ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УД 517.547.22

Н. М. ЧЕРНЫХ

ПОЛНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ РОСТА РЯДОВ НЬЮТОНА

Рассмотрим ряд Ньютона

$$\tilde{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}(n)}{n!}z(z+1)\cdots(z+n-1)\overset{\mathrm{df}}{=}\tilde{\Phi}(0)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{\Phi}(n)}{n!}z(z+1)\cdots(z+n-1), \tag{1}$$

где $\tilde{\Phi}(z)$ — целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), представленная в виде интеграла Меллина

$$\tilde{\Phi}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\tilde{a},\,\tilde{b}]}\tilde{\Psi}(t)\,t^{z}\,dt, \tag{2}$$

здесь $L[\tilde{a},\tilde{b}]$ — спрямляемый контур с началом в точке $\tilde{a}$ и концом в точке $\tilde{b}$, принадлежащий области $\{|z|<1\}\setminus[-1,0]$, а $\tilde{\Psi}(t)$ — непрерывная на этом контуре функция.

В настоящей работе получены признаки полной регулярности роста (п. р. р.) ряда Ньютона (1), аналогичные некоторым из полученных в [1] признаков п. р. р. степенных рядов. Предполагается, что читатель знаком с основными результатами теории целых функций вполне регулярного роста (в. р. р.) в объеме глав I—III монографии [2].

Покажем, что функция $\tilde{F}(z)$ есть ц. ф. э. т. С учетом (2) преобразуем равенство (1):

$$\tilde{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)}{n!}\int\limits_{L[\tilde{a},\,\tilde{b}]}t^{n}\,\tilde{\Psi}(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\tilde{a},\,\tilde{b}]}\tilde{\Psi}(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)}{n!}t^{n}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\tilde{a},\,\tilde{b}]}\frac{\tilde{\Psi}(t)}{(1-t)^{z}}\,dt. \tag{3}$$

Возможность перестановки суммирования и интегрирования в (3) обоснована ввиду оценки

$$\left| \int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]} \tilde{\Psi}(t) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+k-1)}{k!} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]} |\tilde{\Psi}(t)| \sum_{k=n}^{\infty} |t|^k \frac{\Gamma(z+k)}{|\Gamma(z)|\cdot|\Gamma(k+1)|} |dt| < Kq^n, \ 0<q<1,$$

справедливой при $n > N_0$, полученной с помощью асимптотической формулы [3, с .272]

$$\ln \Gamma(\tau) = \left(\tau - \frac{1}{2}\right)\ln \tau - \tau + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \ |\arg \tau| \leqslant \pi - \delta, \ \delta > 0.$$

Из формулы (3) непосредственно следует, что $\tilde{F}(z)$ — ц. ф. э. т. Обозначим через $S(z)$ функцию

$$S(z) \overset{\text{def}}{=} \tilde{F}(z)\, e^{-z} = \frac{e^{-z}}{2\pi i} \int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]} \tilde{\Psi}(t) \frac{dt}{(1-t)^z}. \tag{4}$$

Под знаком интеграла в (4) перейдем к новой переменной $\tau = 1 + \ln(1-t)$, где $\ln(1-t) > 0$ при $t < 0$, после чего имеем

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]} \tilde{\Psi}(1 - e^{\tau-1}) \cdot (e^{-\tau(z-1)-1}\, d\tau,$$

где $b = 1 + \ln(1-\tilde{a})$, $\quad a = 1 + \ln(1-\tilde{b})$.
Обозначим теперь

$$\hat{\varphi}(\tau) \overset{\text{def}}{=} e^{\tau-1}\, \tilde{\Psi}(1 - e^{\tau-1}). \tag{5}$$

Таким образом, получим

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[a,b]} \hat{\varphi}(\tau)\, e^{-z\tau}\, d\tau,$$

где $\hat{\varphi}(\tau)$ — непрерывная на контуре $L[a, b]$ функция.

Далее нам потребуется следующий результат Дюфренуа и Пизо.

