(T)$ являются ПДО класса $\Psi^{-\frac{1}{2}}$.

Так как ПДО класса Ψ^m_ρ является ограниченным оператором из H^{s+m} в H^s, то для придания смысла выражению (2.16) осталось показать обратимость операторов $U(T)$, Q с символами

$$u(T, x, \xi)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j(T, x, \xi),\quad \sum_{j=0}^{\infty}\frac{k_j}{k_0}(0, x, \xi).$$

Для этого воспользуемся следующим утверждением из [8] (теорема 3.5):

Предложение 3.7. *Для любых* $C>0$, $\delta_1>0$ *и* $s>0$ *можно указать такие* $N>0$ *и* $\varepsilon>0$, *что если*

$$|p(x, \xi)|\geqslant\delta_1\langle\xi\rangle^m, \tag{3.17}$$

$$|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, \xi)|\leqslant\begin{cases} c\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|}, & |\beta|=0,\\ \varepsilon\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|}, & |\beta|\neq 0,\end{cases} \tag{3.18}$$

для всех $|\alpha+\beta|\leqslant N$, *то оператор* $p(x, D)$ *осуществляет изоморфизм между* H^{s+m} *и* H^s.

Нетрудно проверить, что условия предложения 3.7 для $u(T, x, \xi)$ с $m=-\dfrac{1}{2}$ и $\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{k_j}{k_0}(0, x, \xi)$ с $m=0$ выполнены.

Действительно, из условий ii), iii) имеем при

$$T^{\delta}<\min\left\{1, \frac{1-\delta_1}{c}\right\}c_1\langle\xi\rangle^2\, a(T, x, \xi)\leqslant c_2\langle\xi\rangle^2,$$

$$c_3\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}}\leqslant b_0(T, x, \xi)\leqslant c_4\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k_j}{k_0}(t, x, \xi)=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k_j}{k_0}\geqslant 1-cT^{\delta}\geqslant\delta_1>0.$$

Отсюда и из замечания 3.6 получаем (3.17). Далее из (3.5), (3.13) при $|\beta|>0$ имеем при малом T

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_j(T, x, \xi)\right)^{(\alpha)}_{(\beta)}=\sum C_{\gamma\sigma}\left(a^{-\frac{1}{4}}(T, \cdot)\right)^{(\gamma)}_{(\sigma)}\left(\sum\frac{b_j}{b_0}(T, \cdot)\right)^{(\alpha-\gamma)}_{(\beta-\sigma)}\leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta}\,a^{-\frac{1}{4}}(T, \cdot)\,T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}\leqslant\varepsilon\langle\xi\rangle^{-\frac{1}{2}-\rho|\alpha|}, \tag{3.19}$$

т. е. (3.18) тоже выполнено.

Итак, из предложения 3.7 вытекает обратимость операторов $U(T)$, Q и справедливость неравенств

$$c_1\|\Phi\|_s \leqslant \|U(T)\Phi\|_{s+\frac{1}{2}} \leqslant c_2\|\Phi\|_s,$$
$$c_3\|\Phi\|_s \leqslant \|Q\Phi\|_s \leqslant c_4\|\Phi\|_s. \tag{3.20}$$

Замечание 3.8. Из локальной обратимости эллиптических операторов (см., например, [7], предложение 1.4 главы 2) следует, что обратимость операторов $U(T)$, Q имеет место и в том случае, когда область $]0, T]\times R^n$, в которой рассматривается уравнение (1.1), заменить на $]0, T]\times\Omega$, где Ω — достаточно малая область из R^n, а начальные функции $\Phi_{1,2}$ брать из класса $C_c^\infty(\Omega)$.

