ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 519.5

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

ИНТЕГРАЛ ПО НЕЧЕТКОЙ МЕРЕ

В теории нечетких множеств [1, 2] вводились различные понятия интеграла. Первое определение интеграла было дано Сугено [3], а равносильное ему — Ралеску и Адамсом [4] (см. также [2], гл. 4). Определение Сугено обобщалось в различных направлениях (см., например, [5]). Другое понятие интеграла было введено Ван Цисяо [6]. У определения Сугено имеется существенный недостаток: в случае, когда все рассматриваемые множества четкие, а мера аддитивна (или даже счетно-аддитивна), его интеграл не переходит в классический и даже при интегрировании линейной функции по отрезку относительно лебеговой меры числовой результат не совпадает с тем, который дает интегрирование по Риману. От этого недостатка свободно определение интеграла, данное Бутнариу [7—8]. Однако очень жесткие ограничения, накладываемые им на меру, определенную на алгебре нечетких множеств, приводят к тому, что его интеграл сводится к классическому в очень широком классе случаев (остается открытым вопрос, не будет ли это иметь место всегда) [8], § 5.

В нашем определении интеграла используются некоторые идеи Бутнариу, однако основным пунктом является определение интеграла, которое было введено автором ([9], ч. 1, § 1, ч. III, § 4) еще до возникновения теории нечетких множеств. Основным моментом в нашем определении является то обстоятельство, что за меру множества (четкого или нечеткого) принимается не число из R_+, а некоторый отрезок, принадлежащий R_+. Во многих задачах такой подход является естественным. Например, в ситуации, когда мы не можем указать вероятность события, а можем лишь оценить ее («вероятность не меньше 0,7»), естественно связать с ним не число, а отрезок (в приведенном примере [0,7; 1]). В условиях реального эксперимента из-за ошибок измерений (наблюдений) опять-таки в качестве меры получаем не число, а отрезок. Надо подчеркнуть, что использование меры-отрезка не обязательно связано с неполнотой информации, «нечеткостью», «размытостью» объекта. В теории целых функций во многих задачах оказалось полезным в качестве меры брать не предел некоторой вспомогательной функции (он может не существовать), а отрезок между нижним и верхним пределом или между нулем и верхним пределом. То, что этот подход является эффективным, свидетельствуют его применения в теории целых функций [9—11] и функций, аналитических в полуплоскости [12]. Заметим еще, что интеграл, введенный в [9] (но только в первоначальной версии из § 1), изучался в ряде работ [13—16] вне связи с приложениями. Вводимое в настоящей статье понятие интеграла является непосредственным обобщением понятия из § 4 статьи [9].

Если $x \in \mathrm{R}$, то через x^{-} будем обозначать $\min\{1, x\}$, $x^{+} = (|x| + x)/2$, $x^{-} = (|x| - x)/2$. Непустое множество U будем называть пространством. Нечетким множеством A называется $\{(x, \varphi(x, A)) : x \in U\}$, где $\varphi(\cdot, A) : U \to [0, 1]$, а $\varphi(\cdot, A)$ называется функцией принадлежности для A. Через $F(U)$ будем обозначать класс нечетких множеств (т. е. нечетких подмножеств U). Если $\varphi(\cdot, A) : U \to \{0, 1\}$, то A называется четким множеством. Класс четких множеств будем обозначать через $\mathrm{Cr}(U)$, $\mathrm{Cr}(U) \subset F(U)$. Если $\varphi(x, A) \equiv 1$ ($\varphi(x, A) \equiv 0$), то $A \in \mathrm{Cr}(U)$ обозначается через U (через $\varnothing$). Если $A, B \in F(U)$, то сумма этих множеств (объединение II по терминологии [2]) $A + B$ определяется равенством $\varphi(x, A + B) = (\varphi(x, A) + \varphi(x, B))^{-}$, разность $A - B$ — равенством $\varphi(x, A - B) = (\varphi(x, A) - \varphi(x, B))^{+}$, произведение AB (пересечение III по [2]) — равенством $\varphi(x, AB) = A(x) B(x)$, дополнение cA — равенством $cA = U - A$, включение $A \subset B$ — неравенством $\varphi(x, A) \leqslant \varphi(x, B)$. Система $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ называется разбиением, если $\varphi(x, A_1) + \cdots + \varphi(x, A_n) \equiv 1$. Система S множеств из $F(U)$ называется алгеброй множеств, если сумма, разность, произведение любых двух множеств из S принадлежит S и $U \in \mathrm{S}$. Если все элементы разбиения T принадлежат алгебре S, то T называется S-разбиением. Обозначим через T класс всех S-разбиений.

