ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 5, 1990 Математика

УДК 517.51

Р. И. ОВСЕПЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА И ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Сначала условимся относительно некоторых обозначений и определений, при этом будем исходить из того, что читатель знаком с системой Хаара $\{\chi_n\}$ (см., например, [1]).

Каждой функции χ_n естественным образом соотносятся двоичные интервалы Δ_n^+ и Δ_n^-, на каждом из которых функция χ_n является постоянной соответствующего знака. В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, значки $\pm$ мы будем опускать.

Определение 1. *Вложенную последовательность двоичных интервалов постоянства Δ_{n_i} функций χ_{n_i}, $2\cdot|\Delta_{n_{i+1}}|=|\Delta_{n_i}|$ назовем цепочкой.*

Определение 2. *Будем говорить, что ряд*

$$\sum a_n\cdot\chi_n \tag{1}$$

удовлетворяет L^p-условию, $1\leqslant p\leqslant\infty$, если на каждой цепочке выполняется соотношение

$$\underline{\lim}\,\|a_{n_i}\cdot\chi_{n_i}\|_{L^p(\Delta_{n_i})}=0,\ 1\leqslant p<\infty^*, \tag{2}$$

$$\underline{\lim}\,\|a_{n_i}\cdot\chi_{n_i}\|_{L^\infty(\Delta_{n_i})}<\infty,\quad p=\infty. \tag{3}$$

Определение 3. *Последовательность функций f_n, $n\geqslant 1$, принадлежащих пространству $L^1[0;1]$ называется центрированной системой, если для любого n и произвольного элемента e σ-алгебры σ_n, порожденной функциями $f_1, f_2,\cdots, f_n$, выполняется равенство $\int_e f_{n+1}\,dx=0$. Последовательность $S_n=\sum_1^n f_i$, называется мартингалом.*

Очевидно, что соотношение, определяющее мартингал, можно записать и так

$$\int_e S_n\,dx=\int_e S_{n+1}\,dx\quad \forall e\in\sigma_n,\ \forall n.$$

Если $f_n\in L^2$, то система $(f_n)_1^\infty$ будет ортогональной (см. [3] стр. 208).

---

* L^1- условие равносильно известному условию А. А. Талаляна—Ф. Г. Арутюняна (см. [2]).

Будем предполагать еще, что f_n непрерывны на $[0; 1]$ и $\|f_n\|_2=1$. Класс этих систем в определенном смысле довольно широк (см. [4], [5]). Этот класс будем обозначать через F.

Через Φ обозначим класс центрированных систем $(\varphi_n)_1^\infty$, $\|\varphi_n\|_2=1$, состоящих из таких ступенчатых функций φ_n (на $[0; 1]$), что для произвольного n на каждом из интервалов постоянства Δ_n функции φ_n математическое ожидание функции φ_{n+1} равно нулю. Определения 1 и 2 для таких систем понимаются естественным образом. Очевидно, что система Хаара принадлежит классу Φ.

Пусть T — вполне регулярный теплицевский метод суммирования с конечнострочной матрицей. В частном случае, когда элементы матрицы неотрицательны, метод называют положительным.

Результаты данной работы относятся к вопросам единственности для систем класса F и систмеы Хаара. Для последней этот круг вопросов подробно исследовался рядом зарубежных и советских авторов. Центральной здесь является теорема В. А. Скворцова (см. [6]): *если ряд Хаара* (1) *удовлетворяет L^1-условию и его T-средние t_n для какого-нибудь положительного метода удовлетворяют неравенству*

$$\underline{\lim}\, t_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}\, t_n(x)\ \forall x \text{ и. с. м.} \tag{4}$$

(*т. е. всюду на* $[0; 1]$, *за исключением, быть может, некоторого подмножества, не более чем счетного*), *где f—конечная функция, интегрируемая в смысле узкого интеграла Данжуа* ($f\in D^*$), *то* (1) *является рядом Фурье-Данжуа функции f.*

Что же касается переставленных рядов Хаара с L^1-условием, то здесь известны такие результаты.

