ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 5, 1990 Математика

УДК 519.214:519.248

С. К. ПОГОСЯН

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

0°. В этой работе для гиббсовского случайного поля доказывается локальная предельная теорема для вероятностей больших уклонений числа частиц в конечном объеме V. Полученное при этом асимптотическое соотношение по форме подобно известной асимптотике для вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин [1, 2]. Однако, коэффициенты в этом соотношении не в точности равны константам как в упомянутом случае независимых слагаемых, а зависят от формы области V, точнее имеют вид констант с малыми (при больших V) поправками.

Рассматривается случай решетчатых гиббсовских случайных полей с общим парным взаимодействием при малых значениях активности. Аналогичный результат получен и для частиц большого гиббсовского ансамбля в конечном объеме при свободных граничных условиях. Доказательство идейно связано с известным методом Крамера исследования вероятностей больших уклонений, а технически основано на сильных кластерных оценках усеченных корреляционных функций [3, 4].

1°. Пусть Z^ν — ν-мерная целочисленная решетка. Для любого множества G из Z^ν обозначим через $C(G)$ множество всех подмножеств G, а через $C_0(G)$ — множество конечных подмножеств G.

Рассмотрим случайное поле $\xi(t)$, $t\in Z^\nu$ со значениями в множестве $X=\{0, 1\}$. Пусть X^{Z^ν} — пространство всевозможных функций $x(t)$, $t\in Z^\nu$ со значениями в X. Интерпретируя функцию $x(t)$ как конфигурацию частиц, при которой точка t занята частицей, если только $x(t)=1$, пространство X^{Z^ν} можно отождествить с множеством $C(Z^\nu)$. Обозначим через $\mathbf{A}(Z^\nu)$ σ-алгебру подмножеств (конфигураций) из $C(Z^\nu)$, порожденную цилиндрическими множествами (подробности см. в [5]).

Распределением случайного поля $\xi(t)$, $t\in Z^\nu$ называется вероятностная мера P на $(C(Z^\nu), \mathbf{A}(Z^\nu))$ такая, что

$$\Pr\{(\xi(t),\ t\in Z^\nu)\in B\}=P(B),\ B\in \mathbf{A}(Z^\nu).$$

Согласно известной теореме Колмогорова задание P эквивалентно заданию согласованной системы конечномерных распределений $(P)_V$, $V\in C_0(Z^\nu)$. При этом

$$\Pr\{(\xi(t),\ t\in V)\in B\}=(P)_V(B),\ B\in \mathbf{A}(V),$$

где $A(V)$ — множество всех подмножеств из $C_0(V)$.

Предположим, что частицы поля взаимодействуют с помощью парного потенциала Ф, где $\Phi:(0+\infty)\to R$. Мы пока полагаем, что функция Ф такова, что

$$\|\Phi\|=\sum_{t\in Z^{\nu}\setminus\{0\}}|\Phi(|t|)|<\infty.$$

Ниже нам придется наложить более сильное условие убывания на Ф. Класс потенциалов, рассматриваемых в настоящей статье, описан в пункте 2.

Распределение Гиббса в конечном объеме $V\subset Z^{\nu}$ с потенциалом Ф и граничным условием $\bar{c}\in C(Z^{\nu}\setminus V)$ задается формулой (см. [5])

$$q_V(c/\bar{c})=\frac{z^{|c\cup\bar{c}|}\exp(-\beta U(c/\bar{c}))}{\Xi(V,\beta,z/\bar{c})},\quad c\in C(V), \tag{1.1}$$

где $|\cdot|$ — число точек в конечном множестве

$$U(c/\bar{c})=\sum_{\substack{\{x,y\}\subset c\\ x\neq y}}\Phi(|x-y|)+\sum_{x\in c,\ y\in\bar{c}}\Phi(|x-y|),$$

нормирующий множитель (статистическая сумма)

$$\Xi(V,\beta,z/\bar{c})=\sum_{c\in C(V)}z^{|c\cup\bar{c}|}\exp(-\beta U(c/\bar{c}),$$

а β (обратная температура) и z (активность) — положительные параметры. Заметим, что если в качестве граничного условия взять пустую конфигурацию $\bar{c}=\varnothing$, то формула (1.1) задаст обычное распределение Гиббса $P_{V,\beta,z}$ в конечном объеме V (конечное гиббсовское поле) с параметрами β и z:

$$P_{V,\beta,z}(c)=q_V(c/\varnothing):=\frac{z^{|c|}\exp(-\beta U(c))}{\Xi(V,\beta,z)},c\in C(V), \tag{1.2}$$

где $U(c)=U(c)/\varnothing)$, $\Xi(V,\beta,z)=\Xi(V,\beta,z/\varnothing)$.

Распределение Гиббса $P_{V,\beta,z}$ в конечном объема V можно трактовать как распределение случайного поля $\xi(t)$, $t\in Z^{\nu}$ такого, что с вероятностью 1 $\xi(t)=0$ при $t\in Z^{\nu}\setminus V$, а совместное распределение случайных величин $\{\xi(t),\ t\in V\}$ задается как $P_{V,\beta,z}$.

Случайное поле $\xi(t)$, $t\in Z^{\nu}$ называется гиббсовским, если его условные вероятности задаются формулой (1.1). В настоящей статье мы рассматриваем только гиббсовские поля с малой активностью z $0<z<\bar{z}$, где $\bar{z}>0$ достаточно мало. Известно (см. [6]), что когда $\|\Phi\|<\infty$ и активность z достаточно мала, существует единственное гиббсовское распределение $P_{\beta,z}$ с заданным потенциалом Ф и параметрами β и z, которое допускает следующее описание: для любых $V\in C_0(Z^{\nu})$ и $W_k\in C_0(Z^{\nu})$, $W_k\uparrow Z^{\nu}$ при $k\to\infty$, имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty}(P_{W_k,\beta,z})_V(B)=(P_{\beta,z})_V(B),\ B\in\mathbf{A}(V),$$

где $(P)_V$ означает распределение вероятностей на $(C(V),\ \mathbf{A}(V))$, индуцированное распределением P на $(C(Z^{\nu}),\ \mathbf{A}(Z^{\nu}))$. При этом сходимость в (1.3) равномерна по z при $z<\bar{z}$.

Как было отмечено выше все распределения $P_{\Psi_k, \beta, z}$ можно считать заданными на одном и том же пространстве $C(Z^\nu)$, $\mathrm{A}(Z^\nu)$. Тогда соотношение (1.3) означает, что распределения $P_{\Psi_k, \beta, z}$ сходятся слабо к распределению $P_{\beta, z}$ равномерно по $z < \bar{z}$ при $k \to \infty$.

