ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К. С. КАЗАРЯН

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Р. БОАСА И Г. ПОЛЛАРДА О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ДОПОЛНЕНИИ

В 1948 г. была опубликована следующая теорема Р. П. Боаса и Г. Полларда [1].

Теорема А. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система (ПОНС) определенных на отрезке $[a, b]$ функций. Тогда для любого натурального числа N существует ограниченная функция m такая, что система $\{mf_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ является полной в $L^2_{[a, b]}$.*

В 1965 г. дав ответ на вопрос, поставленный в работе [1], Дж. Прайс и Р. Зинк [2] описали системы функций, обладающих таким свойством. В 1973 г. Бен—Ами Браун [3]* усилил теорему А, показав, что при выполнении условий этой теоремы можно найти такую ограниченную функцию m, чтобы для любой функции $f \in L^2_{[a, b]}$ нашелся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k m f_k$, который в метрике L^2 сходился бы к заданной функции f*. В работах автора [4]—[7] был исследован вопрос о возможности мультипликативного дополнения до базиса. Выяснилось, что для некоторых ПОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, для любого $N = 1, 2, \cdots$, подсистемы $\{f_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ невозможно мультипликативно дополнить до базиса в $L^2_{[a, b]}$ ([5], [7]). С другой стороны, любую подсистему системы Хаара, полученную удалением из нее конечного числа функций, можно мультипликативно дополнить до базиса и, более того, до безусловного базиса в $L^2_{[0, 1]}$ (см. [5], [6]). Отметим также, что в общем случае ответ на этот вопрос зависит также от удаленного из заданной ПОНС набора функций (см. [5], [7]). В основе подхода, примененного для решения вопроса о возможности мультипликативного дополнения до базиса, лежала следующая (см. [4], [5])

Лемма А. *Пусть задана некоторая ПОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом множестве E, $|E| > 0$, функций. Пусть, далее, N — произвольное натуральное число и m — некоторая ограниченная измеримая функция. Тогда для того, чтобы система $\{mf_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ была полной и минимальной в L^2_E необходимо и достаточно, чтобы, соответственно, выполнялись нижеследующие условия 1) и 2).*

---

* В настоящей заметке мы рассматриваем только случай $p=2$. В общем случае, когда $p > 1$ схема приведенного доказательства проходит, но для получения окончательной формулировки, кроме технических моментов, возникает ряд дополнительных вопросов, к которым автор надеется обратиться в другой публикации.

1) *Функция* $[m(x)]^{-1}\sum_{k=1}^{N}a_kf_k(x)$, *где* a_k $(1\leqslant k\leqslant N$ — *действительные числа, принадлежат пространству* L_E^2 *тогда и только тогда, когда* $a_k=0$ $(1\leqslant k\leqslant N)$.

2) *Для каждого* n $(n=N+1,\ N+2,\cdots,$ *существуют единственные числа* $a_k^{(n)}$ $(1\leqslant k\leqslant N$ *такие, что функции*

$$g_n(x)=[m(x)]^{-1}\sum_{k=1}^{N}a_k^{(n)}f_k(x)+f_n(x)]$$

принадлежат пространству L_E^2.

В работах автора [8], [9] для таких классических ПОНС как системы Хаара и Уолша, тригонометрическая система, в частности, был исследован вопрос о существовании функций m, чтобы одновременно выполнялись условия 1) и 2). Более того, для заданной ПОНС и натурального числа N был описан класс всех таких функций. Но в общем случае этот вопрос оставался открытым. Справедлива следующая

Теорема M. G. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *ПОНС функций, определенных на измеримом множестве* E, $|E|>0$. *Тогда для произвольного натурального числа* N *существует ограниченная измеримая функция* m *такая, что* $\{mf_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ *является полной и минимальной в* L_E^2.