Замечание 3.9. Из представления (2.16), неравенств (3.20) и $V(T)\in\Psi_\rho^{-\frac{1}{2}}$ вытекает неравенство (1.5) при $k=0$. Действительно

$$\|\mu y\|_s = \|\mu V(t)Q^{-1}\Phi_1 + \mu U(t)U^{-1}(T)(\Phi_2 - V(T)Q^{-1}\Phi_1)\|_s \leqslant$$
$$\leqslant c(\|\Phi_1\|_s + \|\Phi_2\|_{s+\frac{1}{2}}). \tag{3.21}$$

§ 4. Вывод оценок (1.5) при $k=1, 2$

Имеет место

Лемма 4.1. *В условиях* i) — i/v *для любых* $\alpha, \beta\in Z_+^n$ *и* $(t, x, \xi)\in\,]0, T]\times R^{2n}$ *справедливы неравенства*

$$|\partial_t K_{(\beta)}^{(\alpha)}(\tau, t)|,\ |\partial_t K_{1(\beta)}^{(\alpha)}(\tau, t)| \leqslant C_{\alpha\beta}\sqrt{\frac{a(t)}{a(\tau)}}\, T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}, \tag{4.1}$$

$$|\partial_t(\ln b_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}|,\ |\partial_t(\ln k_0)_{(\beta)}^{(\alpha)}| \leqslant C_{\alpha\beta}\sqrt{a(t)}\, T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}, \tag{4.2}$$

$$\left|\left(\frac{\mu b_0}{\sqrt{a_0}}\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right|,\ \left|\left(\frac{\mu k_0}{\sqrt{a_0}}\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right| \leqslant C_{\alpha\beta}\frac{T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}}{\sqrt[4]{a(t)a_0(t)}}, \tag{4.3}$$

$$\left|\partial_t\left(\frac{b_j}{b_0}\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right|,\ \left|\partial_t\left(\frac{k_j}{k_0}\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right| \leqslant C_{\alpha\beta}\sqrt{a(t)}\, T^{\delta(j+|\beta|)}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}, \tag{4.4}$$

$j=1, 2, \cdots,$

$$\left|\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_0}}\partial_t\sum_0^\infty b_j\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right|,\ \left|\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_0}}\partial_t\sum_0^\infty k_j\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right| \leqslant C_{\alpha\beta}T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{1-\rho|\alpha|}, \tag{4.5}$$

$$\left|\left(\frac{a}{a_0}(t, \cdot)\right)_{(\beta)}^{(\alpha)}\right| \leqslant C_{\alpha\beta}T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{2-\rho|\alpha|}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Первая из оценок (4.1) доказывается с помощью формулы (2.13) и неравенств (3.14):

$$\partial_t K(\tau, t)_{(\beta)}^{(\alpha)} = \left(\sqrt{\frac{a(t)}{a(\tau)}}\exp 2\int_t^\tau\sqrt{a(s)}\,ds\right)_{(\beta)}^{(\alpha)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{\alpha\beta}\sqrt{\frac{a(t)}{a(\tau)}}\,T^{\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}.$$

Вторая — из оценок (4.1) доказывается аналогично с помощью формулы (2.14). Оценки (4.2) вытекают из iii), iv) и (3.14):

$$(\partial_t \ln b_0)^{(\alpha)}_{(\beta)},\ (\partial_t \ln k_0)^{(\alpha)}_{(\beta)} \leqslant \left| \left(\pm \sqrt{a} - \frac{a_t}{4a} \right)^{(\alpha)}_{(\beta)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta} \left(\frac{|p_t|}{p} + \sqrt{a} \right) T^{\delta|\beta|} <\xi>^{-\rho|\alpha|} \leqslant C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)}\, T^{\delta|\beta|} <\xi>^{-\rho|\alpha|}.$$

Неравенства (4.3) доказываются с помощью формул

$$\frac{\mu b_0}{\sqrt{a_0}} = \frac{\exp \int\limits_T^t (\sqrt{a} + \sqrt{a_0})\, d\tau}{\sqrt[4]{a a_0(t)}},\quad \frac{\mu k_0}{\sqrt{a_0}} = \frac{\exp \int\limits_0^t (\sqrt{a_0} - \sqrt{a})\, d\tau}{\sqrt[4]{a a_0(t)}}$$

и неравенств (3.15).