Через S обозначим множество всех сегментов из R_{+}. Пусть $\mu : \mathrm{S} \to S$, где S — некоторая алгебра множеств, $\mu(\varnothing) = 0$. Для некоторого S-разбиения $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ определим множество $P(T, \mu) := \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathrm{R}_{+}^{n} : t_{i_1} + t_{i_2} + \cdots + t_{i_p} \in \mu(A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots + A_{i_p}),\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n,\ p = 1, \cdots, n\}$. Таким образом, множество $P(T, \mu)$ определяется $2^n - 1$ включением. Если $P(T, \mu) \neq \varnothing$ для всех $T \in \mathrm{T}$ (это условие будем называть условием совместности), то μ называется нечеткой S-мерой. Будем обозначать $\mu(A) = [\mu_1(A), \mu_2(A)]$, $0 \leqslant \mu_1(A) \leqslant \mu_2(A) < \infty$. Если $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, то $\mu(A)$ можно рассматривать как число из R_{+}. Если для всех $A \in \mathrm{S}$ выполняется $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, то мера μ называется четкой. Условие совместности в этом случае сводится к условию аддитивности, т. е. из $A_1, A_2 \in (U)$, $\varphi(x, A_1) + \varphi(x, A_2) \leqslant 1$ следует, что $\mu(A_1 + A_2) + \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Действительно, возьмем S-разбиение $T_1 = \{A_1, A_2, c(A_1 + A_2)\}$. Пусть $(t_1, t_2, t_3) \in \mathrm{P}(T_1, \mu)$. Тогда $t_1 = \mu(A_1)$, $t_2 = \mu(A_2)$, $\mu(A_1) + \mu(A_2) = t_1 + t_2 = \mu(A_1 + A_2)$.

Наоборот, если выполняется условие аддитивности (в этом случае, конечно, $\mu_1(A) \equiv \mu_2(A)$), то условие совместности можно не предполагать выполненным а приори, поскольку в этом случае $\mathrm{P}(T, \mu)$ состоит из одной точки $(\mu(A_1), \cdots, \mu(A_n))$.

Пусть f — действительная ограниченная функция на U, $s(f) = \sup\{f(x) : x \in U\}$. Обозначим через L линейное пространство ограниченных функций на U. В дальнейшем будем рассматривать только $f \in L$ и это оговаривать не будем. Пусть $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ — S-разбиение. Обозначим $K(T, f) = \Big\{(c_1, \cdots, c_n) \in \mathrm{R}^n : (\forall x \in U) \Big| \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi(x, A_j) \geqslant$

$\geqslant f(x)\Big\}\Big\}$. Нетрудно видеть, что $(s(f),\cdots, s(f))\in K(T, f)$. Таким образом, $K(T, f)\neq\varnothing$. Очевидно, $K(T,f)$ — замкнутое множество. Пусть $c'=(c'_1,\cdots, c'_n)\in K(T, f)$, $c''=(c''_1,\cdots, c''_n)$, $c'_j\leqslant c''_j$, $1\leqslant j\leqslant n$. Тогда $c''\in K(T, f)$.

Для $c\in \mathrm{R}^n$ обозначим

$$S(T, \mu, c)=\max\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i t_i : t\in P(T, \mu)\right\}.$$

Ясно, что $S(T, \mu, c)=(c_1^2+\cdots+c_n^2)^{1/2}H(\tau_1,\cdots, \tau_n)$, $\tau_j=c_j(c_1^2+\cdots+c_n^2)^{-1/2}$, $c\neq 0$, где $H(\tau_1,\cdots, \tau_n)$ — опорная функция многогранника $P(T, \mu)$ с направляющим единичным вектором $(\tau_1,\cdots, \tau_n)$. Поэтому $S(T, \mu, c)$ — непрерывная функция от $c\in \mathrm{R}^n$. Пусть

$$S_0(T, \mu, f)=\inf\{S(T, \mu, c): c\in K(T, f)\},$$

$$I_2(f)=I_2(f; \mu)=\inf\{S_0(T, \mu, f): T\in \mathrm{T}\},$$

$$I_1(f)=-I_2(-f).$$

Если $T=\{A_1,\cdots, A_n\}$, где A_j — непустые четкие множества, то $K(T, f)=[M_1, \infty)\times\cdots\times[M_n, \infty)$, где $M_j=\sup\{f(x): x\in A_j\}$. В этом случае $S_0(T, \mu, f)=S(T, \mu, c)$, где $c=(M_1,\cdots, M_n)$, а $I_2(f)$ — интеграл по неаддитивной мере в смысле § 4 из [9], а именно (в обозначениях из [9])

$$I_2(f)=(\mathrm{S})\int_U f(x)\, d\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}.$$