Мы будем рассматривать также гиббсовские поля с переменной, т. е. зависящей от V, и, вообще говоря, комплексной активностью: z_1 в конечном объеме V и z_2 вне V. Соответствующее гиббсовское распределение на $(C(Z^\nu),\ \mathrm{A}(Z^\nu))$ будем обозначать через P^V_{β, z_1, z_2}.

2°. Введем необходимые обозначения. Пусть E — семейство всех финитных функций на Z^ν со значениями в Z_+, где $Z_+ = \{z \in Z^1, z > 0\}$. Элемент X из E удобно рассматривать как подмножество $\bar{X} = \operatorname{supp} X$ из Z^ν, каждая точка которого повторяется $X(t)$ раз. Для $X \in E$ положим: $|X| = \sum\limits_{t \in Z^\nu} X(t)$, $X! = \prod\limits_{t \in Z^\nu} X(t)!$. Мы будем писать $X \leqslant Y$, $X, Y \in E$, если для всех $t \in Z^\nu$, $X(t) \leqslant Y(t)$. Положим, кроме того, $E_V = \{X \in E,\ \bar{X} \subset V\}$, $V \subset Z^\nu$.

Пусть ψ_β — функция на E, определяемая формулой

$$\psi_\beta(X) = \sum_{\gamma \in \Gamma(X)} \prod_{(x,\, y) \in \gamma} \left(e^{-\beta\Phi(|x-y|)} - 1\right) \text{ при } |X| > 1,$$

$\psi_\beta(X) = 1$ при $|X| = 1$ и $\psi_\beta(X) = 0$ при $X = 0$. Суммирование производится по множеству $\Gamma(X)$ всех связных неориентированных графов на X, а произведение берется по всем ребрам (x, y) графа γ. Функцию ψ_β называют функцией Урселла (см. [7]).

Далее, обозначим через $H(d)$, $d > 0$, класс параллелепипедов $V \subset Z^\nu$, удовлетворяющих условию: $\operatorname{diam} V \leqslant d|V|^{1/\nu}$. Пусть $\langle |c \cap V| \rangle_{\beta, z}$ — среднее число частиц поля, попавших в объем V, вычисленное относительно распределения $P_{\beta, z}$, $V \in C_0(Z^\nu)$, т. е.

$$\langle |c \cap V| \rangle_{\beta, z} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{\beta, z}(c \in C(Z^\nu)\colon\ |c \cap V| = n).$$

Для любого параллелепипеда $V \subset Z^\nu$ через V^m обозначим совокупность всех его m-мерных граней, а через $|V|_m = \sum\limits_{v \in V(m)} |v|$ — суммарный объем всех m-мерных граней параллелепипеда V. Например, $|V|_0$ — количество вершин V, а $|V|_\nu = |V|$.

Основные результаты настоящей статьи составляют формулируемые ниже две теоремы. Теорема 1 описывает вероятности больших уклонений числа частиц гиббсовского случайного поля, попавших в конечный объем V при $V \uparrow Z^\nu$. Аналогичный результат в случае конечного гиббсовского поля составляет содержание теоремы 2.

Опишем классы рассматриваемых ниже потенциалов. Пусть δ — эвклидово-инвариантная (т. е. инвариантная относительно всех автоморфизмов группы Z^ν) метрика на Z^ν такая, что

$$T_\delta(p) \sum_{t \in Z^\nu} (1 + |t|)^p \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(0, t)\right) < \infty, \; p \in Z_+.$$

В качестве метрики δ можно взять, например $\delta(0, t) = \gamma |t|$, $\gamma > 0$ или $\delta(0, t) = \varepsilon \ln(1 + \gamma |t|)$, $\gamma > 0$, $\varepsilon > 2p + 2\nu$.

Обозначим через $B_\delta(p)$ класс потенциалов Φ, удовлетворяющих условию

$$D_\delta(\Phi) = \sum_{t \in Z^\nu \setminus \{0\}} |\Phi(|t|)| \, e^{\delta(0, t)} < \infty.$$

Положим также

$$M_\delta(\Phi) = 2\exp\left(D_\delta(\Phi) + \exp D_\delta(\Phi) - 1\right).$$

Теорема 1. *Пусть* $z < [M_\delta(\Phi)\,(2e\,T_\delta(p) + 1)]^{-1}$, $\Phi \in B_\delta(p)$, $p > \nu$ *и пусть* $\alpha = \alpha(N, V, \beta, z) = N - \langle |c \cap V| \rangle_{\beta, z}$, $N \in Z_+$. *Тогда если* $\frac{|\alpha|}{\sqrt{|V|}} \geqslant 1$ *и* $\alpha = o(|V|)$ *при* $V \uparrow Z^\nu$, $V \in H_d$, *то имеет место соотношение:*

$$P_{\beta, z}(c \in C(Z^\nu)\colon |c \cap V| = N) = \sqrt{\frac{1}{2\pi |V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda^V_{\beta, z}(0)} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2|V|} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda^V_{\beta, z}(0)\right) \exp\left(-|V|\,\Omega^V_{\beta, z}\left(\frac{\alpha}{|V|}\right)\right)\left\{1 + O\left(\frac{\alpha}{|V|}\right)\right\}, \tag{2.1}$$

где $\Lambda^V_{\beta, z}$ *— т. н. функция отклонений (см.* [18]), *а через* $\Omega^V_{\beta, z}$ *обозначен степенной ряд*

$$\Omega^V_{\beta, z}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \Lambda^V_{\beta, z}(0),$$

сходящийся в некоторой (не зависящей от V*) окрестности нуля. При этом*

$$|V|^{-1} \frac{d^2}{dx^2} \Lambda^V_{\beta, z}(0) = \left\{\sum_{k=0}^{\nu} a_k(\beta, z)\,|V|_{\nu-k} + R(V, \beta, z)\right\}^{-1}, \tag{2.2}$$

$$|V|^{-2} \frac{d^3}{dx^3} \Lambda^V_{\beta, z}(0) = -\left\{\sum_{k=0}^{\nu} a_k(\beta, z)\,|V|_{\nu-k} + R(V, \beta, z)\right\}^{-3} \times$$
$$\times \left\{\sum_{k=0}^{\nu} \frac{da_k(\beta, z)}{d(\ln z)}\,|V|_{\nu-k} + \frac{dR(V, \beta, z)}{d(\ln z)}\right\}, \tag{2.3}$$

где коэффициенты a_k, $k = 0, 1, \cdots, \nu$ *зависят только от потенциала* Φ *и параметров* β, z, *а величина* $\frac{d^j R(V, \beta, z)}{d(\ln z)^j}$ [illegible] *при* $V \uparrow Z^\nu$, $j = 1, 2$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и при этом $\alpha = o\left(|V|^{\frac{\nu+1}{2\nu}}\right)$. Тогда

$$P_{\beta, z}(c \in C(Z^\nu)\colon |c \cap V| = N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |V|\, a_0(\beta, z)}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2|V|\, a_0(\beta, z)}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-|V|\,\Omega^V_{\beta, z}\left(\frac{\alpha}{|V|}\right)\right)\left\{1 + O\left(\frac{\alpha}{|V|^{\frac{\nu+1}{2\nu}}}\right)\right\}, \; V \uparrow Z^\nu.$$