Лемма 1. [4, с. 15] *Пусть функция $\alpha(t)$ непрерывна на спрямляемой кривой* Г. *Тогда* $A(z) = \int\limits_{\Gamma} \alpha(t)\, e^{zt}\, dt$ — *ц. ф. э. т. Ее преобразование Бореля имеет вид* $a(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\alpha(t)}{z-t} dt.$

Через $\Phi(z)$ обозначим функцию $S(-z)$, т. е.

$$\Phi(z) \overset{\text{df}}{=} S(-z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[a,\ b]} \hat{\varphi}(\tau)\, e^{z\tau}\, d\tau. \tag{6}$$

Из равенств (4) и (6) следует, что п. р. р. функции $\Phi(z)$ эквивалентна п. р. р. функции $\tilde{F}(z)$. Согласно лемме 1 индикаторная диаграмма функции $\Phi(z)$ принадлежит выпуклой области C, ограниченной кривой $z=1+\ln(1-t)$, $t=e^{i\varphi}$, $|\varphi|<\pi$ и отрезком $[1, 1+\ln 2]$, причем ее преобразование Бореля имеет вид

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\,b]}\frac{\hat{\varphi}(\tau)}{z-\tau}\,d\tau.$$

Рассмотрим теперь степенной ряд

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi(n)}{n!}z^n. \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7), как и в лемме 4 [1, с. 1159], получим, что ц. ф. э. т. $F(z)$ представима в виде интеграла

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,e^{e^{\tau}z}\,d\tau. \tag{8}$$

Определим функцию $F^*(z)$ равенством

$$F^*(z)\overset{\mathrm{df}}{=}F(-z)\,e^{ez}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n. \tag{9}$$

Согласно определению 2 из работы [1, с. 1158] будем называть интерполирующей функцией коэффициентов ряда (8) такую ц. ф. э. т. $\Phi^*(z)$, что $\Phi^*(n)=a_n$. Покажем, что интерполирующая функция коэффициентов ряда (8) представлена в виде

$$\Phi^*(z)=\frac{e^z}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,(1-e^{\tau-1})^z\,d\tau. \tag{10}$$

Действительно, имеем

$$F^*(-z)=F(z)\,e^{-ez}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,e^{(e^{\tau}-e)z}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\,b]}\hat{\varphi}(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(e^{\tau}-e)^n}{n!}\,d\tau=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\,b]}\hat{\varphi}(\tau)\,(e^{\tau}-e)^n\,d\tau.$$

Отсюда следует равенство (10).

Производя в интеграле из (10) замену переменной $t=1-e^{\tau-1}$, получим представление

$$a_n\equiv\Phi^*(n)=\frac{e^n}{2\pi i}\int\limits_{L[\bar{a},\,\bar{b}]}\frac{-\hat{\varphi}(1+\ln(1-t))}{t-1}\,t^n\,dt, \tag{11}$$

$$\tilde{a} = 1 - e^{a-1}, \quad \tilde{b} = 1 - e^{b-1}.$$

Обозначим

$$\tilde{\varphi}^*(t) = \frac{\hat{\varphi}(1 + \ln(1-t))}{(1-t)}.$$

Теперь равенство (11) принимает вид

$$\Phi^*(n) = \frac{e^n}{2\pi i} \int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]} \tilde{\varphi}^*(t)\, t^n\, dt.$$

Таким образом, ц. ф. э. т. $\Phi^*(z)$, определенная формулой

$$\Phi^*(z) = \frac{e^z}{2\pi i} \int\limits_{L[\tilde{a},\tilde{b}]} \tilde{\varphi}^*(t)\, t^z\, dt,$$

является интерполирующей функцией коэффициентов ряда (9).

Поскольку из формулы (2) следует равенство

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi^*(z) \cdot e^{-z}, \tag{12}$$

то п. р. р. функций $\tilde{\Phi}(z)$ и $\Phi^*(z)$ эквивалентна.

Следуя терминологии, принятой нами для степенных рядов, назовем функцию $\tilde{\Phi}(z)$, определенную формулой (2), интерполирующей функцией коэффициентов ряда Ньютона (1).

