ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. М. АЙРАПЕТЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ СО СДВИГОМ В КЛАССАХ L^p

Пусть T — единичная окружность, D^+ — единичный круг, а D^- — множество $|z|>1$. Обозначим через $H(\Omega)$ класс функций, определенных на Ω и удовлетворяющих условию Гельдера, а через $H_0(T; t_1,\cdots,t_n)$ — класс функций, имеющих разрыв первого рода в точках $t_k\in T$ $(k=1,\cdots,n)$ и удовлетворяющих условию Гельдера на каждой замкнутой части T, находящейся между такими соседними точками.

Рассмотрим задачу сопряжения в следующей постановке:

Найти голоморфную в $D^+\cup D^-$ функнию $\Phi(z)$, обращающуюся в нуль на бесконечности, по граничному условию

$$\lim_{r\to 1-0}\|\Phi^+(r\alpha(t))-D(t)\,\Phi^-(r^{-1}t)-f(t)\|_p=0, \tag{1}$$

где $D(t)\in H_0(T;\ t_1,\ t_2,\cdots,t_n)$, $D(t)\neq 0$, $f(t)\in L^p(T)\ (p\geqslant 1)$, $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ — сужения функции $\Phi(z)$ соответственно на D^+ и D^-, а $\alpha(t)$ — гомеморфизм, сохраняющий ориентацию на T.

Задача сопряжения в классах L^p, когда $\Phi(z)$ ищется в классе функций, представимых интегралом типа Коши, изучена многими авторами. Полученные результаты и их приложения подробно изложены в работах [1]—[6] и др.

В постановке (1), при $p=1$, задача сопряжения исследована в работе [7]. В настоящей работе мы проводим исследование задачи (1), когда $p>1$.

Положим $\alpha_k+i\,\beta_k=(2\pi i)^{-1}(\ln D(t_k-0)-\ln D(t_k+0))$, где под $\ln D(t)$ подразумевается любое определенное значение, непрерывно изменяющееся на каждой дуге $t_k\,t_{k+1}$. Для произвольного числа $p>1$ через $T(p)$ обозначим подмножество множества $(t_1,\ t_2,\cdots,t_n)$, состоящее из точек t_k, где имеет равенство $(1-\{\alpha_k\})\,p=1$ ($\{\alpha_k\}$ — дробная часть числа α_k), а через $T'(p)$ и $T''(p)$ — подмножества, где выполняются соответственно неравенства $(1-\{\alpha_k\})\,p<1$ и $(1-\{\alpha_k\})\,p>1$.

Везде предпологается, что $\alpha'(t)\in L_p(1)$.

В пункте 1 рассматривается случай, когда $T(p)=\varnothing$. Устанавливается, что решения задачи (1) принадлежат классу H^p (см. [8]) и результаты совпадают с результатами работ [1], [2]. В пункте 2 изучается однородная задача (1), когда $T(p)\neq\varnothing$. В пункте 3 вводится пространство $L^{p,\epsilon}(T) \subset L^p(T)$ и исследуется задача (1), когда $f(t) \in L^{p,\epsilon}(T)$ и $T(p) \neq \varnothing$.

1. Паре функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, определенных на D^+ и D^-, сопоставим функцию $\Phi(z)$ равенством

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+, \\ \Phi^-(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

Обратно, если $\Phi(z)$ определена на $D^+ \cup D^-$, то через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, соответственно, обозначим сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^-.