Рассмотрим теперь случай распределения Гиббса $P_{V,\beta,z}$ в конечном объеме $V\subset Z^{\nu}$, задаваемого формулой (1.2). Пусть $<|c|>_{V,\beta,z}$ — математическое ожидание числа частиц в объеме V относительно распределения $P_{V,\beta,z}$, т. е.

$$<|c|>_{V,\beta,z}=\sum_{n=0}^{\infty} nP_{V,\beta,z}(c\subset V:|c|=N).$$

Теорема 2. *Пусть* $z<[M_b(\Phi)2eT_b(p)+1)]^{-1}$, $\Phi\in B_b(p)$, $p>\nu$ *и пусть* $a=a(N,V,\beta,z)=N-<|c|>_{V,\beta,z}$, $N\in Z_+$. *Тогда, если* $\frac{|a|}{\sqrt{|V|}}\geqslant 1$ *и* $a=o(|V|)$, *при* $V\uparrow Z^{\nu}$, $V\in H_d$, *то имеет место следующее соотношение:*

$$P_{V,\beta,z}(c\in C(V):|c|=N)=\sqrt{\frac{1}{2\pi|V|}\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_{V,\beta,z}(0)}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{a^2}{2|V|}\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_{V,\beta,z}(0)\right)\exp\left(-|V|\Omega_{V,\beta,z}\left(\frac{a}{|V|}\right)\right)\times \tag{2.4}$$

$$\times\left\{1+O\left(\frac{a}{|V|}\right)\right\},$$

где $\Lambda_{V,\beta,z}$ — *функция уклонений, а*

$$\Omega_{V,\beta,z}(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\Lambda_{V,\beta,z}(0)$$

(ряд справа сходится в некоторой, не зависящей от V, *окрестности нуля). При этом*

$$|V|^{-1}\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_{V,\beta,z}(0)=\left\{\sum_{k=0}^{\nu}\bar a_k(\beta,z)|V|_{\nu-k}+\bar R(V,\beta,z)\right\}^{-1},$$

$$|V|^{-2}\frac{d^3}{dx^3}\Lambda_{V,\beta,z}(0)=-\left\{\sum_{k=0}^{\nu}\bar a_k(\beta,z)|V|_{\nu-k}+\bar R(V,\beta,z)\right\}^{-3}\times \tag{2.5}$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{\nu}\frac{d\bar a_k(\beta,z)}{d(\ln z)}|V|_{\nu-k}+\frac{d\bar R(V,\beta,z)}{d(\ln z)}\right\},$$

где коэффициенты $\bar a_k$, $k=0,1,\cdots,\nu$ *зависят только от потенциала* Φ *и параметров* β *и* z, *а величина* $\frac{d^j\bar R(V,\beta,z)}{d(\ln z)}=o(1)$ *при* $V\uparrow Z$, $j=1,2$. *При этом* $\bar a_0=a_0$ *(см. ниже формулу (2.6)).*

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2 и при этом $a=o\left(|V|^{\frac{\nu+1}{2\nu}}\right)$. Тогда

$$P_{V,\beta,z}(c\in C(V):|c|=N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi|V|a_0(\beta,z)}}\exp\left(-\frac{a^2}{2|V|a_0(\beta,z)}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-|V|\Omega_{V,\beta,z}\left(\frac{a}{|V|}\right)\right)\left\{1+O\left(\frac{a}{|V|^{\frac{\nu+1}{2\nu}}}\right)\right\},\quad V\uparrow Z^{\nu}.$$

Отметим, что метод доказательства теорем 1 и 2 позволяет получить разложения и для следующих производных функции уклонений, аналогичные разложениям (2.2) и (2.3). Явные выражения для коэффициентов a_k и $\bar{a}_k$, $k = 0, 1, \ldots, \nu$ через функцию Урселла легко получить с помощью формул (4.10), (3.15) и (3.3), приводимых ниже. Например, приведем выражение для a_0:

$$a_0(\beta, z) = \bar{a}_0(\beta, z) = \sum_{X \in E: 0 \in \tilde{X}} \frac{z^{|X|}|X|^2}{|\tilde{X}| \cdot X!} \psi_\beta(X), \tag{2.6}$$

где ψ_β — функция Урселла.

Заметим также, что появляющийся в теоремах 1 и 2 ряд $\Omega^V_{\beta, z}$, соответственно $\Omega_{V, \beta, z}$, является обобщением известного ряда Крамера (см. [9]) на случай гиббсовских случайных полей.

Аналогичные результаты справедливы в случае классических спиновых решетчатых систем с вакуумом и общим n-частичным взаимодействием, а также в случае непрерывных систем с парным взаимодействием. В обоих случаях взаимодействие предполагается достаточно быстро убывающим на бесконечности.

3°. Рассмотрим конечное гиббсовское поле в объеме $W \in C_0(Z^\nu)$, заданное распределением $P_{W, \beta, \lambda}$ на $C(W)$, где $\lambda = \ln z$. Введем обозначения

$$P^V_{W, \lambda}(N) = P_{W, \beta, \lambda}(c \in C(W) : |c \cap V| = N)^*,$$

$$< |c \cap V| >_{W, \lambda} = \sum_{N=0}^{\infty} N P^V_{W, \lambda}(N); < |c \cap V|^2 >_{W, \lambda} = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 P^V_{W, \lambda}(D);$$

$$D_{W, \lambda} |c \cap V| = < |c \cap V|^2 >_{W, \lambda} - < |c \cap V| >^2_{W, \lambda};$$

$$\varphi^V_{W, \lambda}(s) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{isN} P^V_{W, \lambda}(N).$$

Аналогичные объекты для бесконечного гиббсовского поля $P_{\beta, \lambda}$ будем обозначать, соответственно, через $P^V_\lambda(N)$, $< | c \cap V| >_\lambda$, $D_\lambda |c \cap V|$ и φ^V_λ. В случае гиббсовского поля с переменной активностью, принимающей одно значение в объеме V и другое — вне V, для соответствующих величин мы сохраним те же обозначения, с той лишь разницей, что вместо параметра λ будем писать упорядоченную пару λ_1, λ_2; при этом первый из этих параметров всегда будет соответствовать значению активности в объеме V, а второй — вне V. Например, $P^V_{W, \lambda_1, \lambda_2}(N)$, $D_{\lambda_1, \lambda_2}|c \cap V|$ и т. д.

Пусть G — группа автоморфизмов группы Z^ν, функция f на E назовем G-инвариантной, если $f(g(X)) = f(X)$ для любых $X \in E$ и $g \in G$. G-инвариантная функция на E называется трансляционно-инвариантной (соответственно, эвклидово-инвариантной), если G — группа сдвигов решетки Z^ν (соответственно, группа всех автоморфизмов Z^ν).