Г. М. Мушегян (см. [7]): *Даже при наличии сходимости переставленного ряда всюду к конечной функции f класса $L^p\ \forall p<2$, он не обязан быть рядом Фурье; если же $f\in L^2$, то результат оказывается положительным и при более слабой сходимости: достаточно, чтобы некоторая подпоследовательность $S^\sigma_{n_i}$ частичных сумм σ-переставленного ряда сходилась к $f(x)$ всюду и. с. м.*

Ранее нами было отмечено (см. [8], *стр. 79), что условие*

$$\forall x\in[0; 1] \text{ и. с. м. } S_n(x)\nrightarrow\infty \tag{5}$$

гарантирует положительный результат даже в классе D^*, лишь бы переставленный ряд T-суммировался по мере к $f\in D^*$ (причем последнее требование нельзя заменить на условие (6) *хотя бы f и $(S_n)_1^\infty$ были равномерно ограниченными).*

Первые три результата настоящей работы относятся к системе Хаара.

Теорема 1. *Если T-средние t_n^σ σ-переставленного ряда Хаара с L^1-условием всюду на $[0; 1]$ и. с. м. сходятся к ограниченной функции f, то это ряд Фурье функции f.*

В случае положительности метода T это утверждение было установлено В. А. Скворцовым (см. [6]).

Из третьей теоремы следует, что приведенный выше результат теряет силу, если сходимость средних t_n^σ заменить на условие (6), даже если при этом для ряда (1) выполнено L^p-условие при всех $p < \infty$.

Однако справедлива

Теорема 2. *Если ряд Хаара* (1) *удовлетворяет* L^∞*-условию* (3) *и для* T*-средних* σ*-переставленного ряда выполнено требование*

$$\underline{\lim}\, t_n^\sigma(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}\, t_n^\sigma(x) \ \forall x \ \text{и. с. м.}, \tag{6}$$

где f*—ограниченная и непрерывная почти всюду функция (или* $f \in D$ *и непрерывна всюду и. с. м.), то* (1)*—ряд Фурье этой функции.*

Отметим, что без требования непрерывности почти всюду (или всюду и. с. м.) теорема не верна.

Теорема 2 справедлива для любой системы класса Φ; теорема 1 также, если в ней условие (2) чуть усилить:

$$\underline{\lim}\, \|S_n\|_{L^1(\Delta_n)} = 0 \text{ на каждой цепочке } (\Delta_n) \tag{7}$$

(или же предположить некоторую «равномерность» разбиений в конструкции системы φ_n).

Следующий результат показывает, что в теореме 2 L^∞-условие нельзя ослабить даже для $f \equiv 0$.

Теорема 3. *Существует ряд Хаара* (1), *не являющийся рядом Фурье, несмотря на выполнение следующих условий:*

$$\sum_1^\infty \|a_n \cdot \chi_n\|_p^{p+\varepsilon} < \infty \ \forall p < \infty, \ \forall \varepsilon > 0 \tag{8}$$

и существует перестановка σ *ряда* (1) *такая, что*

$$\forall x \in [0; 1] \ \exists n_l \equiv n_l(x):\ S_{n_l}^\sigma(x) \underset{l}{\to} 0. \tag{9}$$

Что же касается систем $(f_n)_1^\infty$ класса F, то оказывается, что условия типа (9) уже достаточно для положительного утверждения. Более того, справедлива

Теорема 4. *Если для* T*-средних* t_n^σ *ряда*

$$\sum_1^\infty a_n \cdot f_n(x) \tag{10}$$

переставленного в порядке σ, *выполнено соотношение*

$$\underline{\lim}\, t_n^\sigma(x) < 0 \leqslant \overline{\lim}\, t_n^\sigma \ \forall x \ \text{и. с. м.}, \tag{11}$$

то все a_n *равны нулю.*

Из доказательства легко усматриваются более сильные формулировки.

Отметим, что теорема 4 может иметь место и для полной ортонормированной ограниченной системы (тригонометрических полиномов). Кроме того, практически любая ортонормированная система содержит подсистему, для которой справедливо это утверждение (см. [9]).

Аналогом теоремы 1 для систем (f_n) является

Теорема 5. *Если* T*-средние* t_n^σ σ*-переставленного ряда* (10) *всюду на* $[0; 1]$ *и. с. м. сходятся к ограниченной функции* f, *то* (10)*—ряд Фурье этой функции.*

Что касается класса конечных суммируемых функций f, то ситуация здесь более деликатная: для одних систем класса F из сходимости переставленного ряда всюду к f следует восстановление коэффициентов, для других это не так.

