ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Д. Т. БАГДАСАРЯН

О ПОРЯДКЕ РОСТА ПРОИЗВЕДЕНИЙ $B_\alpha(z, z_k)$ М. М. ДЖРБАШЯНА

1. Пусть мероморфная в круге $D=\{z, |z|<1\}$ функция $W=W(z)$ имеет счетное множество нулей $\{z_k\}_1^\infty$, занумерованных в порядке возрастания их модулей и $T(r, W)$ — её характеристическая функция Неванлинны.

В работе М. Цудзи [1] было установлено, что если

$$\rho=\limsup_{r\to 1-0}\frac{T(r, W)}{\log\dfrac{1}{1-r}} \text{ и } \mu=\inf\{\lambda\}, \ \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\lambda+1}<+\infty \tag{1}$$

суть соответственно порядок роста функции $W(z)$ и показатель сходимости для последовательности $\{|z_k|\}_1^\infty$, то справедливы неравенства

$$0\leqslant\mu\leqslant\rho. \tag{2}$$

На пути построения общей теории факторизации мероморфных в круге D функций М. М. Джрбашян [2] конструктивно построил произведения $B_\alpha(z, z_k)$, зависящие от непрерывного параметра $\alpha\in(-1, +\infty)$, сходимость которых в круге D имеет место только при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+1}<+\infty. \tag{3}$$

Эти произведения, переходящие в классические функции Бляшке $B(z, z_k)$ лишь при $\alpha=0$, строились таким образом:

Во-первых, вводится в рассмотрение две функции

$$\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)}(\bar\zeta z)^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx, \tag{4}$$

$$\omega_\alpha^{(2)}(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\int_{0}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx. \tag{5}$$

Во-вторых, для любых $\zeta\,(0<|\zeta|<1)$ и $z\in D$ определяется функция

$$A_\alpha(z,\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{\omega_\alpha^{(2)}(z,\zeta)-\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)\}. \tag{6}$$

Указанные произведения определяются следующим образом:

$$B_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (A_\alpha(z, z_k). \tag{7}$$

Наша цель доказать следующее предложение.

Теорема 1°. *Если*

$$\mu < \alpha \leqslant \mu + 1, \tag{8}$$

то для функции $B_\alpha(z, z_k)$ *имеет место равенство*

$$\rho = \limsup_{r \to 1-0} \frac{m(r, B_\alpha)}{\log \frac{1}{1-r}} = \mu. \tag{9}$$

2°. *Если* $\alpha \in [\mu, \mu + 1]$ *и показатель* μ *таков, что*

$$\sum_{1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\mu+1} < +\infty, \tag{10}$$

то всегда $\rho = \mu$.

2. Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $-1 < \alpha < 0$, *то справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \log \frac{1 - \overline{\zeta} z}{|\zeta|^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|^2} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx \right\} \geqslant 0, \quad (|z| < 1). \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\rho) (\overline{\zeta} z)^n, \quad 0 \leqslant \rho = |\zeta| < 1, \tag{12}$$

где

$$a_0(\rho) = 2 \int_{\rho^2}^{1} [(1-x)^\alpha - 1] \frac{dx}{x}, \tag{13}$$

$$a_n(\rho) = \frac{1}{n} - \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \frac{1}{\rho^{2n}} \int_0^{\rho^2} (1-x)^\alpha x^{n-1} dx \ (n \geqslant 1)$$

или

$$a_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \int^{1} [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2 x)^\alpha] x^{n-1} dx \quad (n \geqslant 1). \tag{14}$$

Из (13) и (14) видно, что $a_n(\rho) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, \cdots)$.