По теореме о конформном склеивании (см. [4]) существует такое решение $\lambda(z)$ граничной задачи

$$\Phi^+(\alpha(t)) - \Phi^-(t) = 0, \; t \in T,$$

что $\lambda^+(z)$ и $\lambda^-(z)$ $(\lambda^-(z) = z + \bar{\lambda}^-(z),\; \bar{\lambda}^-(\infty) = 0)$ конформно отображают области D^+ и D^- на некоторые области Δ_+ и Δ_- с общей границей и удовлетворяют условию Липшица в $D^+ \cup T$ и $D^- \cup T$, соответственно. Положим

$$\Pi_p^+(z) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda^+(z) - \lambda^+(\alpha(t_k)))^{\lambda_k}, \; z \in D^+,$$

$$\Pi_p^-(z) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda^-(z) - \lambda^-(t_k))^{\lambda_k}, \; z \in D^-,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ — целые числа, выбранные таким образом, чтобы имело место $-1 < \alpha_k + \lambda_k \leqslant 0$, если $t_k \in T(p) \cup T'(p)$ и $0 < \alpha_k + \lambda_k < 1$, если $t_k \in T''(p)$.

Далее положим

$$S^+(z) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau - z}d\tau}, \; z \in D^+,$$

$$S^-(z) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau}, \; z \in D^-,$$

где $\beta(t)$ — функция, обратная к $\alpha(t)$, а $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$K\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \left(\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = \ln D(t).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$S_p(z) = S(z) \cdot \Pi_p(z), \; z \in D^+ \cup D^-.$$

Теорема 1. *Пусть $f(t) \in L^p(T)$. Если $\Phi(z)$ есть решение граничной задачи*

$$\lim_{r \to 1-0} \| \Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\,\Phi^-(r^{-1}t) - f(t) \|_p = 0, \tag{2}$$

имеющее конечный порядок на бесконечности, то ее можно представить в виде

$$\Phi^+(z)=\frac{S_p(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\quad z\in D^+,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{S_p^-(z)}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+S_p^-(z)\,Q(z),\quad z\in D^-, \tag{3}$$

где $Q(z)$ — некоторый полином, а $\varphi(t)$ — решение уравнения $K\varphi = Q(t)+f(t)\,(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $f_r(t)\in H(T)$ и $f_r(t)\to f(t)$, при $r\to 1-0$ по метрике $L^p(T)$. Так как $S_p^+(\alpha(t))-D(t)\,S_p^-(t)=0$ и $(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}\in L^p(T)$, $q=p(p-1)^{-1}$, то условие (2) можем записать в виде

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\frac{\Phi^+(r\alpha(t))}{S_p^+(\alpha(t))}-\frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S_p^-(t)}-\frac{f_r(t)}{S_p^+(\alpha(t))}\right\|_1=0.$$

Обозначив

$$\Psi_r(t)=\frac{\Phi^+(r\alpha(t))}{S_p^+(\alpha(t))}-\frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S_p^-(t)}-\frac{f_r(t)}{S_p^+(\alpha(t))},$$

$$F_r^+(z)=\frac{\Phi^+(rz)}{S_p^+(z)}\ (z\in D^+),\quad F_r^-(z)=\frac{\Phi^-(r^{-1}z)}{S_p^-(z)}\ (z\in D^-), \tag{4}$$

будем иметь

$$F_r^+(\alpha(t))-F_r^-(t)=\Psi_r(t)+f_r(t)\,(S_p^+(\alpha(t)))^{-1},\ t\in T.$$

Так как функции $F_r^+(z)$ и $F_r^-(z)$ представимы в виде интеграла типа Коши с плотностью из класса $L^q(T)$, то (см. [1], [2])

$$F_r^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi_r(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\quad z\in D^+,$$

$$F_r^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi_r(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+Q_r(z),\quad z\in D^-, \tag{5}$$

где $Q_r(z)$ — главная часть функции $F_r^-(z)$ на бесконечности, а $\varphi_r(t)$ — решение уравнения $K\varphi=\Psi_r(t)+Q_r(t)+f_r(t)\,(S_p^+(\alpha(t)))^{-1}$. Совершая предельный переход в (5) с учетом (4) получим доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть $p>1$, $T(p)=\varnothing$. Тогда общее решение задачи (2), имеющее конечный порядок на бесконечности, определяется формулой (3).*

Доказательство. Так как при $T(p)=\varnothing$ функции $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)\in L^p(T)$ (см. [1]), то функции $\Phi^+(r\alpha(t)$ и $\Phi^-(r^{-1}t)$ сходятся по метрике $L^p(T)$, когда $r\to 1-0$ (см. [8]). Теорема доказана.