Доказательство первых двух теорем изложим сразу для систем (φ_n) класса Φ, причем, с целью упрощения индексации, будем считать (без ограничения общности), что на всех интервалах постоянства Δ_n функции φ_n следующая функция φ_{n+1} отлична от тождественного нуля.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что если бы частные суммы S_n ряда

$$\sum_{1}^{\infty} a_k \cdot \varphi_k \tag{12}$$

были равномерно ограниченными, то утверждение теоремы 1 было бы выполнено. В самом деле: ведь ряд (12) в таком случае сходился бы в метрике L^2 и после перестановки σ, следовательно, средние t_n^σ тоже сходились бы в L^2, а потому и по мере, причем к самой функции f.

Таким образом, если теорема 1 не верна, то это значит, что для произвольного $A>\|f\|_\infty$ существуют номер n_0 и интервал постоянства Δ_{n_0} функции φ_{n_0} такие, что

$$S_{n_0}(\Delta_{n_0})>A \tag{13}$$

(случай «$<-A$» рассматривается аналогично).

Как и в работе [6] выберем цепочку $\Delta_k\supset\Delta_{k+1}\supset\cdots$, $k=n_0$, на которой выполняются соотношения

$$a_n\cdot\varphi_n(\Delta_n)\geqslant 0,\ \forall n>n_0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует

$$S_n(\Delta_n)\geqslant S_{n_0}(\Delta_{n_0}),\ \forall n\geqslant n_0. \tag{15}$$

Покажем, что найдутся номер $m>n_0$ и интервал постоянства $\delta_m\subset\Delta_{n_0}$ функции φ_m такие, что

$$\delta_m\cap\Delta_m=\varnothing;\ S_m(\delta_m)>A. \tag{16}$$

Обратное предположение означало бы

$$S_m(x)\leqslant A\ \ \forall x\in\Delta_{n_0}\setminus\Delta_m,\ \forall m>n_0, \tag{17}$$

а это, с учетом (15) и центрированности системы φ_n, привело бы к соотношению

$$\int_{\Delta_m} S_m=\int_{\Delta_{n_0}} S_m-\int_{\Delta_{n_0}\setminus\Delta_m} S_m\geqslant(S_{n_0}(\Delta_{n_0})-A)\cdot|\Delta_{n_0}|,\ \forall m>n_0, \tag{18}$$

которое, в силу (13), противоречило бы условию (7) или L^1-условию, если система φ_n такова: для любого интервала постоянства Δ_l существует $\alpha\in(0;1)$ такое, что для интервалов постоянства $\Delta_l\supset\Delta_{l+1}$, лежащих на Δ_l, выполнено соотношение

$$|\Delta_{i+1}|:|\Delta_i|\leqslant\alpha,\ \forall i\geqslant l, \tag{19}$$

Таким образом, из (13) следует существование интервалов постоянства δ_{m_0}, Δ_{m_0}, лежащих на Δ_{n_0} и удовлетворяющих условиям

$$\delta_{m_0} \cap \Delta_{m_0} = \varnothing;\ S_{m_0}(\delta_{m_0}) > A,\ S_{m_0}(\Delta_{m_0}) > A. \tag{20}$$

Теперь, отправляясь от интервалов δ_{m_0} и Δ_{m_0}, построим новые цепочки $\delta_k \supset \delta_{k+1} \supset \cdots$; $\Delta_k \supset \Delta_{k+1} \supset \cdots$ как выше (см. 14)). Ясно, что каждый из следующих рядов

$$\sum a_k \cdot \varphi_k(\delta_k),\ \sum a_k \cdot \varphi_k(\Delta_k) \tag{21}$$

при любом порядке членов будет сходиться к конечному или бесконечному пределу, а так как наш T-метод является вполне регулярным, то средние t_n^σ σ-переставленных рядов (21) будут сходиться к тем же пределам, которые в силу (20) должны превосходить число A.

Теперь уже ясно, что найдутся номера N_1, n_1 и интервалы постоянства (функции φ_{n_1}) $\delta_{n_1} \subset \Delta_{n_0}$, $\Delta_{n_1} \subset \Delta_{n_0}$, удовлетворяющие условиям

$$\delta_{n_1} \cap \Delta_{n_1} = \varnothing;\ t_{N_1}^\sigma(\delta_{n_1}) > A,\ t_{N_1}^\sigma(\Delta_{n_1}) > A;\ S_{n_1}(\delta_{n_1}) > A,\ S_{n_1}(\Delta_{n_1}) > A. \tag{22}$$

Последние два неравенства (как раньше (13)) обеспечивают возможность повторения изложенных рассуждений для каждого из интервалов δ_{n_1} и Δ_{n_1}, в результате чего получаются четыре новых интервала постоянства, удовлетворяющих условиям типа (22) с еще большим числом A.