Из равенств (3), (4), (6) и (7) вытекает, что интерполирующая функция коэффициентов ряда (7) имеет вид

$$\Phi(z) = \tilde{F}(-z)\, e^z. \tag{13}$$

Из формул (10) и (12) следует, что функция

$$\Phi^*(z) = \tilde{\Phi}(z) \cdot e^z \tag{14}$$

интерполирует коэффициенты ряда (9), т. е.

$$F^*(z) \overset{\text{def}}{=} F(-z)\, e^{ez} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}(n)\, e^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^*(n)}{n!} z^n. \tag{15}$$

Заметим, что если в формуле (2) произвести замену переменной $t = e^{\tau}$, то получим

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L[\ln\tilde{a},\ln\tilde{b}]} \tilde{\Psi}(e^{\tau})\, e^{\tau(z+1)}\, d\tau. \tag{16}$$

Учитывая лемму 1 заключаем, что индикаторная диаграмма функции $\tilde{\Phi}(z)$ лежит в полуполосе $\tilde{C} = \{z | \mathrm{Re}\, z < 0,\ |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$, а ее преобразование Бореля имеет вид

$$\widetilde{\varphi}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[\ln\widetilde{a},\ \ln\widetilde{b}]}\frac{\widetilde{\Psi}(e^{\tau})\cdot e^{\tau}}{z-\tau}\,d\tau.$$

Обращаясь к равенству (16) и свойству 1 [2, с. 111], заключаем, что индикаторная диаграмма функции $\Phi^*(z)$ лежит в полуполосе $\{z|\mathrm{Re}\,z<1, |\mathrm{Im}\,z|<\pi\}$.

Из формулы (15) и леммы 2 [1, с. 1159] вытекает, что индикаторная диаграмма функции $F^*(z)$ принадлежит кругу $|z|<e$ с разрезом по отрезку $[-e, 0)$, а из равенства (9) следует, что индикаторная диаграмма функции $F(z)$ лежит в области

$$D=\{z|\ |z-e|<e,\ z\overline{\in}[e, 2e)\}.$$

Функция $f(z)$, ассоциированная с ц. ф. э. т. $F(z)$ по Борелю, имеет вид (ср. [2, с. 393], [1, с. 1161])

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L[a,\ b]}\frac{\varphi(w)}{z-e^{w}}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma[e^{a},\ e^{b}]}\frac{\varphi(\ln\tau)}{\tau(z-\tau)}\,d\tau,$$

где $\Gamma[e^{a}, e^{b}]$ — образ контура $L[a, b]$ при отображении $\tau=e^{w}$.

И, наконец, индикаторная диаграмма функции $\widetilde{F}(z)$ лежит в области, ограниченной кривой

$$z=-\ln(1-t),\quad t=e^{i\varphi},\ |\varphi|<\pi, \tag{17}$$

и отрезком $[-\ln 2[$. Обозначим эту область через $\widetilde{D}$. Из равенства (13) следует, что для в. р. р. функции $\Phi(z)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\widetilde{F}(z)$ имела в. р. р.

Ряды (1) и (7) будем называть двойственными, если они подчинены условию (13).

Учитывая установленные выше зависимости между двойственными рядами, установим несколько признаков п. р. р. рядов Ньютона.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{\varphi}(w)$ — функция, ассоциированная по Борелю с интерполирующей функцией коэффициентов ряда Ньютона $\widetilde{\Phi}(w)$.*

Тогда, если функция $\widetilde{\varphi}(w)$ имеет конечное число особых точек однозначного характера $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \cdots, \widetilde{w}_k$ в полуполосе $\widetilde{C}=\{w|\mathrm{Re}\,w<0, |\mathrm{Im}\,w|<\pi\}$, и не имеет никаких других особенностей, то ц. ф. э. т. $\widetilde{F}(z)$, представленная рядом Ньютона (1), *имеет в. р. р.*

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\widetilde{f}_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\Phi}(n)}{z^{n+1}} \tag{18}$$

и

$$\tilde{f}_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{z^{n+1}}. \tag{19}$$

Через $\tilde{f}_a(z)$ и $\tilde{f}_b(z)$ буем обозначать также и аналитические продолжения элементов, представленных рядами (18) и (19).

Из леммы 5 [1, с. 1161] вытекает, что функция $\tilde{f}_a(z)$ имеет k особых точек однозначного характера: $z_j = e^{\tilde{w}_j}$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$, и не имеет никаких других особенностей, а функция $\tilde{f}_b(z)$ имеет единственную особую точку $z_0 = e$.