2. Пусть $\tau \in T$. Для любого $\delta > 0$, $r < 1$ через $\Delta(\delta, \tau, r)$ обозначим множество точек $t \in T$, удовлетворяющих неравенству $|t - \tau| < \delta(1 - r)$.

Лемма 1. *Пусть $t_k \in T(p)$. Тогда существуют числа $\delta_0 > 0$ и $C_0 > 0$, не зависящие от r такие, что, если $t \in \Delta(\delta_0, t_k, r)$, то*

$$|S_p^+(r\alpha(t)) - D(t) S_p^-(r^{-1} t)| > C_0 |S_p^+(r\alpha(t))|, \quad t \neq t_k.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$J(r, t) = \ln |\Pi_p^-(r^{-1} t)(\Pi_p^+(r\alpha(t)))^{-1}| + i \arg \Pi_p^-(r^{-1}t)(\Pi_p^+(r\alpha(t)))^{-1} -$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi i} \int_T (h_r(\tau, t) + k(\tau, t)) \varphi(\tau)\, d\tau - \varphi(t)\right),$$

где $K\varphi = \ln D(t)$, а

$$h_r(\tau, t) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - r\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - r^{-1}t},$$

$$k(\tau, t) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}.$$

В достаточно малой окрестности T_k ($t_i \overline{\in} T_k$, $i \neq k$) точки t_k имеем

$$\varphi(t) = -\pi(i\alpha_k - \beta_k)\chi(t) + \varphi'(t), \quad \varphi'(t) \in H(T_k), \tag{6}$$

где $\chi(t) = 1$, при $t \in (t_k, t_{k+1})$, $\chi(t) = -1$, при $t \in T \setminus (t_k, t_{k+1})$. Так как при $t \in \Delta(\delta, t_k, r)$ $(\delta > 0)$

$$|\arg \Pi_p^-(r^{-1} t)(\Pi_p^+(r\alpha(t)))^{-1} + \pi\chi(t)| < C \cdot \delta$$

где C — постоянная, не зависящая от δ, то при $t \in \Delta(\delta, t_k, r)$, учитывая (6), получим

$$\operatorname{Im} I(r, t) = O(\delta) + \pi(a_k + \lambda_k)\chi(t).$$

Поскольку $|a_k + \lambda_k| = p^{-1}$, то $\delta_0 > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы при $t \in \Delta(\delta_0, t_k, r)$ имело место

$$0 < \frac{\pi}{p} - \delta_0 < |\operatorname{Im} I(r, t)| < 2\pi - \delta_0.$$

В силу этого

$$|e^{I(r,t)} - 1| > \text{const}\, |\operatorname{Im} I(r, t)| > C_0 > 0.$$

Для завершения доказательства леммы остается учесть, что

$$|S_p^+(r\alpha(t)) - D(t) S_p^-(r^{-1} t)| = |S_p^+(r\alpha(t))|\, |e^{I(r,t)} - 1|.$$

Из леммы 1 и теоремы 1 следует

Теорема 3. *Общее решение однородной задачи*

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Phi^+(r\alpha(t)) - D(t)\Phi^-(r^{-1} t)\|_p = 0, \tag{7}$$

имеющее конечный порядок на бесконечности, можно представить в виде

$$\Phi^+(z)=\frac{S_p^+(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\tilde{\varphi}(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^+,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{S_p^-(z)}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\tilde{\varphi}(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+S_p^-(z)\,Q(z),\ z\in D^-,$$