---

* Для упрощения записи индекс β в дальнейшем, как правило, будем опускать.

Обозначим через Q_p пространство действительных функций q на Z^ν таких, что

$$\|q\| = \sum_{t \in Z^\nu} |q(t)|(1+|t|)^p < \infty, \quad p > \nu.$$

Пусть Q_p^+ — совокупность положительных функций из Q_p, обладающих свойством $q(t_1) = q(t_2)$, как только $|t_1| = |t_2|$.

Трансляционно-инвариантную функцию f на E назовем кластерной, если существует константа $d \geqslant 0$ и оценочная функция q такие, что для всех $X \in E$

$$|f(X)| \leqslant d \sum_{\gamma \in \Gamma_0(X)} \prod_{(x, y) \in \gamma} q(x-y), \tag{3.1}$$

где $\Gamma_0(X)$ — совокупность всех цепей, построенных на точках множества X. Напомним, что цепью называется связный неориентированный граф, каждая вершина которого инцидентна не более, чем двум ребрам. Обозначим через K_q семейство всех кластерных функций, удовлетворяющих оценке (3.1) с заданной оценочной функцией q. Примерами кластерных функций являются функция $z^{|X|}\psi_\beta(X)$, $X \in E$, где ψ_β — функция Урселла, а также определяемая ниже формулой (3.6) усеченная корреляционная функция ω_z при условии, что потенциал Φ принадлежит классу $B_\delta(p)$, $p > \nu$ и $z < (M_\delta(\Phi))^{-1}$ (см. работы [3, 10]).

Для любой кластерной функции $f \in K_q$ с $\|q\| < 1$ определим величину $\chi_V(f)$, $V \in C_0(Z^\nu)$, формулой

$$\chi_V(f) = \sum_{X \in E_V} \frac{f(X)}{X!}. \tag{3.2}$$

С помощью оценки (3.1) легко убедиться, что ряд в правой части (3.2) сходится.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение величины $\chi_V(f)$ при $V \uparrow Z^\nu$. Прежде, чем сформулировать ее, введем необходимые обозначения.

Для любого параллелепипеда $V \subset Z^\nu$, не уменьшая общности, можно считать, что начало координат является одной из вершин V. Как и в пункте 2, пусть V^m — множество всех его m-мерных граней. Каждая $\nu-m$-мерная грань $v \in V^{\nu-m}$, $m \neq 0$, единственным образом определяет m-гранный угол S_v, содержащий V. Заметим, что любой m-гранный угол S_v является пересечением m соответствующих полупространств. Через S_v^- обозначим вертикальный к S_v m-граннный угол, лежащий во внешности V. Любая грань $v \in V^{\nu-m}$, $m \neq 0$, однозначно определяет m-мерную перпендикулярную к v грань $v^\perp$, содержащую начало координат, при этом $V = v \times v^\perp$. Пусть $\bar{v}^\perp$ — пересечение S_v и m-мерного подпространства Z^ν, содержащего $v^\perp$. Пусть $\Delta(S_v)$ — совокупность всех конечных подмножеств объединения m соответствующих S_v^- подпространств, не лежащих в объединении никакой подсистемы из $m-1$ подпространств.

Далее, пусть f — кластерная функция; определим вспомогательную функцию F на $C_0(\mathbf{Z}^\nu)$ формулой:

$$F(c)=\sum_{c_1\in C_0(\mathbf{Z}^\nu\setminus c)}\frac{(-1)^{|c_1|-1}}{|c\cup c_1|}\sum_{X\in E:\tilde{X}=c\cup c_1}\frac{f(X)}{X!}.$$

Теорема 3 ([11], *см. также* [*10*]). *Пусть эвклидово-инвариантная функция* $f\in K_q$, *где* $q\in Q_p^+$, $|q|<\frac{1}{2}$ *и* $p>2\nu$. *Тогда для любого параллелепипеда* $V\in H_d$ *имеет место разложение*

$$\chi_V(f)=\sum_{m=0}^{\nu}b_m(f)|V|_{\nu-m}+R(V),$$

где коэффициенты $b_k(f)$ *определяются следующими равенствами:*
$b_0(f)=F(\{0\})$,

$$b_1(f)=b_1(f,v)=\sum_{k\in v_-^\perp}\sum_{c\in C_0(S_v^-)}F(\{x\}\cup c),\ v\in V^{(\nu-1)},\tag{3.3}$$

$$b_m(f)=b_m(f,v)=\sum_{x\in v_-^\perp}\Big\{(-1)^{m-1}\sum_{c\in C_0(S_v^-)}F(\{x\})\cup c)+$$

$$+\sum_{c\in\Delta(S_v)}F(\{x\})\cup c)\Big\},\ v\in V^{(\nu-m)},\ m=2,\cdots,\nu,$$

а остаточный член $R(V)$ *удовлетворяет соотношению:* $R(V)=o(1)$ *при* $V\uparrow\mathbf{Z}^\nu$. *(В силу эвклидовой инвариантности функции* F *коэффициенты* $b_m(f,v)$, *на самом деле, не зависят от выбора* $v\in V^{(\nu-m)}$).

Заметим, что полагая в формуле (3.2) $f(X)=e^{\lambda|X|}\psi_\beta(X)$, получим $\chi_V(f)=\ln\Xi(V,\beta,\lambda)$ (см., например, [7] или [10]). Таким образом, теорема 3 описывает, в частности, асимптотическое поведение логарифма статистической суммы.

Пусть $\xi:\mathbf{Z}^\nu\to\mathbf{C}$ — комплекснозначная функция на решетке такая, что $|\xi(u)|\leqslant 1$, $t\in\mathbf{Z}^\nu$. Рассмотрим величину

$$\Xi(V,\xi,\beta,\lambda)=\sum_{c\in C(V)}e^{\lambda|c|}\prod_{t\in c}\xi(t)e^{-\beta U(c)}.\tag{3.4}$$

Заметим, что при $\xi\equiv1$ формула (3.4) задает обычную статистическую сумму. Известно (см. лемму 1 работы [12]), что при $\lambda<-\ln M_\delta(\Phi)$, где $\Phi\in\mathbf{B}_\delta(p)$, $p>\nu$, имеет место соотношение

$$\ln\Xi(V,\xi,\lambda)=\sum_{X\in E_V}e^{\lambda|X|}\prod_{t\in\tilde{X}}(\xi(t))^{X(t)}\frac{\psi_\delta(X)}{X!}.\tag{3.5}$$

Пусть функция $\eta:\mathbf{Z}^\nu\to\mathbf{C}$ такова, что $|\eta(t)|\leqslant1$ для всех $t\in\mathbf{Z}^\nu$, а параметр λ удовлетворяет условию $\lambda<-\ln M_\delta(\Phi)$, $\Phi\in\mathbf{B}_\delta(p)$, $p>\nu$. Для $V\subset\mathbf{Z}^\nu$ положим

$$\omega_{V,\eta,\lambda}(Y)=\sum_{X\in E_V}\frac{e^{\lambda|X|}}{X!}\prod_{t\in\tilde{X}}(\eta(t))^{X(t)}\psi_\beta(X+Y).\tag{3.6}$$

Отметим, что при $\eta\equiv 1$ функция $\omega_{V,1,\lambda}\equiv\omega_{V,\lambda}$ представляет собой групповую или урезанную корреляционную функцию (см. [7, 13]) и, как это показано в [3], является кластерной функцией.