Очевидно, что повторяя эту процедуру бесконечное число раз, мы получим некоторое множество континуальной мощности, в точках которого выполняется соотношение

$$\overline{\lim_N}\, t_N^\sigma(x) = \infty,$$

противоречащее условию теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть f—ограниченная и непрывная почти всюду функция. Допустим сначала, что частные суммы S_n ряда (12) равномерно ограничены. Тогда (12) является рядом Фурье некоторой функции $\psi(x)$ и сходится к ней почти всюду (см., например, [4]). Теперь убедимся в том, что если на каком-либо интервале постоянства Δ_{n_0} выполнено неравенство (13), то на Δ_{n_0} найдется множество континуальной мощности, в точках которого ряд (12) сходится абсолютно и его сумма превосходит A.

Выберем цепочку (Δ_n) с условием (14). Это условие вместе с предположением о равномерной ограниченности частных сумм ряда (12) гарантирует сходимость ряда

$$\sum a_k \cdot \varphi_k(\Delta_k). \tag{23}$$

Может случиться, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, начиная с некоторого $m_0 > n_0$, на каждом интервале постоянства $\delta_m \subset \Delta_{m-1} \setminus \Delta_m$, $m \geqslant n$, выполняется неравенство

$$a_m \cdot \varphi_m(\delta_m) < -\varepsilon_0. \tag{24}$$

Предположим, что m_0 велико настолько, что

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} a_k \cdot \varphi_k(\Delta_k) < \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{25}$$

Учитывая центрированность системы (φ_n), получим

$$0 \leqslant \int\limits_{\Delta_{m_0}} a_{m_0}\cdot\varphi_{m_0} = \int\limits_{\Delta_{m_0}} \sum_{m_0}^{m} a_k\cdot\varphi_k = \int\limits_{\Delta_{m_0}\setminus\Delta_m} + \int\limits_{\Delta_m} < \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot|\Delta_m| - \frac{\varepsilon_0}{2}|\Delta_{m_0}\setminus\Delta_m|,$$

откуда следует неравенство

$$|\Delta_m| \geqslant |\Delta_{m_0}\setminus\Delta_m| \quad \forall m \geqslant m_0. \tag{26}$$

Следовательно, $|\Delta_m| \neq 0$ и $\left|\bigcap\limits_{n_0}^{\infty}\Delta_m\right| > 0$. Ясно, что ряд (12) сходится на множестве $\bigcap\limits_{n_0}^{\infty}\Delta_m$ и сумма его превосходит A.

Остается рассмотреть случай, когда не существует числа ε_0 с условием (24), т. е. когда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_{m_0}\subset\Delta_{m_0-1}\setminus\Delta_{m_0}$, $m_0 > n_0$, на котором

$$|a_{m_0}\cdot\varphi_{m_0}(\delta_{m_0})| < \varepsilon. \tag{27}$$

Если ε достаточно мало, то в силу (13), (14) и (27) получим

$$S_m(\Delta_{m_0}) > A,\ S_m(\delta_{m_0}) > A \ \ \forall m \in [n_0;\ m_0];\ \delta_{m_0}\cap\Delta_{m_0} = \varnothing. \tag{28}$$

Теперь надо повторить всю процедуру для каждого из интервалов Δ_{m_0}, δ_{m_0}. Если для одного из этих интервалов процесс оборвется, то утверждение об абсолютной сходимости будет установлено. В противном случае, мы получим для нового произвольно малого ε четыре интервала постоянства, удовлетворяющих соотношениям типа (28).

Ясно, что продолжая этот процесс, мы или на каком-нибудь конечном шаге или через счетное количество таких процедур получим некоторое континуальное множество, в точках которого ряд (12) сходится абсолютно и сумма его больше, чем A.

Пусть E обозначает множество тех точек, в которых ряд (12) сходится абсолютно. На основании вышеизложенного и условия (6) получим, что ряд (12) сходится к функции f всюду на E н. с. м. Если допустить, что сумма $\psi(x)$ ряда (12) отлична от $f(x)$ на каком-либо множестве положительной меры, то найдется точка x_0, в которой f непрерывна и отлична от ψ (пусть для определенности $\psi(x_0) > f(x_0)$).