Первое из неравенств (4.4) докажем индукцией по j. При $j=1$ применением формулы Лейбница и оценок (4.1) имеем

$$\partial_t \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \sum C_{\alpha s} \int\limits_0^t \partial_t K^{(\sigma)}_{(s)} \left(\frac{1}{b_0} \sum_{|p|=1} a^{(p)} D^p_x b_0 - \gamma \right)^{(\alpha-\sigma)}_{(\beta-s)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C'_{\alpha\beta} \sum <\xi>^{-\rho|\sigma|} T^{\delta|s|} \sqrt{a(t)} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau)}} \left| \left(\sum_{|p|=1} \frac{a^{(p)}}{b_0} D^p_x b_0 - \gamma \right)^{(\alpha-\sigma)}_{(\beta-s)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)}\, T^{\delta(|\beta|+1)} <\xi>^{-\rho|\alpha|}.$$

Полагая $(4.4)_1$ верным при $j=1, \ldots, m$ (предположение индукции) имеем из (2.2), (2.11) и формулы Лейбница

$$\partial_t \left(\frac{b_{m+1}}{b_0} \right)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \sum C_{\alpha s} \int\limits_0^t K^{(\sigma)}_{t\,(s)} \Bigg(\sum_{1 \leqslant |p| \leqslant m+1} \Bigg(\frac{a^{(p)}}{p!\, b_0} D^p_x b_{m+1-|p|} -$$

$$- \frac{b_m}{b_0} \gamma \Bigg)^{(\alpha-\sigma)}_{(\beta-s)} d\tau \leqslant C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} \sum <\xi>^{-\rho|\sigma|} T^{\delta|s|} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau)}} \left| \left(\sum \frac{a^{(p)}}{p!\, b_0} D^p_x b_{m+1-|p|} - \frac{b_m}{b_0} \gamma \right)^{(\alpha-\sigma)}_{(\beta-s)} \right| \leqslant C_{\alpha\beta} \sqrt{a(t)} \times$$

$$\times T^{\delta(m+1+|\beta|)} <\xi>^{-\rho|\alpha|}.$$

Оценки $(4.4)_2$ доказываются аналогично.

Из оценок (4.5) мы, как обычно, докажем только первую, используя неравенства (4.3), (4.4):

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_0}} \partial_t \sum_0^\infty b_j \right)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \left(\frac{\mu b_0}{\sqrt{a_0}} \partial_t \sum_0^\infty \frac{b_j}{b_0} + \frac{\mu b_{0t}}{b_0 \sqrt{a_0}} \sum_0^\infty b_j \right)^{(\alpha)}_{(\beta)} =$$

$$= \sum C_{\sigma s}\left\{\left(\frac{\mu b_0}{\sqrt{a_0}}\right)^{(\alpha-\sigma)}_{(\beta-s)}\left(\partial_t \sum_0^{\tilde{}} \frac{b_j}{b_0}\right)^{(\sigma)}_{(s)}+\left(\frac{b_{0t}}{b_0}\right)^{(\sigma)}_{(s)}\left(\frac{\mu b_0}{\sqrt{a_0}} \sum_0^{\tilde{}} \frac{b_j}{b_0}\right)^{(\alpha-\sigma)}_{(\beta-s)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|} \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{a_0}} \leqslant C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}-\rho|\alpha|}.$$

Наконец, неравенства (4.6) выводятся с помощью (3.2)

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{(\alpha)}_{(\beta)}=\frac{a}{a_0} \sum p_{\alpha\beta} (\ln a-\ln a_0)^{(\alpha_1)}_{(\beta_1)} \cdots (\ln a-\ln a_0)^{(\alpha_j)}_{(\beta_j)} \leqslant C_{\alpha\beta} T^{\delta|\beta|} \times$$

$$\times \langle\xi\rangle^{2-\rho|\alpha|}.$$

Из неравенств (4.6), определения класса Ψ^m_ρ и теоремы об ограниченности ПДО класса Ψ^m_ρ в пространствах Соболева (см., например, [8], теорема 3.1) вытекает

Следствие 4.2. В условиях $i)$—$iIV)$ ПД операторы

$$\frac{\mu}{\sqrt{a_0}} U_t(t),\ \frac{\mu}{\sqrt{a_0}} V_t(t)$$

принадлежат классу $\Psi^{\frac{1}{2}}_\rho$ и имеют место оценки

$$\left\|\frac{\mu}{\sqrt{a_0}} U_t(t)\Phi\right\|_s,\ \left\|\frac{\mu}{\sqrt{a_0}} V_t(t)\Phi\right\|_s \leqslant c\|\Phi\|_{s+\frac{1}{2}}. \tag{4.8}$$

Перейдем к доказательству оценок (1.5) при $k=1,\ 2$.