Лемма 1. *Пусть* ξ *и* η — *комплексновначные функции на* Z^ν *такие, что* $|\xi(t)|\leqslant 1$, $|\eta(t)|<1$, $t\in Z^\nu$. *Тогда при* $\lambda<-\ln M_3(\Phi)$, $\Phi\in B_1(p)$, $p>\nu$, *имеет место разложение*

$$\ln\Xi(V,\xi,\lambda)-\ln\Xi(V,\eta,\lambda)=\sum_{Y\in\tilde{E}_V:Y\neq 0}\frac{e^{\lambda|Y|}}{Y!}\omega_{V,\eta,\lambda}(Y)\prod_{t\in\tilde{Y}}(\xi(t)-\eta(t))^{Y(t)}. \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу (3.5), имеем

$$\ln\Xi(V,\xi,\lambda)=\sum_{X\in\tilde{E}_V}e^{\lambda|X|}\prod_{t\in\tilde{X}}(\xi(t)-\eta(t)+\eta(t))^{X(t)}\frac{\psi_\beta(X)}{X!}=$$

$$=\sum_{X\in\tilde{E}_V}\frac{e^{\lambda|X|}\psi_\beta(X)}{X!}\sum_{Y\in\tilde{E}_V:Y\leqslant X}\prod_{t\in\tilde{Y}}(\xi(t)-\eta(t))^{Y(t)}\prod_{t\in\tilde{X}}(\eta(t))^{X(t)-Y(t)}=$$

$$=\sum_{Y\in\tilde{E}_V}\frac{e^{\lambda|X|}}{Y!}\prod_{t\in\tilde{Y}}(\xi(t)-\eta(t))^{Y(t)}\sum_{X\in\tilde{E}_V}\frac{e^{\lambda|X|}}{X!}\prod_{t\in\tilde{X}}(\eta(t))^{X(t)}\psi_\beta(X+Y),$$

откуда следует утверждение леммы 1.

Следующая лемма дает полезное представление характеристической функции φ_λ^V числа частиц гиббсовского случайного поля, попавших в объем V, и описывает ее важные свойства, используемые при доказательстве теоремы 1.

Лемма 2. *Пусть* $\lambda<-\ln M_6(\Phi)$ *и* $\Phi\in B_6(p)$, $p>\nu$. *Тогда*

1) $$\ln\varphi_\lambda^V(s)=\sum_{X\in\tilde{E}_V:X\neq 0}\frac{e^{\lambda|X|}}{X!}(e^{is}-1)^{|X|}\omega_\lambda(X),$$

где $\omega_\lambda\equiv\omega_{Z^\nu,\lambda}$;

2) $$\frac{d}{ds}\ln\varphi_\lambda^V(s)=i\langle|c\cap V|\rangle_{\lambda+is,\lambda};$$

3) $$\frac{d^2}{ds^2}\ln\varphi_\lambda^V(s)=i^2D_{\lambda+is,\lambda}|c\cap V|.$$

Прежде, чем перейти к доказательству леммы 2, заметим, что из 1) вытекает вещественная аналитичность характеристической функции $\varphi_\lambda^V(s)$ по s при условии $\lambda<-\ln M_6(\Phi)$. Кроме того, для любого τ, $\tau<-\ln M_6(\Phi)-\lambda$, в силу утверждения 3) леммы

$$D_{\lambda+\tau,\lambda}|c\cap V|=\frac{d}{d\tau}\langle|c\cap V|\rangle_{\lambda+\tau,\lambda}. \tag{3.8}$$

Доказательство леммы 2. Как легко видеть

$$P^V_{W,\lambda}(N)=\frac{e^{\lambda N}}{\Xi(W,\lambda)}\sum_{c_1\subset V:|c_1|=N}\;\sum_{c_2\subset W\setminus V}\exp(\lambda|c_2|-\beta U(c_1\cup c_2)),$$

откуда, пользуясь формулой (3.4), для характеристической функции $\varphi^V_{W,\lambda}$ получаем

$$\varphi^V_{W,\lambda}(s) = \frac{\Xi(W, e^{isI_V}, \lambda)}{\Xi(W, \lambda)}, \tag{3.9}$$

где I_V — индикатор множества V. Поэтому

$$\ln \varphi^V_{W,\lambda}(s) = \ln \Xi(W, e^{isI_V}, \lambda) - \ln \Xi(W, \lambda).$$

Теперь, применяя лемму 1, получаем

$$\ln \varphi^V_{W,\lambda}(s) = \sum_{X \in E_V : X \neq 0} \frac{e^{\lambda |X|}}{X!} (e^{is} - 1)^{|X|} \omega_{W,\lambda}(X). \tag{3.10}$$

В условиях леммы 2 усеченная корреляционная функция является кластерной, в силу чего ряд в правой части (3.10) сходится равномерно относительно $W \subset Z^\nu$. Отсюда, с учетом того, что $\lim\limits_{W \uparrow Z^\nu} \omega_{W,\lambda} = \omega_\lambda$, получаем первое утверждение леммы.

Далее, как легко видеть

$$\frac{d}{ds} \ln \varphi^V_{W,\lambda}(s) = \frac{d}{ds} \ln \Xi(W, e^{isI_V}, \lambda) = i \langle |c \cap V| \rangle_{W,\lambda+is,\lambda},$$
$$\frac{d^2}{ds^2} \ln \varphi^V_{W,\lambda}(s) = i \frac{d}{ds} \langle |c \cap V| \rangle_{W,\lambda+is,\lambda}. \tag{3.11}$$

Отсюда, так как $P_{W,\lambda}$ слабо сходится к P_λ при $W \uparrow Z^\nu$, то согласно теореме непрерывности Леви—Крамера [14] с учетом аналитичности $\varphi^V_{W,\lambda}$ при $\lambda < -\ln M_\delta(\Phi)$ получаем, что

$$\lim_{W \uparrow Z^\nu} \ln \varphi^V_{W,\lambda}(s) = \ln \varphi^V_\lambda(s); \quad \lim_{W \uparrow Z^\nu} \langle |c \cap V| \rangle_{W,\lambda+is,\lambda} = \langle |c \cap V \rangle_{\lambda+is,\lambda};$$
$$\lim_{W \uparrow Z^\nu} D_{W,\lambda+is,\lambda} |c \cap V| = D_{\lambda+is,\lambda} |c \cap V| \tag{3.12}$$