Нетрудно убедиться в том, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется интервал постоянства $\Delta_{n_0} \ni x_0$, на котором колебание функции f не превосходит ε и еще

$$S_{n_0}(\Delta_{n_0}) > \psi(x_0) - \varepsilon. \tag{29}$$

Но так как на множестве $E\cap\Delta_{n_0}$ существует подмножество континуальной мощности, в точках которого в силу (29) сумма ряда не меньше, чем $\psi(x_0) - \varepsilon$, то ясно, что при достаточно малом ε все это приводит к противоречию. Следовательно, в рассматриваемом случае $(\operatorname{Sup}\|S_n\|_\infty < \infty)$ $\psi(x) = f(x)$ п. в. и теорема доказана.

Если же предположить, что $\overline{\lim}\|S_n\|_\infty = \infty$, то для произвольного $A > \operatorname{Sup}|f(x)|$ найдется интервал постоянства Δ_{n_0} с условием (13). Теперь надо выбрать цепочку (Δ_k) с условием (14). Ясно, что для ряда (23) есть две возможности: сходиться к конечному пределу или к бесконечности. В первом случае, рассуждая как выше и учитывая условие (6) и предложение $A > \operatorname{Sup}|f(x)|$, получим: для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется интервал постоянства δ_{m_0} функции φ_{m_0} такой, что

$$m_0 > n_0, \ \delta_{m_0} \cap \Delta_{m_0} = \varnothing; \ |a_{m_0} \cdot \varphi_{m_0}(\delta_{m_0})| < \varepsilon. \tag{30}$$

Отсюда следует, что при достаточно малом ε будут выполняться соотношения (20).

Теперь, отправляясь от интервалов δ_{m_0} и Δ_{m_0}, построим цепочки (δ_i), (Δ_i), удовлетворяющие условиям

$$a_i \cdot \varphi_i(\Delta_i) > 0, \ a_i \cdot \varphi_i(\delta_i) \geqslant 0 \ \forall i > m_0. \tag{31}$$

Из (20) и (31) следует

$$S_i(\Delta_i) \geqslant S_{m_0}(\Delta_{m_0}) > A; \ S_i(\delta_i) \geqslant S_{m_0}(\delta_{m_0}) > A \ \forall i > m_0. \tag{32}$$

Пусть для каждого фиксированного i число $j(i)$ обозначает максимальный индекс слагаемых $a_k \cdot \varphi_k$, входящих в i-ую частную сумму S_i^σ σ-переставленного ряда.

Очевидно, что из условий (13), (14), (30)—(32) следует существование чисел $i_0 = i_0(n_0)$, $l_0 = l_0(m_0)$ таких, что

$$S_i^\sigma(\Delta_{j(i)}) > A \ \forall i \geqslant i_0, \ S_i^\sigma(\delta_{j(i)}) > A \ \forall i \geqslant l_0; \ \delta_{j(l_0)} \subset \Delta_{j(l_0-1)}. \tag{33}$$

Допустим, что множества $\bigcap_{k=j(l_0)}^{\infty} \Delta_k$, $\bigcap_{k=j(l_0)}^{\infty} \delta_k$ непустые. Тогда в силу соотношений (33) σ-переставленный ряд будет сходиться на этих множествах к сумме, превосходящей число A.

Теперь заметим, что случай, когда ряд (23) сходится к бесконечности, рассматривается аналогично, только вместо неравенства (30) надо пользоваться L_∞-условием, в результате чего опять будут выполнены соотношения типа (31)—(33) и еще

$$S_{l_0}^\sigma(\Delta_{j(l_0)}) > 2 \cdot A, \ S_{l_0}^\sigma(\delta_{j(l_0)}) > 2 \cdot A. \tag{34}$$

Следующий этап рассуждений таков: вышеизложенную процедуру повторяем для интервалов $\Delta_{j(l_0)}$, $\delta_{j(l_0)}$, в результате чего появятся четыре интервала с соотношениями типа (33), (34).

Нетрудно убедиться в том, что повторив эту процедуру счетное число раз (аккуратно манипулируя числами ε из (30) и A из (33), (34)), мы получим некоторое множество континуальной мощности, в точках которого σ-переставленный ряд сходится и сумма его превосходит число $\operatorname{Sup}|f(x)|$, а это, в силу полной регулярности рассматриваемых методов, противоречит условию (6).

Таким образом, теорема 2 доказана для того случая, когда f — ограниченная и непрерывная почти всюду функция.