Далее убедимся, что

$$a_{n+1}(\rho) \leqslant a_n(\rho), \ n = 0, 1, \cdots, \tag{15}$$

$$\varphi_n(\rho) = \Delta^2 a_n(\rho) = a_n(\rho) - 2a_{n+1}(\rho) + a_{n+2}(\rho) \geqslant 0, \ n = 0, 1, \cdots. \tag{16}$$

Для значений $n \geqslant 1$ имеем

$$a_{n+1}(\rho) - a_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \int_0^1 [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2)^\alpha] \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha+1+n}{n+1} x - 1\right) x^{n-1}\, dx \leqslant 0.$$

Для значения же $n=0$

$$a_0(\rho) - a_1(\rho) \geqslant 2 \int_{\rho^2}^1 \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx - 2(\alpha+1) \times$$

$$\times \int_0^1 [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2 x)^\alpha]\, dx = b(\rho).$$

Но $b(1) = 0$ и при $\rho < 1$

$$b'(\rho) = -\frac{4}{\rho} \int_0^1 [1-(\alpha+1)x]\, d(1-\rho^2 x)^\alpha \leqslant 0.$$

Таким образом, $b(\rho) \geqslant b(1) = 0$ и, тем самым, одновременно будем иметь

$$a_1(\rho) < a_0(\rho), \quad \Delta^2 a_0(\rho) \geqslant 0.$$

Нам остается установить неравенства (16). С этой целью заметим, что

$$\Delta^2 a_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+n)} \int_0^1 [(1-x)^\alpha - (1-\rho^2 x)^\alpha] \times$$

$$\times \left[\frac{(\alpha+1+n)(\alpha+2+n)}{(n+1)(n+2)} x^2 - 2\frac{\alpha+1+n}{1+n} x + 1\right] x^{n-1}\, dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Но легко видеть, что при $x \in [0, 1]$

$$\frac{(\alpha+1+n)(\alpha+2+n)}{(n+1)(n+2)} x^2 - 2\frac{\alpha+1+n}{n+1} x + 1 \geqslant \frac{(\alpha+1+n)(n+2)}{(n+1)(\alpha+2+n)} -$$

$$-2\frac{(\alpha+1+n)(n+2)}{(n+1)(\alpha+2+n)} + 1 > 0 \; (n \geqslant 1),$$

т. е. $\Delta^2 a_n(\rho) \geqslant 0$ $(n \geqslant 1)$. Отсюда по известной теореме о положительности сумм тригонометрических рядов (см. [3]) следует доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $-1 < \alpha < +\infty$, $0 < \varepsilon < 1$ *и* $\alpha + \varepsilon > 0$. *Тогда имеют место следующие неравенства*

$$|A_\alpha(z, \zeta)| \leqslant \exp\left\{\frac{\text{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{17}$$

$$|A_\alpha(z,\zeta)| \leqslant \exp\left\{\mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1}\right\}. \qquad (18)$$

Доказательство. Оценим $|\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)|$. Из (4) имеем

$$\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{x}\right)^{\alpha+1}}\frac{dx}{x}.$$

Отсюда получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)| \leqslant \frac{1}{|\zeta|}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\left(\dfrac{1-x}{1-|\zeta|}\right)^{\alpha+\varepsilon}}{(1-x)^\varepsilon}\left|\frac{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{|\zeta|}}{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{x}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\frac{dx}{\left|1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{x}\right|^{1-\varepsilon}}.$$

Но так как

$$\left|\frac{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{|\zeta|}}{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{x}}\right| = \left|1+\frac{\overline{\zeta}z|\zeta|-x}{|\zeta|x-\overline{\zeta}z}\right| \leqslant 2,$$

то получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta)| \leqslant \mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{dx}{(1-x)^\varepsilon(x-|\zeta|)^{1-\varepsilon}} =$$

$$= \mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\left\{\int_{|\zeta|}^{\frac{1+|\zeta|}{2}} + \int_{\frac{1+|\zeta|}{2}}^{1}\right\}\frac{dx}{(1-x)^\varepsilon(x-|\zeta|)^{1-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\dfrac{\overline{\xi}z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\left\{\frac{2^\varepsilon}{(1-|\zeta|)^\varepsilon}\int_{|\zeta|}^{\frac{1+|\zeta|}{2}}\frac{dx}{(x-|\zeta|)^{1-\varepsilon}} + \frac{2^{1-\varepsilon}}{(1-|\zeta|)^{1-\varepsilon}}\int_{\frac{1+|\zeta|}{2}}^{1}\frac{dx}{(1-x)^\varepsilon}\right\} =$$

$$= \frac{\mathrm{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\dfrac{\overline{\zeta}z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+\varepsilon}. \qquad (19)$$

Чтобы получить неравенство вида (18) выберем $0\leqslant\varepsilon_1<1$ такое, что $\alpha+\varepsilon_1>0$.