Если к тому же мера μ такова, что $\mu_1(A_j)=\mu_2(A_j)=\mu(A_j)$, $1\leqslant j\leqslant n$, то $S_0(T, \mu, f)=\sum_{j=1}^{n} M_j\mu(A_j)$, т. е. $S_0(T, \mu, f)$ — классическая верхняя интегральная сумма Дарбу для функции f при разбиении T. Если S — некоторая алгебра четких множеств, то $I_2(f)$ $I_1(f)$ — верхний и нижний интегралы Дарбу для функции f. Отметим еще, что (без предположения $A_j\in \mathrm{Cr}(U)$) если $\mu_1(A_j)=\mu_2(A_j)$, $1\leqslant j\leqslant n$. то $S(T, \mu, c)=\sum_{k=1}^{n} c_k\mu(A_k)$. Такого рода (и несколько более общие) суммы при $f\geqslant 0$ использованы в [7—8]

Из определения $\mathrm{P}(T, \mu)$ следует, что $\mu_1(U)\leqslant t_1+\cdots+t_n\leqslant\mu_2(U)$ для всех $T\in\mathrm{T}$. Поэтому $S_0(T, \mu, f)\leqslant s^+(f)\mu_2(U)$, $I_2(f)\leqslant s^+(f)\mu_2(U)$.

Определение. Если $I_2(-1, \mu)>-\infty$, то S-мера μ называется правильной.

Нам не известен ни один пример неправильной S-меры. Более того, представляется справедливой

Гипотеза. *Каждая S-мера является правильной.*

В настоящее время мы можем лишь указать ряд довольно широких классов правильных S-мер. Приведем примеры.

Пример 1. Если $\mathbf{S}\subset Cr(U)$, то каждая $\mathbf{S}$-мера μ является правильной. Действительно, в этом случае $S_0(T, \mu, -1) = S(T, \mu, (-1, \cdots, -1)) \geqslant -\mu_2(U)$, $I_2(-1, \mu) \geqslant -\mu_2(U) > -\infty$.

Пример 2. Пусть для всех $A \in \mathbf{S}$ выполняется $\mu_1(A) = 0$. Пусть $c \in K(T, f)$. Если $c = (c_1, \cdots, c_n)$, то $c^+ = (c_1^+, \cdots, c_n^+) \in K(T, f^+) \subset K(T, f)$. Очевидно, что $S(T, \mu, c^+) \geqslant S(T, \mu, c)$. Пусть $S(T, \mu, c^+) = \sum_{k=1}^{n} c_k^+ t_k^0$, $t^0 \in \mathbf{P}(T, \mu)$.

Положим $t' = (t_1', \cdots, t_n')$, где $t_j' = t_j^0$, если $c_j > 0$, $t_j' = 0$, если $c_j \leqslant 0$. Ясно, что $t' \in \mathbf{P}(T, \mu)$. Но

$$S(T, \mu, c^+) = \sum_{k=1}^{n} c^+ t_k' = \sum_{k=1}^{n} c_k^+ t_k' \leqslant S(T, \mu, c).$$

Таким образом, $S(T, \mu, c^+) = S(T, \mu, c)$. Отсюда получаем

$$S_0(T, \mu, f) = S_0(T, \mu, f^+),\quad I_2(f, \mu) = I_2(f^+, \mu).$$

Так как $S(T, \mu, c^+) \geqslant 0$, то $I_2(f, \mu) \geqslant 0$. В частности, $I_2(-1, \mu) \geqslant 0$, т. е. мера μ является правильной. Отметим еще, что в рассматриваемом случае $I_1(f, \mu) = -I_2(f^-, \mu)$.

В дальнейшем, не оговаривая особо, считаем все встречающиеся $\mathbf{S}$-меры правильными.