Теперь заметим, что требование непрерывности почти всюду является существенным. В самом деле, как показал А. М. Олевский (см. [10]), существует непрерывная функция φ, ряд Фурье-Хаара которой после подходящей перестановки неограниченно расходится почти всюду (точнее, в каждой точке, для которой прямой ряд не является абсолютно сходящимся), причем некоторая подпоследовательность S_{n_k} равномерно сходится к функции φ. Остается заметить, что между нижним и верхним пределани последовательности S_n° существуют ограниченные измеримые функции, существенно отличные от φ.

Теперь дадим схему доказательства теоремы 2 для случая, когда f интегрируема в смысле широкого интеграла Данжуа ($f \in D$) и непрерывна всюду и. с. м. Сразу же заметим, что непрерывности почти всюду недостаточно даже для суммируемых функций, как это явствует из упомянутого ранее примера Г. М. Мушегяна (см. [7]).

Пусть x_0— точка непрерывности функции f. Тогда в некоторой окрестности γ точки x_0 f будет ограниченной. Допустим, что интервал постоянства Δ_n функции φ_n лежит в γ. По уже доказанной части теоремы 2 на каждом интервале постоянства $\Delta_m \subset \Delta_n$ будет выполняться равенство

$$\int\limits_{\Delta_m} S_k = \int\limits_{\Delta_m} f. \tag{35}$$

Пусть $\gamma(x_0)$ максимально раздутый интервал, содержащий точку x_0, наделенный свойством: для каждого Δ_m, лежащего строго внутри $\gamma(x_0)$, выполнено равенство (35). Если $\gamma(x_0)$ совпадает с отрезком $[0; 1]$, то, пользуясь центрированностью и L^1-условием, можно убедиться, что равенство (35) выполнено на всех интервалах постоянства, то есть ряд (12) является рядом Фурье—Данжуа функции f.

Если же $\gamma(x_0)$ не совпадает с отрезком $[0; 1]$, то поступаем следующим образом. Для каждой точки непрерывности x функции f строим свой интервал $\gamma(x)$. Затем показываем, что интервалы $\gamma(x_1)$ и $\gamma(x_2)$ либо совпадают, либо не пересекаются и даже не имеют общих концов. Но в таком случае система интервалов $\gamma(x)$ сводится к счетному количеству попарно непересекающихся и не имеющих общих концов интервалов такого же типа. Дополнение до $[0; 1]$ — нигде не плотное совершенное множество (непустое) и потому содержит точку t непрерывности функции f. Ясно, что интервал $\gamma(t)$ будет содержать некоторые из составляющих интервалов $\gamma(x)$, а это противоречит тому, что $\gamma(x)$ было максимальным.

Теорема 2 полностью доказана.

Заметим, что при доказательстве этих теорем мы на самом деле пользовались свойством более слабым, чем непрерывность в точке.

Доказательство теоремы 3. Если $\delta = (a; b)$— какой-нибудь двоичный интервал отрезка $[0; 1]$ и $\delta = \operatorname{Supp} \chi_l$, то обозначим $r(\delta) = \chi_l / \|\chi_l\|_\infty$. Пусть $\delta_1 (= \delta)$, δ_2, $\delta_3, \cdots$ — цепочка, стягивающаяся к точке a, т. е. a является левым концом интервалов δ_l. Сумма

$$R(\delta; n) \equiv \sum_{m=0}^{n-1} r(\delta_{n-m}) - (n+1) \cdot r(\delta_{p+1}) \tag{36}$$

представляет собой переставленный полином Хаара, сосредоточенный на δ.

Ясно, что на каждом из интервалов δ_i^-, $1 \leqslant i \leqslant n$, δ_{n+1}^+, одна из частных сумм выражения $A + A \cdot R(\delta; n)$ равна нулю, а на δ_{n+1}^- вся сумма равна $2 \cdot (n+1) \cdot A$. Пусть d— левый конец интервала δ_{n+1}^-. Ясно что функция

$$B_l = A + A \cdot R(\delta; n) + 2 \cdot (n+1) \cdot r(\delta_{n+2}^{-}) \tag{37}$$

равна нулю в точке d и на интервалах δ_1^{-} (примыкает к точке b сл е-ва), и δ_{n+2}^{+} (примыкает к точке a справа).

Интервал δ естественным образом „разбивается" па конечное количество двоичных интервалов постоянства $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots$ функции B_l.

Пусть γ_1 и γ_2 примыкают к точке d слева и справа соответственно.