Доказательство. Обозначим через F измеримое множество точек, являющихся точками аппроксимативной непрерывности для всех функций f_n, $n=1,2,\cdots$. Согласно теореме Данжуа очевидно имеем, что $|F|=|E|$. Возьмем произвольный набор N точек $\{x_j\}_{j=1}^{N}=X\subset F$ таких, что функции $\{f_j\}_{j=1}^{N}$ линейно независимы на X. Отсюда очевидно имеем, что для любого $n=N+1,\ N+2,\cdots$, существуют действительные числа $a_k^{(n)}$ $(1\leqslant k<N)$ такие, что

$$\varphi_n(x)=f_n(x)+\sum_{k=1}^{N}a_k^{(n)}f_n(x)=0 \text{ при } x\in X. \tag{1}$$

Обозначим

$$m_n(x)=\max_{N+1<k<N+n}|\varphi_k(x)|,\quad n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

Очевидно, что точки x_j $(1<j<N)$ являются точками аппроксимативной непрерывности для функций m_n $(n=1,2,\cdots)$ и

$$m_n(x)=0 \text{ при } x\in X,\ n=1,2,\cdots. \tag{3}$$

Построим измеримую ограниченную функцию m_0 по следующей схеме. Пусть

$$E_1=\{x\in E:|m_1(x)|>\lambda_1=1\},\quad E_1^{*}=(E\setminus E_1)\cap\{x:m_1(x)\neq 0\}. \tag{4}$$

Если $|E_1^{*}|>0$, то существует число λ_2, $0<\lambda_2<\frac{1}{2}\lambda_1$ такое, что

$$F_1=\{x\in E_1^{*}:m_2(x)>\lambda_2\},\quad |F_1|>\frac{1}{2}|E_1^{*}|. \tag{5}$$

Если $|E_1^*|=0$, то $\lambda_2=\lambda_1/2$ и $F_1=\varnothing$. Для $n\geqslant 2$ определяем

$$E_n=E_{n-1}\cup F_{n-1},\quad E_n^*=(E\setminus E_n)\cap\{x: m_{n+1}(x)\neq 0\}. \tag{6}$$

Когда $|E_n^*|>0$, находится число λ_{n+1}, $0<\lambda_{n+1}<\frac{1}{2}\lambda_n$ такое, что

$$F_n=\{x\in E_n^*: m_{n-1}(x)>\lambda_{n+1}\},\quad |F_n|>\frac{1}{2}|E_n^*|. \tag{7}$$

Если $|E_n^*|=0$, то $\lambda_{n+1}=\frac{1}{2}\lambda_n$ и $F_n=\varnothing$. Учитывая, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ монотонно стремится к нулю, из полноты системы $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ в L_E^2 и из условий (1), (2), (6), (7) сразу получаем

$$\left|E_1\cup\bigcup_{n=1}^\infty F_n\right|=|E|.$$

Следовательно, полагая

$$m_0(x)=\begin{cases}1 & \text{, при } x\in E_1\\ \min(\lambda_n,\ m_{n+1}(x)), & \text{при } x\in F_n,\end{cases} \tag{8}$$

определим функцию m_0 почти всюду на множестве E. Из (6)—(8) очевидно имеем, что

$$m_0(x)>m_n(x) \text{ при } x\in F_n.$$

Следовательно, из (4)—(6) имеем, что

$$\frac{m_n(x)}{m_0(x)}\leqslant 1 \text{ при } x\in E\setminus E_n,\ n=1,2,\cdots. \tag{9}$$

Так как точки $X=\{x_j\}_{j=1}^s$ являются точками аппроксимативной непрерывности для функций $m_n\,(n=1,2,\cdots)$ и выполняется условие (3), то из (4)—(7) очевидно имеем, что для произвольных $n\,(n=1,2\cdots)$ и $j\,(1\leqslant j\leqslant s)$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|(x_j-h,\ x_j+h)\cap(E/E_n)|}{2h}=1. \tag{10}$$

Из этих соображений имеем также, что в любой окрестности точки $x_j\,(1\leqslant j\leqslant s)$ функция m_0 не ограничена и

$$X\subset E\setminus E_n\quad (n=1,2,\cdots).$$

Отсюда легко видеть, что для любого $j\,(1\leqslant j\leqslant s)$ существует некоторая функция g_j, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $g_j(x)\geqslant 1$, при $x\in E$; $g_j\in L_E^2$,

б) функция g_j ограничена вне любой окрестности точки x_j,

в) $g_j(x)\cdot[m_0(x)]^{-1}\in L_E^2$.

Теперь, если определим искомую функцию m равенством

$$m(x)=m_0(x)\prod_{1\leqslant j\leqslant s}[g_j(x)]^{-1},$$

то эта функция будет удовлетворять условиям теоремы M.G. Действительно, ввиду того, что функции $\{f_k\}_{k=1}^N$ линейно независимы на множестве X, из условий а) — в) и (11) очевидно следует, что условие 1) леммы А имеет место. С другой стороны, из условий (1), (2), (9)—(11) и а) — в) легко заметить, что условие 2) леммы А также выполняется. Теорема доказана.