Обратимся к функции $F^*(z)$. Из формулы (15) следует, что функция $f^*(z)$, ассоциированная с функцией $F^*(z)$ по Борелю, имеет вид (см. [4, с. 10])

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n \tilde{q}(n)}{z^{n+1}}. \tag{20}$$

Функция $f^*(z)$ представляет собой квазиадамаровскую композицию функций (18) и (19). (Это понятие введено в работе [7]).

По теореме 1 из [7], которая является простым следствием результата, полученного в [8], заключаем, что функции (20) имеет в комплексной плоскости k особых точек однозначного характера вида $z_j = e^{\tilde{w}_j + 1}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ и не имеет никаких других особенностей.

Из формулы (15), применяя свойство 1 из [2, с. 111] и теорему о выделении особенностей аналитических функций [9], нетрудно вывести, что функция $f(z)$, ассоциированная с ц. ф. э. т. $F(z)$ по Борелю, имеет k особых точек однозначного характера вида $z_j = e - e^{\tilde{w}_j + 1}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ и не имеет никаких других особенностей.

Из теоремы 3 [1, с. 1160] вытекает, что функция $\varphi(z)$, ассоциированная по Борелю с функцией $\Phi(z)$, имеет k особых точек однозначного характера вида $z_j = 1 + \ln(1 - e^{\tilde{w}_j})$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$, а из (13), как и выше, выводим, что функция $\tilde{f}(z)$ имеет k особых точек однозначного характера: $z_j = -\ln(1 - e^{\tilde{w}_j})$, $(j = 1, 2, \cdots, k)$, причем функции $\varphi(z)$ и $\tilde{f}(z)$ не имеют никаких других особенностей.

Рассуждения завершаются применением следствия 1 из теоремы, доказанной в [5]. Приведем его формулировку: *ц. ф. э. т. $A(z)$ имеет в. р. р., если функция $a(z)$, ассоциированная с $A(z)$ по Борелю, имеет конечное число особых точек однозначного характера и не имеет никаких других особенностей.*

Теорема доказана.

Учитывая теорему из [6, с. 106], установленные выше связи между рядами Ньютона и степенными рядами и формулы (18) из работы [1, с. 1159], легко убедиться и в справедливости обратной теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{f}(z)$ — функция, ассоциированная по Борелю с ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, имеющая конечное число особых точек однозначного характера $z_1, z_2, \cdots, z_k$, лежащих в области $\tilde{D}$, и не имеющая никаких других особенностей.*

Тогда функция $\tilde{F}(z)$ представима в виде ряда Ньютона (1), *интерполирующая функция коэффициентов которого $\tilde{\Phi}(w)$ имеет в. р. р. Функция $\tilde{F}(z)$, ассоциированная по Борелю с ц. ф. э. т. $\tilde{\Phi}(w)$, имеет k особых точек однозначного характера вида*

$$w_j = \ln(1 - e^{-z_j}),\ j = 1, 2, \cdots, k, \tag{22}$$

и не имеет никаких других особенностей.

Из теорем 1, 2 и теоремы 3 [1, с. 1160] получаем

Следствие. *Если $\tilde{f}(z)$, $\tilde{\varphi}(w)$, $f(z)$, $\varphi(w)$ — функции, ассоциированные по Борелю с ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, $\tilde{\Phi}(w)$, $F(z)$, $\Phi(w)$ соответственно, и какая-либо из них имеет конечное число особых точек однозначного характера, лежащих соответственно в областях $\tilde{D}$, $\tilde{C}$, D, C и не имеет никаких других особенностей, то ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, $\tilde{\Phi}(w)$, $F(z)$, $\Phi(w)$ имеют в. р. р.*

Теорема 3. *Пусть $\tilde{\varphi}(w)$ — функция, ассоциированная по Борелю с интерполирующей функцией коэффициентов ряда Ньютона.*

Если $\tilde{\varphi}(w)$ — алгебраическая функция и ее особые точки лежат в полуполосе $\tilde{C} = \{w | \mathrm{Re}\, w < 0,\ |\mathrm{Im}\, w| < \pi\}$, то ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$, представленная рядом Ньютона (1), *имеет в. р. р.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При этом вместо теоремы 1 из [7] приходится опираться на теорему 6 из [7], а вместо ссылки на следствие 1 из теоремы, доказанной в [5], следует сослаться на следствие 2: *ц. ф. э. т. $A(z)$ имеет в. р. р., если ассоциированная с ней по Борелю функция $\alpha(z)$ является алгебраической функцией.* (Можно сослаться и на более общий результат — теорему 6 из [1]).