равномерно по s на любом ограниченном интервале вещественной оси. Следовательно, дифференцирование и предельный переход можно переставить, т. е.

$$\frac{d^k}{ds^k} \ln \varphi^V_\lambda(s) = \lim_{W \uparrow Z^\nu} \frac{d^k}{ds^k} \ln \varphi^V_{W,\lambda}(s), \quad k = 1, 2. \tag{3.13}$$

Комбинируя (3.11)—(3.13) с очевидным равенством

$$\frac{d}{ds} \langle |c \cap V| \rangle_{W,\lambda+is,\lambda} = i D_{W,\lambda+is,\lambda} |c \cap V|,$$

получаем утверждения 2) и 3). Таким образом, леммы 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $V \in H_d$, $\Phi \in \mathbf{B}_\delta'(p)$, $p > \nu$ *и* $\lambda < \bar{\lambda}_\delta(p) = -\ln[M_\delta(\Phi)(2e\, T_\delta(p) + 1)]$. *Тогда для логарифма характеристической функции справедливо разложение:*

$$\ln \varphi^V_\lambda(s) = \sum_{k=0}^{\nu} \bar{b}_k(\lambda, s) |V|_{\nu-k} + R(V, \lambda, s), \tag{3.14}$$

где величины $\ln\varphi_\lambda^V(s)$, $\overline{b}_k(\lambda, s)$, $k=0, 1, \cdots, \nu$ *и* $R(V, \lambda, s)$ *аналитичны по* s *в некоторой достаточно малой окрестности нуля, а* $R(V, \lambda, s)=o(1)$ *при* $V \uparrow Z^\nu$.

Доказательство. Согласно формуле (3.2) и утверждению 1) леммы 2 имеем

$$\ln\varphi_\lambda^V(s) = \lambda_V(f_{\lambda, s}),$$

где функция $f_{\lambda, s}(X)$, $X \in E$, определяется формулой $f_{\lambda, s}(X) = e^{\lambda|X|} \times \times (e^{is}-1)^{|X|}\,\omega_\lambda(X)$ при $X \neq 0$ и $f_{\lambda, s}(0)=0$. В условиях леммы, как известно, ω_λ является кластерной функцией (см. [3]), что влечет кластерность функции $f_{\lambda, s}$. Отсюда полагая

$$\overline{b}_k(\lambda, s) = b_k(f_{\lambda, s}),\quad k=0, 1, \cdots, \nu, \tag{3.15}$$

с помощью теоремы 3 получаем разложение (3.14). Аналитичность величин $\ln\varphi_\lambda^V(s)$ и $\overline{b}_k(\lambda, s)$ при достаточно малых значениях $|s|$ вытекает из их явных выражений, приведенных в утверждении 1) леммы 2 и формулах (3.3) соответственно.

Лемма 3 доказана.

В заключение этого пункта приведем результат об асимптотическом разложении в локальной предельной теореме для числа частиц гиббсовского поля.

Теорема 4 [15]. *Пусть* $\lambda < \overline{\lambda}_0(p)$, *потенциал* Φ *принадлежит классу* $B_\lambda(p)$, $p > \nu$ *и последовательность параллелепипедов* $V_n \in H_d$ *такова, что* $V_n \uparrow Z^\nu$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любого фиксированного числа* $a>0$ *и всех натуральных* N *таких, что* $|N - \langle c\cap V_n\rangle_\lambda| < a\sqrt{|V_n|}$ *имеет место асимптотика:*

$$P_\lambda(|c\cap V_n|=N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_2(V_n, \lambda)|V_n|}}\exp\left\{-\frac{(N-\langle|c\cap V_n|\rangle_\lambda)^2}{2\gamma_2(V_n, \lambda)|V_n|}\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{\gamma_3(V_n, \lambda)}{6\sqrt{\gamma_2^3(V_n, \lambda)|V_n|}}\left[3\frac{N-\langle|c\cap V|\rangle_\lambda}{\sqrt{\gamma_2(V_n, \lambda)|V_n|}}-\frac{N-\langle|c\cap V_n|\rangle_\lambda}{\sqrt{\gamma_2(V_n, \lambda)|V_n|}}\right]+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{1}{|V_n|}\right)\right\}$$

равномерно относительно N *в указанном промежутке. При этом*

$$|V_n|\gamma_m(V_n, \lambda) = \frac{1}{i^m}\frac{d^m}{ds^m}\ln\varphi_\lambda^{V_n}(0) = \frac{1}{i^m}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{d^m}{ds^m}\overline{b}_k(\lambda, 0)\,|V_n|^{1-k} +$$
$$+\frac{1}{i^m}\frac{d^m}{ds^m}R(V_n, \lambda, 0),\quad m=2, 3,$$

где $\frac{d^m}{ds^m}R(V_n, \lambda, 0)=o(1)$ *при* $n\to\infty$, $\gamma_1(V_n, \lambda) = \frac{1}{|V_n|}\langle|c\cap V_n|\rangle_\lambda$.

4°. Доказательство теоремы 1. По формуле обращения

$$P_{W, \lambda}^V(N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{W, \lambda}^V(s)\,e^{-iNs}\,ds. \tag{4.1}$$

Далее, из определения статистической суммы следует, что $\Xi(W, \lambda)$ аналитична по λ на всей комплексной плоскости и отлична от нуля для вещественных λ. Следовательно, в силу (3.9), функция $\varphi^V_{W,\lambda}(s)$ аналитична по s на всей комплексной плоскости при условии $\operatorname{Im}\lambda = 0$, которое всюду ниже предполагается выполненным. Отсюда для любого вещественного τ следует равенство:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^V_{W,\lambda}(s)\, e^{-iNs}\, ds = \int_{-\pi-i\tau}^{\pi-i\tau} \varphi^V_{W,\lambda}(s)\, e^{-iNs}\, ds. \tag{4.2}$$

После замены переменной $s = u - i\tau$ в правой части (4.2), в силу (4.1) получаем

$$P^V_{W,\lambda}(N) = e^{-\tau N}\varphi^V_{W,\lambda}(-i\tau)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi^V_{W,\lambda}(u-i\tau)}{\varphi^V_{W,\lambda}(-i\tau)}\, e^{-iNu}\, du. \tag{4.3}$$

С другой стороны, поскольку с учетом (3.9)

$$\lim_{W\uparrow Z^\nu}\frac{\varphi^V_{W,\lambda}(u-i\tau)}{\varphi^V_{W,\lambda}(-i\tau)} = \lim_{W\uparrow Z^\nu}\frac{\Xi(W, e^{(iu+\tau)I_V},\lambda)}{\Xi(W, e^{\tau I_V}, \lambda)} = \lim_{W\uparrow Z^\nu}\varphi^V_{W,\lambda+\tau,\lambda}(u) = \varphi^V_{\lambda+\tau,\lambda}(u),$$