Дифференцируя соотношение (2.16) по t получим

$$y_t = V_t(t)\,Q^{-1}\Phi_1 + U_t(t)\,U^{-1}(T)\,(\Phi_2 - V(T)\,Q^{-1}\Phi_1),$$

откуда, применяя оценки (4.8) и (3.20) получаем неравенство (1.5) при $k=1$:

$$\left\|\frac{\mu}{\sqrt{a_0}} y_t\right\|_s \leqslant c\left(\|\Phi_1\|_{s+\frac{1}{2}} + \|\Phi_2\|_{s+1}\right).$$

Оценку (1.5) при $k=2$ выводим с помощью уравнения (1.1) и неравенств (4.6):

$$\left\|\frac{\mu}{a_0} y_{tt}\right\|_s = \left\|\frac{\mu}{a_0} Ay\right\|_s \leqslant \left\|\frac{\mu}{a_0} A\mu^{-1}\right\|_{-2} \cdot \|\mu y\|_{s+2} \leqslant$$

$$\leqslant c\|\mu y\|_{s+2} \leqslant c\left(\|\Phi_1\|_{s+2} + \|\Phi_2\|_{s+\frac{5}{2}}\right).$$

Итак, оценки (1.5), а с ними и теорема, доказаны.

Чтобы проиллюстрировать появление весовой функции μ в задаче Дирихле (1.2) решим сингулярную модельную задачу Дирихле в круге

$$D = \{(x,\ y) \in R^2,\ x^2 + y^2 < R\},\ r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$u_{xx} + u_{yy} = q(r)\,u(x,\ y),\ (x,\ y) \in D,\ q(R-0) = \infty, \tag{4.9}$$

$$\lim_{r \to R-0} (\mu_0(r)\,u) = f(\varphi) \in C^2[0,\ 2\pi], \tag{4.10}$$

где

$$u_0(r) = \sqrt[4]{q_0(r)} \exp\int_r^0 \sqrt{q_0(s)}\, ds, \quad q_0 \equiv q(r) - \frac{1}{4r^2}. \tag{4.11}$$

Переходя к полярным координатам r, φ $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$ уравнение (4.9) запишем в виде

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = q(r)\, u. \tag{4.12}$$

Подставляя решения вида

$$u(r, \varphi) = M(r)\, B(\varphi)$$

в (4.12) (метод разделения переменных) получаем

$$\frac{r^2 M''(r)}{M(r)} + \frac{r M'(r)}{M(r)} - r^2 q(r) = -\frac{B''(\varphi)}{B(\varphi)} = \lambda = \text{const}. \tag{4.13}$$

Уравнение $B''(\varphi) = \lambda B(\varphi)$ имеет общее решение

$$B(\varphi) = a_n \sin\varphi\sqrt{\lambda} + b_n \cos\varphi\sqrt{\lambda},$$

где из периодичности $B(\varphi)$ с периодом 2π следует, что $\lambda = n^2$, $n \in Z_+$. Уравнение

$$M''(r) + \frac{M'(r)}{r} = q_n(r)\, M(r), \quad q_n \equiv n^2 + q(r) - \frac{1}{4r^2} \tag{4.14}$$

заменой $M(r) = r^{-\frac{1}{2}} v(r)$ сводится к

$$v''(r) = q_n(r)\, v(r). \tag{4.15}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(r) = C_1 v_1(r) + C_2 v_2(r), \tag{4.16}$$

где в условиях ВКБ-леммы (см. [9])