где функция $\tilde{\varphi}(t)$ *и полином* $Q(z)$ *связаны равенствами*

$$K\tilde{\varphi}=Q(t).$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(t_k)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t_k)}\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau=0,\ t_k\in T(p).$$

Пусть $\varphi_k(t)$ — решение уравнения $K\varphi=t^k\ (k=1,\ 2,\cdots,\ n)$. Положим

$$\Phi_k^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi_k(\beta(\tau))}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^+,$$

$$\Phi_k^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^-.$$

Из равенства $K\varphi_k=t^k$ и из формул Сохоцкого-Племеля следует

$$\Phi_k^+(\alpha(t))-\Phi_k^-(t)=t^k.$$

Применяя теорему о конформном склеивании будем иметь

$$\Phi_k^+(z)=(\lambda^+(z))^k+b_1(\lambda^+(z))^{k-1}+\cdots+b_k,$$

где $b_1,\ b_2,\cdots,\ b_k$ — некоторые комплаксные числа. Из этого представления для функций $\Phi_k^+(z)$ непосредственно следует

Лемма 2. Пусть $\tau_1,\ \tau_2,\cdots,\ \tau_n$ — произвольные точки единичной окружности. Тогда

$$\operatorname{def}\begin{pmatrix}\Phi_0^+(\tau_1)\cdots\Phi_{k-1}^+(\tau_1)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \Phi_0^+(\tau_k)\cdots\Phi_{k-1}^+(\tau_k)\end{pmatrix}\neq 0.$$

Определим числа $\varkappa(p)$ и $\varkappa'(p)$ следующим образом: пусть $\varkappa(p)=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$, а $\varkappa'(p)$ есть количество точек множеетва $T(p)$.

Из теоремы 3 и леммы 2 следует

Теорема 4. *Если* $\varkappa(p)>\varkappa'(p)$, *то однородная задача* (7) *имеет* $\varkappa(p)-\varkappa'(p)$ *линейно независимых решений, ровных нулю на бесконечности: Если* $\varkappa(p)\leqslant\varkappa'(p)$, *то задача* (7) *не имеет решений, обращающихся в нуль на бесконечности.*

3. Отнесем функцию $f(t)$ к классу $L^{p,\varepsilon}(T)$, $\varepsilon>0$, если

$$\|f\|_{p,\varepsilon}=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |f(t)|^p\prod_{t_k\in T(p)}\big|\ln|t_k-t|\big|^{\frac{p}{q}(1+\varepsilon)}|dt|\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Выберем $p' > p$ таким образом, чтобы имело место $T(p') = \varnothing$ и

$$S^+_{p'}(z) = S^+_p(z) \prod_{t_k \in T(p)} (\lambda^+(z) - \lambda^+(\alpha(t_k)), \ z \in D^+,$$

$$S^-_{p'}(z) = S^-_p(z) \prod_{t_k \in T(p)} (\lambda^-(z) - \lambda^-(t_k)), \ z \in D^-.$$

Далее, для любого $f(t) \in L^{p,*}(T)$ обозначим

$$(K_r f)(t) = \frac{S^+_{p'}(r\alpha(t))}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S^+_{p'}(\alpha(t))} (h_r(\tau, t) + k(\tau, t))\, d\tau,$$

$$(H_r f)(t) = \frac{S^+_{p'}(r\alpha(t)) - D(t)\, S^-_{p'}(r^{-1}t)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S^+_{p'}(\alpha(\tau))} \frac{d\tau}{\tau - r^{-1}t}.$$

Лемма 3. *Существует число C, не зависящее от r и f такое, что*

$$\|K_r f\|_p \leqslant c\|f\|_{p,*}, \quad \|H_r f\|_p \leqslant c\|f\|_{p,*}.$$

Доказательство первого неравенства следует из оценки

$$|h_r(\tau, t) + k(\tau, t)| < \mathrm{const}\, P_r(\tau, t),$$

где $P_r(\tau, t) = (1 - r^2)\, |\tau - rt|^{-2}$ — ядро Пуассона. Для доказательства второго неравенства можно воспользоваться неравенством (см. [7])

$$|S^+_p(r\alpha(t)) - D(t)\, S^-_p(r^{-1}t)| \leqslant C_1 |S^+_p(r\alpha(t))| \left(\frac{1-r}{|t_k - rt|} + O((1-r)^\delta)\right),$$

$$t \in T_k, \ \delta > 0,$$

где T_k — некоторая окрестность точки t_k такая, что $t_i \overline{\in} T_k (i \neq k)$.