Следующий этап рассуждений таков. Если на каком-нибудь γ $(i > 2)$ функции B_l равна нулю, то на этом интервале процесс останавливаем, в противном случае γ_i разбиваем на достаточно большое количество равных двоичных интервалов (это нужно для обеспечения условия (8)) и на каждом из них повторяем описанный выше процесс, приспособив его к значению функции B_l на γ_i (вместо A). При этом количество слагаемых нового полинома (см. n в (36)) можно брать произвольно большим (нужно для условия (8)). В результате этой процедуры опять будут возникать точки такого типа как d. Для самой точки d рассуждения таковы. На интервале γ_2 (который нельзя подвергать предварительному дроблению) выбираем цепочку Δ_1 $(=\gamma_2)$, $\Delta_2 \cdots$, стягивающуюся к левому концу d, и строим полином

$$B_s(\gamma_2) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} r(\Delta_{N-m}).$$

Аналогичный полином строим на γ_1 так, чтобы их сумма в точке d равнялась нулю. Теперь к функции B_l надо прибавить все полиномы, построенные на втором этапе. Дальнейший ход рассуждений сводится к последовательному повторению описанного цикла. Подробные выкладки провести нетрудно ,и мы их опустим.

Доказательство теоремы 4. Если допустить, что теорема не верна, то найдется такой ряд (10), для которого выполнено условие (11), хотя не все частные суммы S_k равны нулю. Отсюда следует, что существуют число A (для определенности положительное) и номер n такие, что открытое множество $A_n \equiv S_n^{-1}(A; \infty)$ не пустое и на каждой компоненте этого множества $S_n \neq \text{const}$ (для этого достаточно избежать того случая, когда компонента совпадает с отрезком [0, 1]). Для краткости введем обозначение $\varphi_n \equiv a_n \cdot f_n$. Без ограничения общности можно предложить, что множество $B_{n+1} \equiv \underline{A_n \cap \varphi_{n+1}^{-1}}(0; \infty)$ не пустое. Противоположное допущение означало бы, что φ_{n+1} равна нулю на всем A_n (вследствие центрированности системы f_n) и мы рассмотрели бы функцию φ_{n+2} и т. д. Одна из них наверняка отлична от тождественного нуля на A_n (см. (11)). Итак, B_{n+1} — непустое открытое множество, причем на каждой его компоненте или $S_n \neq \text{const}$, или $\varphi_{n+1} \neq \text{const}$ (38).

В самом деле, если компонента α множества B_{n+1} совпадает с одной из компонент β множества A_n, то выполнено первое условие из (38), в противном случае — второе.

Рассмотрим случай, когда φ_{n+1} постоянна на каждой компоненте B_{n+1}. Пусть α — одна из них. По условию на α $S_n \neq \text{const}$. Выберем два произвольных непустых интервала I_1, I_2 с непересекающимися замыканиями, лежащими на множестве $(\inf_n S_n, \operatorname{Sup}_n S_n)$. Ясно, что замыкания открытых множеств $B_{n+1} \cap S_n^{-1}(I_1)$, $B_{n+1} \cap S_n^{-1}(I_2)$ также не пересекаются и, кроме того, на любой компоненте этих множеств $S_n \neq \mathrm{const}$, т. е., фигурально выражаясь, происходит „расщепление" множества B_{n+1}.

Теперь рассмотрим случай, когда $\varphi_{n+1} \neq \mathrm{const}$ на одной из компонент α множества B_{n+1}. Опять выбираем интервалы I_1, I_2 с условиями $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = \varnothing$, $\bar{I}_j \subset (\inf_n \varphi_{n+1}; \operatorname{Sup}_n \varphi_{n+1})$ и производим „расщепление" на B_{n+1} множествами

$$B_{n+1} \cap \varphi_{n+1}^{-1}(I_1), \quad B_{n+1} \cap \varphi_{n+1}^{-1}(I_2).$$