то совершив в (4.3) предельный переход при $W \uparrow Z^\nu$, получим

$$P^V_\lambda(N) = e^{-\tau N}\varphi^V_\lambda(-i\tau)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^V_{\lambda+\tau,\lambda}(u)\, e^{-iNu}\, du =$$

$$= e^{-\tau N}\varphi^V_\lambda(-i\tau)\, P^V_{\lambda+\tau,\lambda}(N). \tag{4.4}$$

Определим функцию $h^V_\lambda(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, по формуле

$$h^V_\lambda(\tau) = \frac{1}{|V|}(\langle|c\cap V|\rangle_{\lambda+\tau,\lambda} - \langle|c\cap V|\rangle_\lambda). \tag{4.5}$$

В силу (3.8), функция $h^V_\lambda(\tau)$ вещественно аналитична по τ при условии $\max(\lambda, \lambda+\tau) < -\ln M_1(\Phi)$.

Далее, из леммы 2 работы [16] следует оценка

$$\frac{1}{|V|}D_{\lambda+\tau,\lambda}|c\cap V| \geqslant C(\Phi) > 0 \tag{4.6}$$

для всех достаточно больших V и τ из промежутка $|\tau| < -\ln M_1(\Phi) - \lambda$.

Замечание. Некоторые известные результаты, используемые нами в настоящей работе (в том числе и лемма 2 из [16]), доказаны для гиббсовских полей с постоянной активностью. Однако, как легко видеть, соответствующие доказательства, распространяются без изменений и на тот случай, когда активность поля принимает два значения.

Согласно (3.8) и (4.6), $\frac{d}{d\tau}h^V_\lambda(\tau) > C(\Phi) > 0$ при $\max(\lambda, \lambda+\tau) < -\ln M_1(\Phi)$, откуда следует, что для всех достаточно больших V, в некоторой окрестности нуля: $|x| < x_+$, существует вещественно аналитическая функция $g^V_\lambda(x)$, обратная к $h^V_\lambda(\tau)$. Как это следует из формулы (46), в качестве величины x_+, не зависящей от V, можно взять величину — $C(\Phi)(\ln M_\delta(\Phi)+\lambda)$.

Теперь положим

$$\Lambda_\lambda^V(x)=g_\lambda^V(x)\left(\frac{<|c\cap V|>_\lambda}{|V|}+x\right)-$$

$$-\frac{1}{|V|}\ln\varphi_\lambda^V(-ig_\lambda^V(x)),\ |x|<x_+. \tag{4.7}$$

Следуя [8], назовем функцию Λ_λ^V функцией уклонений. В силу 2) леммы 2 и формулы (4.5) получаем, что $\frac{d}{dx}\Lambda_\lambda^V(x)=g_\lambda^V(x)$, откуда следует вещественная аналитичность функции уклонений при $|x|<x_+$, а также соотношения:

$$\Lambda_\lambda^V(0)=\frac{d}{dx}\Lambda_\lambda^V(0)=0,\ \frac{d^2}{dx^2}\Lambda_\lambda^V(x)=\left(\frac{d}{d\tau}h_\lambda^V(\tau)\Big|_{\tau=g_\lambda^V(x)}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{|V|}\frac{d}{d\tau}<|c\cap V|>_{\lambda+\tau,\lambda}\Big|_{\tau=g_\lambda^V(x)}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{|V|}D_{\lambda+g_\lambda^V(x),\lambda}|c\cap V|\right)^{-1}. \tag{4.8}$$

Предположим, что $<|c\cap V|>_{\lambda+\tau,\lambda}=N$, где $N\in\mathbf{Z}_+$, тогда согласно теореме 4 имеем

$$P_{\lambda+\tau,\lambda}^V(N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda+\tau,\lambda}|c\cap V|}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{|V|}}\right)\right) \tag{4.9}$$

при $\max(\lambda+\tau,\lambda)<-\ln M_\lambda(\Phi)$ и $V\uparrow\mathbf{Z}^\nu$.

С другой стороны, полагая $\tau=g_\lambda^V(x)$, из (4.5) и (4.7) получим

$$\varphi_\lambda^V(-i\tau)\exp(-\tau<c\cap V|>_{\lambda+\tau,\lambda})=\exp(-V|\Lambda_\lambda^V|(x).$$

Пусть теперь $\tau_a=g_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)$, где величина a та же, что и в теореме 1, тогда согласно (4.5) для достаточно больших V имеем

$$\frac{N}{|V|}-\frac{<|c\cap V|>_\lambda}{|V|}=h_\lambda^V\left(g_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)\right)=\frac{<|c\cap V|>_{\lambda+\tau_a,\lambda}}{|V|}-\frac{<|c\cap V|>_\lambda}{|V|},$$

откуда $<|c\cap V|>_{\lambda+\tau_a,\lambda}=N$. Таким образом, в силу (4.4), (4.8) и (4.9) получаем, что

$$P_\lambda^V(N)=\sqrt{\frac{1}{2\pi|V|}\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)}\exp\left(-|V|\Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{|V|}}\right)\right).$$

Отсюда, имея в виду, что $\Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)=\frac{a^2}{|V|}\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_\lambda^V(0)+\Omega_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_\lambda^V\left(\frac{a}{|V|}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_\lambda^V(0)+O\left(\frac{a}{|V|}\right)\ \text{при}\ V\uparrow\mathbf{Z}^\nu,$$

получаем соотношение (2.1).

Перейдем теперь к выводу асимптотического разложения (2.2). Согласно (4.8) имеем

$$\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_\lambda^V(0)=-\left(\frac{1}{|V|}\frac{d^2}{ds^2}\ln\varphi_\lambda^V(s)\Big|_{s=0}\right)^{-1}.$$

С другой стороны, в силу леммы 3

$$\frac{d^2}{ds^2}\ln\varphi_\lambda^V(0)=\sum_{k=0}^{v}\frac{d^2}{ds^2}\overline{b}_k(\lambda,\ 0)\,|V|_{\nu-k}+\frac{d^2}{ds^2}R(V,\lambda,0).$$

Отсюда, полагая

$$a_k(z)=\frac{d^2}{ds^2}\overline{b}_k(\ln z,\ 0),\tag{4.10}$$

получаем соотношение (2.2).

Формула (2.3) доказывается аналогично. Таким образом, теорема 1 доказана.

5°. Доказательство теоремы 2. Поскольку доказательства теорем 1 и 2 следуют одной и той же схеме, в этом пункте мы приводим лишь набросок доказательства теоремы 2.