Положим

$$\Psi^+(z) = \frac{S^+_{p'}(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau - z} d\tau, \ z \in D^+,$$

$$\Psi^-(z) = \frac{S^-_{p'}(z)}{2\pi t} \int_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \ z \in D^-,$$

где $\varphi(t)$ определяется из уравнения $K\varphi = f(t)\, (S^+_{p'}(\alpha(t)))^{-1}$.

Из леммы 3 следует

Лемма 4. *Пусть $f(t) \in L^{p,*}(T)$.* Тогда

$$\lim_{r \to 1-0} \|\Psi^+(r\alpha(t)) - D(t)\, \Psi(r^{-1}t) - f(t)\|_p = 0.$$

Так как порядок функции $S^-_{p'}(z)$ на бесконечности равен $-\varkappa(p) + \varkappa'(p)$, то из леммы 4 и теоремы 3 следует

Теорема 5. *Пусть $f(t) \in L^{p,*}(T)$. Тогда общее решение задачи сопряжения* (1) *можно представить в виде:*

а) *если $\varkappa(p) - \varkappa'(p) \geqslant 0$, то*

$$\Phi^+(z) = S_p^+(z) \sum_{k=0}^{\varkappa(p)-1} C_k \Phi_k^+(z) + \frac{S_{p'}^+(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\beta(\tau))}{\tau - z} d\tau,$$

$$\Phi^-(z) = S_p^-(z) \sum_{k=0}^{\varkappa(p)-1} C_k (\Phi_k^-(z) + z^k) + \frac{S_{p'}^-(z)}{2\pi i} \int_T \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где C_0, $C_1, \cdots, C_{\varkappa(p)-1}$ *произвольные комплексные числа, удовлетворяющие системе уравнений*

$$C_0 \Phi_0^+(t_k) + \cdots + C_{\varkappa(p)-1} \Phi_{\varkappa(p)-1}^+(t_k) = 0, \ t_k \in T(p),$$

при $\varkappa(p) \geqslant 1$ *и* $C_0 = C_1 = \cdots = C_{\varkappa(p)-1} = 0$, при $\varkappa(p) = 0$.

б) *если* $\varkappa(p) - \varkappa'(p) < 0$, *то задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_T \varphi(t) t^k dt = 0, \ k = 0, 1, \cdots, -(\varkappa(p) - \varkappa'(p) + 1),$$

при этом решение определяется по формуле (8), *если положить* $C_0 = C_1 = \cdots C_{\varkappa(p)-1} = 0$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 23. V. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. В. Хведелидзе.* Метод интегралов типа Коши в разрывных задачах теории голоморфных функций, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, 1975.
2. *И. Б. Симоненко.* Краевые задачи Римана для n-пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L^p с весом. Изв. АН СССР, сер. мат., 1964, 28, № 2, 277—306.
3. *И. И. Данилюк.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., Наука, 1975.
4. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., Наука, 1977.
5. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, «Штиица», 1973.
6. *В. М. Кокилашвили, В. А. Пааташвили.* О разрывной задаче линейного сопряжения и сингулярных интегральных уравнений, Диф. ур., 1980, XVI, № 9, 1650—1659.
7. *Г. М. Айрапетян.* Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1, Изв. АН АрмССР, сер. матем., XXV, № 1, 1990, 3—22.
8. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1975.