1). $q(r) > \dfrac{1}{4R^2}$, 2). $\displaystyle\int_0^R \sqrt{q(\rho)}\, d\rho = \infty$,

3). $q(r) \in C^2[0, R[$, 4). $\dfrac{q_n''(r)}{8q^{3/2}} - \dfrac{5(q_n')^2}{32q^{5/2}} \in L_1[\varepsilon, R]$, $\varepsilon > 0$,

имеем

$$v_1(r) = (1 + \varepsilon_1(r))\, q_n^{-\frac{1}{4}}(r) \exp\left\{\int_0^r \sqrt{q_n}\, ds + \int_0^R (\sqrt{q_0} - \sqrt{q_n})\, ds\right\},$$

$$v_2(r) = (1 + \varepsilon_2(r))\, q_n^{-\frac{1}{4}}(r) \exp\left(-\int_0^r \sqrt{q_n(s)}\, ds\right), \tag{4.17}$$

$$\lim_{r \to R-0} \varepsilon_{1,2}(r) = 0,$$

причем $v_1(r)$ стремится к бесконечности, а $v_2(r)$ стремится к нулю при $r \to R-0$.

Итак

$$\lim_{r\to R-0} \mu_0 v = C_1 \lim_{r\to R-0} \left\{ \left(\frac{q_0}{q} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \int_R^r (\sqrt{q} - \sqrt{q_0})\, ds \right\} = C_1. \tag{4.18}$$

Решение $v_1(r)$ можно гладко продолжить вплоть до $r=0$ так, чтобы $v_1(0)=0$. Продолжая $v_2(r)$ до $r=0$ получим, что $r^{-\frac{1}{2}} v_2(r) \sim \sim \ln r$ стремится к бесконечности при $r\to 0$, т. е. $M(r)$ неограниченно при $r=0$. Выбрасывая это сингулярное при $r=0$ решение получим

$$u(t, x) = \frac{a_0 v_{10}}{2\sqrt{r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{1k}(r)}{\sqrt{r}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \tag{4.19}$$

Из краевого условия (4.10) и (4.18) получаем

$$\lim_{r\to R-0} \mu_0 u = R^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \right) = f(\varphi), \tag{4.20}$$

откуда коэффициенты Фурье a_k, b_k находятся обычным способом.

Институт математики
АН Армении

Поступила 5. II. 1988

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Կշռային Դիրիխլեի խնդրի մասին երկրորդ կարգի սինգուլյար էլիպտական հավասարումների համար (*ամփոփում*)

Վերնագրում նշված խնդիրների համար ապացուցվում է լուծման գոյությունը Սոբոլևի տարածություններում: Որպես կշռային ֆունկցիա օգտագործվում է ՎԿԲ-ի ասիմպտոտիկայի առաջին մոտարկումը:

G. R. OGANESIAN. *Weighted Dirichlet problems for the second order singular elliptic equations* (summary)

In the paper the solvability in the Sobolev space of the weighted Dirichlet problem for a singular on the boundary elliptic second order equation is proved.

As the weight function the first approximation of the JWKB—asymptotic (Green—Liouville function) is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, ДАН СССР, 77, № 2, 181—183.
2. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, М., ВИНИТИ, 1959.
3. *И. А. Киприянов.* О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя, ДАН СССР, 158, № 2, 1964, 275—278.
4. *С. А. Терсенов.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе, Новосибирск, НГУ, 1973.
5. *С. Руткаускас.* Задача типа Дирихле для эллиптического уравнения с сингулярностью во внутренней точке области, Сообщения АН ГССР, 121, № 1, 1986, 21—23.
6. *Г. Р. Оганесян.* О весовых задачах Коши и Дирихле для некоторых сингулярных на границе уравнений в частных производных, Изв. АН Армении, сер. матем., 23, № 1, 1988, 3—21.
7. *Ф. Трев.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, М., Мир, 1984, т. I.
8. *В. В. Грушин.* Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами, Функц. анализ и его прилож., 1970, 4, № 3, 37—50.
9. *Ф. Хартман.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970.