Пусть $P_{V,\lambda}(N)=P_{V,\lambda}(c\subset V:|c|=N)$. Согласно формуле обращения имеем

$$P_{V,\lambda}(N)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{V,\lambda}(t)\,e^{-itN}dt,$$

где характеристическая функция числа частиц в объеме V имеет вид

$$\varphi_{V,\lambda}(t)=\frac{\Xi(V,\lambda+it)}{\Xi(V,\lambda)}.$$

В условиях теоремы статсумма $\Xi(V,\lambda)$ аналитична по λ на всей плоскости (см. [7]) и отлична от нуля при вещественных λ. Поэтому функция $\varphi_{V,\lambda}(t)$ аналитичная по t на всей комплексной плоскости. Кроме того, очевидно

$$\frac{\varphi_{V,\lambda}(u-i\tau)}{\varphi_{V,\lambda}(-i\tau)}\varphi_{V,\lambda+\tau}(u).$$

Таким образом, по аналогии с (4.4) получаем

$$P_{V,\lambda}(N)=\varphi_{V,\lambda}(-i\tau)\,e^{-\tau N}P_{N,\lambda+\tau}(N).$$

Определим функцию $h_{V,\lambda}(\tau)$, $-\infty<\tau<+\infty$, формулой

$$h_{V,\lambda}(\tau)=\frac{1}{|V|}(<|c|>_{V,\lambda+\tau}-<|c|>_{V,\lambda}).$$

Имеют место следующие легко проверяемые соотношения:

$$<|c|>_{V,\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\ln\Xi(V,\lambda),$$

$$\frac{d}{d\lambda}<|c|>_{V,\lambda}=D_{V,\lambda}|c|,\tag{5.1}$$

где $D_{V,\lambda}|c|$ — дисперсия числа частиц в объеме V, вычисленная относительно распределения $P_{V,\lambda}$. В силу (5.1) функция $h_{V,\lambda}(\tau)$ аналитична по τ на вещественной оси. С другой стороны, согласно лемме 2 работы [17] для достаточно больших объемов V и для любого конечного замкнутого интервала значений λ имеет место оценка

$$\frac{1}{|V|} D_{V,\lambda}|c| \geqslant \overline{C}(\Phi) > 0.$$

Отсюда для больших V в некоторой окрестности нуля, не зависящей от V, следует существование аналитической функции $g_{V,\lambda}$, обратной к $h_{V,\lambda}$.

Определим функцию уклонений

$$\Lambda_{V,\lambda}(x) = g_{V,\lambda}(x)\left(\frac{\langle|c|\rangle_{V,\lambda}}{|V|} + x\right) - \frac{1}{|V|}\ln\varphi_{V,\lambda}(-ig_{V,\lambda}(x)).$$

Далее, повторяя рассуждения, использованные нами в предыдущем пункте при выводе формулы (2.1), легко получить соотношение (2.4) теоремы 2.

Для доказательства (2.5) заметим, что

$$\frac{d^2}{dx^2}\Lambda_{V,\lambda}(0) = |V|\left(\frac{d^2}{d\lambda^2}\ln\Xi(V,\lambda)\right)^{-1}$$

Остается воспользоваться асимптотическим разложением логарифма статсуммы (см. выше теорему 3). Таким образом теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что теорема о больших уклонениях для гиббсовских случайных полей может быть доказана также с использованием результатов В. Статулявичуса и его школы, полученных применением метода семиинвариантов (см. [18]).

Институт математики
АН Армении

Поступила 3.XI.1989

Ս. Կ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ. Մեծ շեղումների հավանականությունները Գիբսի պատահական դաշտերի համար (ամփոփում)

Գիբսի պատահական դաշտերի համար ստացված է լոկալ սահմանային թեորեմ վերջավոր V ծավալում մասնիկների թվի մեծ շեղումների հավանականությունների վերաբերյալ, երբ $V\to\infty$: Նման արդյունք ստացված է նաև վերջավոր ծավալում Գիբսի մեծ անսամբլի մասնիկների թվի համար ազատ սահմանային պայմանների դեպքում:

S. K. POGOSIAN. *Probabilities of large deviations for Gibbs random fields* (summary)

For the Gibbs random fields a local limit theorem is obtained for the probabilities of large deviations of the number of particles in a finite volume V, $V\to\infty$. An analogous result is obtained for the number of particles of the grand canonical ensemble in a finite volume with free boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник.* Независимые и стационарно связанные величины, М., Наука, 1965.
2. *В. В. Петров.* Суммы независимых случайных величин, М., Наука, 1972.
3. *M. Duneau, B. Souillard.* Cluster properties of lattice and continuous systems Comm. Math. Phys., 47, 1976, 155—166.
4. *M. Duneau, D. Iagolnitzer, B. Souillard.* Decay of correlations for infinite—range interactions, J. Math. Phys., 16, 1975, 1662—1666.
5. *Р. Л. Добрушин.* Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функц. анализ, 2, вып. 4, 1968, 31—43.
6. *Р. Л. Добрушин.* Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, Функц. анализ, 2, вып. 4, 1968, 44—57.
7. *Д. Рюэль.* Статистическая механика. Строгие результаты, М., Мир, 1971.
8. *А. А. Боровков* Теория вероятностей, М., Наука, 1986.
9. *H. Cramer.* Sur un nouveal theoreme limite de la theorie des probabilites, Actuar sci. et ind., 736, Paris, 1938 (УМН 10, 1944, 166—178).
10. *S. Pogosian.* Asymptotic expansion of the logarithm of the partition function, Comm. Math. Phys., 95, 1984, 227—245.
11. *В. А. Арзуманян, Б. С. Нахапетян, С. К. Погосян.* Асимптотическое разложение логарифма статсуммы в спиновых решетчатых системах с вакуумом, Теорет. и математ. физика, 81, № 2, 1989, 175—184.
12. *G. Del Grosso.* On the local central limit theorem for Gibbs processes, Comm. Math. Phys., 37, 1974. 141—160.
13. *G. Gallavotti, S. Miracle--Sole.* Correlation functions of a lattice system, Comm. Math. Phys., 7, 1968, 274—288.
14. *К. Партасарати.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры, М., Мир, 1983.
15. *S. Pogosian.* Asymptotic expansion in the local limit theorem for the particle number in the grand canonical ensemble, Random fields, Estergom (Hungary), 1979.
16. *Р. Л. Добрушин, Б. С. Нахапетян.* Сильная выпуклость давления для решетчатых систем классической статистической физики, Теорет. и математ. физика, 20, № 2, 1974, 223—234.
17. *Р. Л. Добрушин, Р. А. Минлос.* Существование и непрерывность давления в классической статистической физике. Теория вероятн. и ее применения, XII, № 4, 1964, 595—618.
18. *А. Саулис, В. Статулявичус.* Предельные теоремы о больших уклонениях, Вильнюс, Мокслас, 1989.