Теорема 1. *Если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in U$, то*

$$I_2(f) \leqslant I_2(g),\quad I_1(f) \leqslant I_1(g).$$

Это выводится из $K(T, f) \supset K(T, g)$, $K(T, -f) \subset K(T, -g)$.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant \lambda < \infty$. Тогда $I_2(\lambda f) = \lambda I_2(f)$, $I_1(\lambda f) = \lambda I_1(f)$.*

Пусть сначала $0 < \lambda < \infty$. Так как $c \in K(T, \lambda f) \Leftrightarrow \lambda^{-1} c \in K(T, f)$ и $S(T, \mu, c) = \lambda S(T, \mu, \lambda^{-1} c)$, то $S_0(T, \mu, \lambda f) = \lambda S_0(T, \mu, f)$, $I_2(\lambda f) = \lambda I_2(f)$. Очевидно, $I_2(0) \leqslant 0$. Из теоремы 1 следует, что $I_2(0) \geqslant I_2(-\lambda) = \lambda I_2(-1)$, $\lambda > 0$. Устремив λ к 0, получим $I_2(0) \geqslant 0$, откуда $I_2(0) = 0$. Равенство для I_1 следует из равенства для I_2.

Следствие. *Если $f(x) \geqslant 0$, то $I_2(f) \geqslant 0$, $I_1(f) \geqslant 0$. Если $f(x) \leqslant 0$, то $I_2(f) \leqslant 0$, $I_1(f) \leqslant 0$.*

Определение. Произведением TT_1 двух $\mathbf{S}$-разбиений $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$ и $T_1 = \{B_1, \cdots, B_m\}$ называется разбиение $\{A_i B_j : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$.

Лемма. *Пусть T и T_1 — $\mathbf{S}$-разбиения. Тогда $S_0(T, \mu, f) \geqslant S_0(TT_1, \mu, f)$.*

Доказательство. Пусть $T = \{A_1, \cdots, A_n\}$, $T_1 = \{B_1, \cdots, B_m\}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $c \in K(T, f)$ такое, что $S(T, \mu, c) < S_0(T, f)\mu + \varepsilon$. Пусть $S(T, \mu, c) = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$, $t \in P(T, \mu)$. Если $c' = (c_{11}, \cdots, c_{nm})$, где $c_{ij} = c_i$ при $1 \leqslant j \leqslant m$, то $c' \in K(TT_1, f)$. Действительно, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \varphi(x, A_i B_j) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \varphi(x, A_j) . \varphi(x, B_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(x, A_i) \times$

$\times \sum_{j=1}^{m} \varphi(x, B_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(x, A_i) \geqslant f(x)$. Пусть $(t_{ij}) \in P(TT_1, \mu)$. Обозначим через $\tilde{P}(TT_1, \mu)$ многогранник в R_+^{nm}, который отличается от $P(TT_1, \mu)$ тем, что из включений, которыми определяется $P(TT_1, \mu)$, оставлены лишь обладающие следующим свойством: если в них входит t_{ij_0}, то входят и все t_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant m$. Ясно, что $\tilde{P}(TT_1, \mu) \supset P(TT_1, \mu)$. Но

$$S(T, \mu, c) = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} t_{ij} : \left(\sum_{j=1}^{m} t_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^{m} t_{nj} \right) \in P(T, \mu) \right\} =$$

$$= \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} t_{ij} : (t_{ij}) \in \tilde{P}(TT_1, \mu) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} t_{ij} : (t_{ij}) \in P(TT_1, \mu) \right\} =$$

$$= \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} t_{ij} : (t_{ij}) \in P(TT_1, \mu) \right\} =$$

$$= S(TT_1, \mu, c') \geqslant S_0(TT_1, \mu, f).$$

Отсюда $S_0(TT_1, \mu, f) \leqslant S(T, \mu, c) < S_0(T, \mu, f) + \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, получаем требуемое.

Теорема 3. *Справедливы неравенства* $I_2(f_1 + f_2) \leqslant I_2(f_1) + I_2(f_2)$, $I_1(f_1 + f_2) \geqslant I_1(f_1) + I_1(f_2)$.