Институт математики
АН Армении

Поступила 10. II. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. P. Boas, H. Pollard.* The multiplicative completion of sets of functions, Bull Amer. Math. Soc., 1948, v. 54, 518—522.
2. *J. J. Price, R. E. Zink.* On sets of functions that can be multiplicatively completed, Ann. Math., 1965, v. 82, 139—145.
3. *Braun Ben—Ami.* On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p, $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 176, 499—508.
4. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении базисных последовательностей до базисов в L^p, $1 < p < \infty$. ДАН Арм.ССР, 1976, т. 62, 203—209.
5. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p, $1 \leq p < \infty$, Analysis Math., 1978, v. 4, 37—52.
6. *K. S. Kazarian.* On bases and unconditional bases in the spaces $L^p(d\mu)$, $1 < p < \infty$ Stud. Math., 1981, v. 71, 227—249.
7. *К. С. Казарян.* Мультипликативное дополнение до базисов в L^p, $1 < p < \infty$ равномерно ограниченных ортонормированных систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1985, 18, 344—361.
8. *К. С. Казарян.* О мультипликативном дополнении некоторых систем, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 1978, 13, 315—351.
9. *K. S. Kazarian.* Summability of generalized Fourier series and Dirichlet's problem in $L^p(d\mu)$ and weighted H^p-spaces, Analysis Math., 1987 13, 173—197.

УДК 517.547

Интегральные представления весовых пространств функций, голоморфных в трубчатых областях. Карапетян А. О. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 315—332.

Пусть V — острый открытый конус в R^n $(n \geqslant 1)$ и $T_V = \{z = x + iy \in C^n : x \in R^n, y \in V\}$. В настоящей статье установлены интегральные представления типа Винера-Пэли для классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, состоящих из голоморфных в трубчатой области $T_V \subset C^n$ функций $f(z) \equiv f(x+iy)$, подчиненных условию вида:

$$\int\limits_V \left\{ \int\limits_{R^n} |f(x+iy)|^p \, dx \right\}^s \cdot \gamma(y) \, dy < +\infty,$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$ и непрерывная положительная функция $\gamma(y)$, $y \in V$, удовлетворяет условию

$$\varliminf_{|y| \to +\infty} \frac{\ln \gamma(y)}{|y|} \geqslant 0 \; (y \in V). \qquad (2)$$

Затем, исходя из конуса V и функции γ, удовлетворяющей, помимо (2), некоторым дополнительным условиям, строится ядро $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_V$, голоморфное по z, антиголоморфное по w и воспроизводящее функции класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, а параметр s пробегает определенный промежуток. Библиографий 18.

УДК 517.986

Инвариантные алгебры операторных полей на компактных абелевых группах. Арзуманян В. А., Григорян С. А. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 333—343.

Работа посвящена некоммутативным равномерным алгебрам C^*-значных непрерывных функций на компактной абелевой группе, инвариантным относительно сдвигов. При естественных условиях на алгебру получены аналоги некоторых известных результатов Аренса, Зингера, Гоффмана из теории равномерных алгебр (в частности, описание относительного спектра, вопросы максимальности, существование точек пика). Библиографий 15.

УДК 519.212.3

Интенсивности прореженных процессов треугольников, порожденных пуассоновским точечным процессом на плоскости. Фаталов В. Р. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 334—352.

На плоскости рассматривается суперпозиция M_2-инвариантного пуассоновского точечного процесса Φ_1 и M_2-инвариантного пуассоновского процесса прямых Φ_2, где M_2 — группа евклидовых движений плоскости. Определим процесс треугольников $T_{k,l} = \{P_i P_j P_s\}$ следующим образом:

(а) каждая вершина P_q принадлежит реализации процесса Φ_1;

(б) внутри треугольника $P_i P_j P_s$ находится ровно $k \geqslant 0$ точек из процесса Φ_1;

(в) треугольника $P_i P_j P_s$ пересекают ровно $l \geqslant 0$ прямых из процесса Φ_2.

Для вычисления интенсивности процесса $T_{k,l}$ найдена формула в виде одномерного интеграла от трех специальных функций. Приведены также численные таблицы на основе этой формулы. Библиографий 11.