Имеем

$$\omega_\alpha^{(1)}(z,\zeta) < \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1} \frac{1}{|\zeta|(1-|\zeta|)^{1-\varepsilon_1}} \int\limits_{|\zeta|}^{1} \left(\frac{1-x}{1-|\zeta|}\right)^{\alpha+\varepsilon_1} \times$$

$$\times \frac{1}{(1-x)^{\varepsilon_1}} \left|\frac{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}{1-\frac{\bar\zeta z}{x}}\right|^{\alpha+1} dx < \text{const} \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1}. \tag{20}$$

Для оценки $|\omega_\alpha^{(2)}(z,\zeta)|$ заметим, что при $0 \leqslant |z| < |\zeta| < 1$ имеет место (см. [2], стр. 624)

$$\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) e^{\omega_\alpha^{(2)}(z,\zeta)} = \exp \int\limits_{|\zeta|}^{1} \left\{\frac{1}{\left(1-\frac{xz}{\zeta}\right)^{\alpha+1}} - 1\right\} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx. \tag{21}$$

Но последнее равенство справедливо в $|z| < 1$ всюду, кроме точек множества $e(\zeta) = \{z/|\zeta| \leqslant |z|,\ \arg z = \arg \zeta\}$.

Рассмотрим отдельно два случая

1) $$\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

В этом случае имея в виду, что

$$\left|1-\frac{xz}{\zeta}\right| = \frac{1}{|\zeta|}\left|x\left(1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right)-(x-|\zeta|)\right| \geqslant \left|1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right| \left|1-\frac{x-|\zeta|}{x\left|1-\frac{z}{|\zeta|}\bar\zeta\right|}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left|1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right|,$$

получаем

$$\left|\int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{xz}{\zeta}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{dx}{x}\right| \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{|\zeta|} \frac{1}{\left|1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right|^{\alpha+1}} \int\limits_{|\zeta|}^{1} (1-x)^\alpha\, dx \leqslant \text{const} \times$$

$$\times \left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}}\right|^{\alpha+1}. \tag{22}$$

2) $$\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta} z}\right| > \frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что если $z \in e(\zeta)$, то условие 2) удовлетворяется.

Если $\alpha > 0$, то интегрированием по частям получаем

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z,\zeta)-\omega_{\alpha-1}^{(2)}(z,\zeta)=\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha}}-1\right]. \tag{23}$$

Пусть $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$, при $\{\alpha\}=\beta\neq 0$ по (23) получаем:

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z,\zeta)=\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha}}-1\right]+\cdots \tag{24}$$

$$+\frac{(1-|\zeta|)^{\beta}}{\beta}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta}}-1\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{0}^{|\zeta|}\times$$

$$\times(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx.$$

Последнее слагаемое представим в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{0}^{|\zeta|}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx=$$

$$=-\left\{\int_{|\zeta|^{2}}^{1}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx-\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^{2}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{0}^{|\zeta|^{2}}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{|\zeta|^{2}}^{|\zeta|}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx+$$

$$+\int_{|\zeta|^{2}}^{1}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx-\log\frac{1-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^{2}}.$$

Легко видеть, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\int_{|\zeta|^{2}}^{|\zeta|}(1-x)^{\beta-1}x^{k-1}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{|\zeta|^{2}}^{|\zeta|}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{xz}{\zeta}\right)^{\beta}}-1\right\}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx\right|\leqslant\frac{1}{|\zeta|}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-t|\zeta|)^{\beta-1}}{\left|1-\frac{t|\zeta|z}{\zeta}\right|^{\beta}}\,dt+$$

$$+\int_{|\zeta|^{2}}^{1}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x}\,dx\leqslant\frac{(1-|\zeta|)^{\beta-1}}{|\zeta|}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{\beta}}+\frac{(1-|\zeta|^{2})^{\beta}}{\beta|\zeta|^{2}}\leqslant\text{Const}.$$