Нетрудно убедиться в том, что на каждой компоненте этих множеств выполнено условие (38). Таким образом, в любом случае мы получаем два открытых множества $B_{n+1,1}$ и $B_{n+1,2}$ из σ-алгебры σ_{n+1}, порожденной функциями $f_1, \cdots, f_{n+1}$. Замыкания этих множеств не пересекаются. На любой компоненте этих множеств хотя бы одна из функций $S_1, \cdots, S_{n+1}$, $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n+1}$ отлична от постоянной. Функция S_{n+1} на этих множествах превосходит A. Последнее обстоятельство вместе с условием (11) гарантирует существование функции φ_k, $k > n+1$, которая на одном из множеств $B_{n+1,1}$, $B_{n+1,2}$ отлична от тождественного нуля. Берем из этих функций ту, у которой минимальный номер. Пусть это функция φ_{n+2}. Если $B_{n+1,1} \cap \varphi_{n+2}^{-1}(0; \infty) \neq \varnothing$, то описанным выше способом производим „расщеплением" множества $B_{n+1,1}$. Если φ_{n+2} отлична от тождественного нуля и на $B_{n+1,2}$, то здесь тоже производим „расщепление". В результате мы получим три или четыре открытых множества $B_{n+2,m} \in \sigma_{n+2}$ с непересекающимися замыканиями. На каждой компоненте этих множеств хотя бы одна из функций S_i, φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n+2$ отлична от постоянной. Сумма S_{n+2} превосходит A на всех этих множествах. Теперь опять берем ближайшую функцию φ_k, $k > n+2$, которая отлична от тождественного нуля хотя бы на одном из множеств $B_{n+2,m}$ и повторяем процесс. Ясно, что на этом пути каждое из множеств, полученных ранее, в конце концов будет расщеплено. Следовательно, мы получим некоторое множество мощности континуум, в точках которого $S_n > A$ и все φ_k, $k > n$ неотрицательны. Но в таком случае ряд (10) после любой перестановки сходится к конечной или бесконечной сумме, превосходящей положительное число A, а это противоречит условию (11).

Таким образом, мы установили, что в условиях теоремы $|S_n(x)| \leqslant A$ для всех n и x, а так как A — произвольно, то $S_n(x) \equiv 0 \ \forall n$ т. е. теорима 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Из предыдущих рассуждений следует, что в условиях теоремы 5 должно выполняться неравенство

$$\operatorname*{Sup}_{n;\,x} |S_n(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x} |f(x)| < \infty.$$

Следовательно, ряд (10) сходится в L^2 и после σ-перестановки, а в силу регулярности метода, средние t_n^* сходится в L^2, а значит и по мере, причем к функции f (это вытекает из условия (11)). Теорема 5 доказана.

В заключение заметим, что при доказательстве последних двух теорем мы пользовались свойством более слабым, чем центрированность достаточно было, чтобы на каждом фиксированном открытом множестве σ-алгебры $\sigma(f_1, f_2, \cdots, f_k)$, $\forall k$ любая из функций f_n, $n > k$, или тождественный нуль, или принимает значения обоих знаков.

Институт математики
АН Армении

Поступила 1. VIII. 1989

Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Միակության բնույթի որոշ պնդումներ Հաարի սիստեմի և անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնացված սիստեմների համար *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցվում են միակության պնդումներ կենտրոնացված սիստեմների որոշ դասերի համար։

R. I. HOVSEPIAN. *Some uniqueness theorems for Haar and contianuous martingal differences systems* (summary)

In this paper we prove uniqueness theorems for some classes of martingal differences systems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. С. Кашин, А. А. Саакян.* Ортогональные ряды, изд. «Наука», М., 1984.
2. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28:61, 1964, 1391—1408.
3. *Ж. Невё.* Математические основы теории вероятностей, Изд. «Мир», М., 1969.
4. *Р. И. Овсепян.* О некоторых теоремах единственности для системы Хаара и центрированных систем непрерывных функций, Изв. АН Армении, «Математика», XXIV, № 1, 1989, 43—59.
5. *А. В. Бахшецян.* О центрированных системах в $C[0; 1]$, Acta Sci. Mat., 47, № 1—2, 1984, 223—231.
6. *В. А. Скворцов.* Теоремы единственности рядов Хаара для методов суммирования. Матем. заметки, 9, № 4, 1971, 449—458.
7. *Г. М. Мушегян,* О восстановлении коэффициентов переставленного ряда Хаара, Матем. сборник, 130 (172), № 1 (5), 1986, 35—61.
8. *Р. И. Овсепян.* О теоремах единственности для некоторых ортогональных систем, Всесоюзная школа по теории функций, Тезисы докладов, Ереван, 1987.
9. *Р. И. Овсепян.* Об извлечении из общих систем лакунарных подсистем со свойством абсолютной сходимости. Матем. сборник, 111 (153), № 4, 1980, 522—531.
10. *А. М. Олевский.* Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций, ДАН СССР, 141, № 1, 1961, 28—31.