УДК 517.98

Об операторном уравнении $HY—YK = C$. Караханян М. И. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 353—360.

В статье для операторного уравнения $HY—YK = C$, где H, K, C есть спектральные операторы скалярного типа, действующие в слабо полном (в частности рефлексифном) банаховом пространстве, доказывающих некоторые критерии разрешимости. В частности, доказывается, что разрешимость операторного уравнения $HY—YK = C$. эквивалентна подобно операторных матриц $\begin{bmatrix} H, & O \\ O, & K \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} H, & C \\ O, & K \end{bmatrix}$. Библиографий 11.

УДК 519.5

Интеграл по нечеткой мере. Гольдберг А. А. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 361—373.

Вводится новое понятие интеграла по нечеткой мере, заданной на некоторой алгебре нечетких множеств. В случае четких множеств и четкой меры оно совпадает с классическим, а в случае четких множеств и нечеткой меры совпадает с понятием интеграла по неаддитивной мере, введенным автором в 1964 году. Библиографий 17.

УДК 517.9

Об асимптотике решения однородного консервативного уравнения Винера-Хопфа. Арабаджян Л. Г., Арабаджян А. Г. Известия АН Армении, серия «Математика» ,1990, XXV, № 4, 374—384.

В статье рассматриваются вопросы асимптотического поведения решения консервативного уравнения

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)\, S(t)\, dt, \qquad (1)$$

$$0 \leqslant K \in L_1(-\infty,\ \infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, dt = 1,$$

при дополнительном условии $K(-x) = K(x)$, $x > 0$.

При $\nu_2 \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x)\, dx < +\infty$ ранее получена оценка $S(x) \sim \sim \frac{x}{\sqrt{\nu_2}}$ при $x \to \infty$.

Для медленно убывающих ядер K (т. е. $\nu^2 = +\infty$) в настоящей статье получена асимптотическая оценка для решения S. Аналогичные оценки получены для компонент $S_j(x)$ вектор-функция $S(x) = (S_1(x) \cdots, S_n(x))$ являющейся решением векторного аналога уравнения (1). Библиографий 13 .

УДК 517.547.22

Полная регулярность роста рядов Ньютона. Черных Н. М. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 385—393.

Получены достаточн признаки полной регулярности роста (п. р. р.) целых функций экспоненциального типа, представленных в виде ряда Ньютона, аналогичные полученным ранее автором и Н. В. Говоровым признакам п. р. р. степенных рядов. Библиографий 9.

УДК 517.53

Об одной постановке задачи сопряжения в классах L^p. Айрапетян Г. М. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4. 394—399.

Пусть T—единичная окружность, D^+—единичный круг, а D^-—множество $|z|>1$. В работе исследуется задача сопряжения в следующей постановке: найти голоморфную в D^+ и D^- функцию $\Phi(z)$ по граничному условию

$$\lim_{r\to 1-0}\int_T |\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\,\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)|^p\,|dt|=0,$$

где $f(t)\in L^{p,\epsilon}(T)$ — определенный подкласс функций из $L^p(T)$, $D(t)$ — кусочно непрерывная функция, $\alpha(t)$ —гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию на T, а $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- соответственно. Библиографий 8.

УДК 517.53

О порядке произведения М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z, z_k)$. Багдасарян Д. Т. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 400—407.

В работе доказано, что если ρ и μ, соответственно, порядок роста и показатель сходимости последовательности $\{|z_k|\}_1^\infty$, то для произведения Джрбашяна $B_\alpha(z, z_k)$ имеет место равенство $\rho=\mu$, если $\mu<\alpha\leqslant\mu+1$. Библиографий 3.

УДК 517.5

Усиление теоремы Р. Боаса и Г. Полларда о мультипликативном дополнении. Казарян К. С. Известия АН Армении, серия «Математика», 1990, XXV, № 4, 408—411.

В статье доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — ПОНС функций определенных на измеримом множестве E, $|E|>0$. Тогда для произвольного натурального числа N существует ограниченная измеримая функция m такая, что $\{mf_n\}_{n=N+1}^\infty$ является полной и минимальной в L_E^2.

Эта теорема показывает, что в теореме Р. Боаса и Г. Полларда кроме полноты можно добиться и минимальности системы $\{mf_n\}_{n=N+1}^\infty$. Библиографий 9.