Далее имеем

$$\left|\frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha}}-1\right]+\cdots+\frac{(1-|\zeta|)^{\beta}}{\beta}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta}}-1\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1-|\zeta|z}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|^{|\alpha|}\left|\frac{1}{\alpha}\left[1-\left(1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right)^{\alpha}\right]+\cdots+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{\beta}\frac{1}{\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|^{|\alpha|}}\left[1-\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta}\right]\right|\leqslant\mathrm{Const}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|^{\alpha}, \qquad (26)$$

$$\mathrm{Re}\left\{\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)-\log\frac{1-\bar\zeta z}{|\zeta|^2}\right\}=\log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar\zeta z}\right||\zeta|<0. \qquad (27)$$

Из (19)—(27) и по лемме (1) получаем доказательство леммы 2 при $\{\alpha\}=\beta\neq 0$ и $-1<\alpha<0$. Если $\{\alpha\}=0$, то вместо (24) получаем

$$\omega_0^{(2)}(z,\zeta)=-\log\left(1-\frac{\bar\zeta z}{|\zeta|}\right),$$

$$\omega_n^{(2)}(z,\zeta)=\frac{(1-|\zeta|)^n}{n}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^n}-1\right]+\cdots+$$

$$+\cdots+\frac{|\zeta|z}{\zeta}\,\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}-\log\left(1-\frac{|\zeta|z}{\zeta}\right),$$

$$\mathrm{Re}\left\{\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)-\log\left(1-\frac{|\zeta|z}{\zeta}\right)\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\,\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right)\leqslant\frac{1}{|\zeta|}\left|\frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}\right|,$$

отсюда вытекает справедливость леммы и в случае $\{\alpha\}=0$.

Доказательство теоремы. В силу определения показателя сходимости μ для любого $\varepsilon>0$ имеет место

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|)^{\mu+1+\varepsilon}<+\infty. \qquad (28)$$

Пусть $\mu<\alpha\leqslant\mu+1$. Тогда для любого ε, $0<\varepsilon<1$ такого, что $\alpha+\varepsilon>\mu+1$, из (28) по лемме 2 получаем

$$\log^+|B_\alpha(z,z_k)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1-|z_k|}{1-\frac{z_k}{|z_k|}z}\right|^{\alpha+\varepsilon}.$$

Следовательно

$$m_r(B_\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|B_\alpha(re^{i\theta},z_k)|\,d\theta+O(1)\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\,\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\varepsilon-1}}. \qquad (29)$$

Отсюда получаем

$$\rho = \lim_{r \to 1-0} \sup \frac{\log m_r(B_\alpha)}{-\log(1-r)} \leqslant \mu + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет условию $\alpha + \varepsilon = \mu + 1 + \varepsilon_1$. Из (29) ввиду произвольности ε, $\alpha + \varepsilon > \mu + 1$ получаем $\rho \leqslant \mu$. Если последовательность сходящегося типа, т. е. $\sum (1 - |z_k|)^{\mu+1} < +\infty$, то из (18) по аналогии с (29) получаем

$$m_r(B_\mu) \leqslant \frac{\text{const}}{(1-r)^\mu} \text{ и } \rho \leqslant \mu. \tag{30}$$

Следовательно, в обоих случаях получаем

$$\rho \leqslant \mu. \tag{31}$$

Из (31) и (2) получаем утверждение теоремы.

В заключение автор благодарит академика АН Армении М. М. Джрбашяна и профессора В. С. Захаряна за постановку задачи и обсуждение результатов.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 3. XII. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Tsuji.* Potential theory in modern theory. Maruzenco, L, T. D., Tokyo. 1959.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, „Наука", М., 1966.
3. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.