Из установленных связей между двойственными рядами и леммы 1 вытекает следующая

Лемма 2. *Если функция $\varphi(w)$ регулярна во внешности простой кривой L, лежащей в полуполосе*

$$\tilde{C} = \{w | \mathrm{Re}\, w < 0,\ |\mathrm{Im}\, w| < \pi\},$$

то функция $f(z)$ регулярна во внешности простой кривой Γ, полученной из L преобразованием (ср. (18))

$$\Gamma = \{z | z = -\ln(1 - e^{w}),\ w \in L\}.$$

Из теорем 6, 7 статьи [1] и замечания к ним, леммы 2 и зависимостей между двойственными рядами вытекают еще две теоремы.

Теорема 4. *Пусть ц. ф. э. т. $\tilde{F}(z)$ представлена в виде ряда Ньютона* (1), *где $\tilde{\Phi}(z)$ — ц. ф. э. т.* (2).

Пусть сопряженная диаграмма функции $\tilde{F}(z)$ есть отрезок вещественной оси $[a, b]$, $0 < a < b$, и функция $\tilde{f}(z)$, ассоциированная с $\tilde{F}(z)$ по Борелю, аналитически продолжима через каждую точку интервала (a, b).

Тогда функции $\tilde{\Phi}(z)$, $\tilde{F}(z)$ имеют в. р. р.

Теорема 5. *Пусть сопряженная диаграмма интерполирующей функции коэффициентов ряда Ньютона* (1) — *$\tilde{\Phi}(z)$ есть отрезок вещественной оси $[c, d]$, $c < d < 0$, и функция $\tilde{\varphi}(z)$, ассоциированная с $\tilde{\Phi}(z)$ по Борелю, аналитически продолжима через каждую точку интервала (c, d). Тогда функции $\tilde{\Phi}(z)$ и $\tilde{f}(z)$ имеют в. р. р.*

Автор признателен профессору Говорову Н. В. за постановку задачи и полезные советы.

Кубанский государственный
университет

Поступила 2. III. 1987

Ն. Մ. ՉԵՌՆԻԽ. Նյուտոնի շարքերի աճման լրիվ կանոնավորությունը (*ամփոփում*)

Նյուտոնի շարքով ներկայացվող էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների աճի լրիվ կանոնավորության վերաբերյալ։ Նույնատիպ հայտանիշներ նախկինում ստացվել էին հեղինակի և Ն. Վ. Գովորովի կողմից աստիճանային շարքերի վերաբերյալ։

N. M. ČERNYH. *The complete regularity of growth of Newton series* (summary)

Sufficient criterions of complete regularity of growth (c. r. g.) of entire functions of exponential type represented by Newton series is proved. The same criterions (c. r. g.) have been obtained earlier by the author and N. V. Govorov for power series.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. В. Говоров, Н. М. Черных.* Полная регулярность роста некоторых классов целых функций экспоненциального типа, представленных интегралами Бореля и степенными рядами, Изв. АН СССР, сер. матем., 1985, 49, № 6, 1155—1176.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
3. *М. А. Евграфов.* Аналитические функции, М., Наука, 1968.
4. *Л. Бибербах.* Аналитическое продолжение, М., Наука, 1967.
5. *Н. В. Говоров, Н. М. Черных.* О полной регулярности роста преобразования Бореля с конечным числом особых точек аналитического продолжения ассоциированной функции, Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, 42, № 5, 965—971.
6. *А. И. Маркушевич.* Избранные главы теории аналитических функций, М., Наука, 1976.

7. *А. В. Давыдова, Н. М. Черных.* Полная регулярность роста некоторых степенных рядов, Краснодар, 1983. Рукопись представлена Кубан. ун-том. Деп. в ВИНИТИ, 15 февр. 1983, № 813—83.

8. *Н. Н. Мавроди, Н. Б. Мальцева.* Некоторые свойства композиций Адамара и Гурвица. Краснодар, 1982. Рукопись представлена Кубан. ун-том. Деп. в ВИНИТИ, 31 мая 1982, № 2659—82.

9. *В. П. Хавин.* О выделении особенностей аналитических функций, ДАН СССР, 1958, 121. № 2, 239—242.