Доказательство. Если $c' \in K(T, f_1)$, $c'' \in K(T, f_2)$, то $c' + c'' \in K(T, f_1 + f_2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $c' \in K(T, f_1)$ и $c'' \in K(T, f_2)$ так, чтобы

$$S(T, \mu, c') < S_0(T, \mu, f_1) + \varepsilon,\ S(T, \mu, c'') < S_0(T, \mu, f_2) + \varepsilon. \text{ Но } S(T, \mu, c') + S(T, \mu, c'') \geqslant S(T, \mu, c' + c'') \geqslant S_0(T, \mu, f_1 + f_2).$$

Учитывая произвольность выбора ε, получаем

$$S_0(T, \mu, f_1) + S_0(T, \mu, f_2) \geqslant S_0(T, \mu, f_1 + f_2). \tag{1}$$

Для $\varepsilon > 0$ найдем T_1, T_2 такие, что $S_0(T_j, \mu, f_j) < I_2(f_j) + \varepsilon$, $j = 1, 2$. Учитывая лемму и (1), получим

$$2\varepsilon + \sum_{j=1}^{1} I_2(f_j) > \sum_{j=1}^{2} S_0(T_j, \mu, f_j) \geqslant \sum_{j=1}^{2} S_0(T_1 T_2, \mu, f_j) \geqslant S_0(T_1 T_2, \mu, f_1 + f_2) \geqslant I_2(f_1 + f_2).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 1. *Функционал $I_2(f)$ на L является полуаддитивным и положительно-однородным.*

Следствие 2. $I_2(f) \geqslant I_1(f)$.

Действительно, $I_2(f) - I_1(f) = I_2(f) + I_2(-f) \geqslant I_2(0) = 0$.

Определение. Интегралом от функции f относительно S-меры μ называется сегмент $I(f) = I(f, \mu) = [I_1(f), I_2(f)]$ и обозначается

$$I(f) = (\mathrm{S}) \int_U f(x)\, d\mu(x).$$

Интегралом функции f по множеству $A \in F(U)$ называется $I_A(f) = I(f\varphi(\cdot, A))$ и обозначается

$$I_A(f) = (\mathrm{S}) \int_A f(x)\, d\mu(x) = (\mathrm{S}) \int_U f(x)\, \varphi(x, A)\, d\mu(x).$$

Теорема 4. *Если $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ — две S-меры и для всякого $A \in \mathrm{S}$ выполняется $\mu^{(1)}(A) \supset \mu^{(2)}(A)$, то $I(f, \mu^{(1)} \supset I(f, \mu^{(2)})$.*

Это следует из $P(T, \mu^{(2)}) \subset P(T, \mu^{(1)})$,

$$S(T, \mu^{(2)}, c) \leqslant S(T, \mu^{(1)}, c),\ c \in K(T, f),$$

и, далее, $I_2(f, \mu^{(2)}) \leqslant I_2(f, \mu^{(1)})$.

Теорема 5. *Если $A \in \mathrm{S}$, то $I_A(1) \subset \mu(A)$.*

Действительно, пусть $T = \{A, cA\}$. Тогда $c' = (1, 0) \in K(T, \varphi(\cdot, \cdot, A))$, $c'' = (-1, 0) \in K(T, -\varphi(\cdot, A))$. Поэтому $S_0(T, \mu, \varphi(\cdot, A)) \leqslant \leqslant S(T, \mu, c') \leqslant \mu_2(A)$, $S_0(T, \mu, -\varphi(\cdot, A)) \leqslant S(T, \mu, c'') \leqslant -\mu_1(A)$, $I_2(\varphi(\cdot, A)) \leqslant \mu_2(A)$, $I_2(-\varphi(\cdot, A)) \leqslant -\mu_1(A)$.

Теорема 6. *Если $\mathrm{S}_1 \subset \mathrm{S}_2$, μ — некоторая S_2-мера (так же обозначается ее сужение на S_1), то*

$$(\mathrm{S}_2) \int_U f(x)\, d\mu(x) \subset (\mathrm{S}_1) \int_U f(x)\, d\mu(x).$$

Справедливость теоремы следует из того обстоятельства, что класс S_2-разбиений шире класса S_1-разбиений.

Следующая теорема, которая устанавливает связь между интегралом относительно нечеткой меры (или, что то же, по нечеткокй мере) и интегралами по аддитивной мере (в смысле Радона), является вариантом теоремы Б. Я. Левина, В. И. Мацаева и И. В. Островского, опубликованной в [9], § 1.

Теорема 7а. *Пусть $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S} \cap \mathrm{Cr}(U)$, μ — S-мера, $\mathrm{N}(\mathrm{N}_1)$ — класс четких S--мер (S_1-мер) ν таких, что $\nu(A) \in \mu(A)$ для всех $A \in \mathrm{S}$ ($A \in \mathrm{S}_1$). Предположим, что класс L_1 ограниченных S_1-измеримых функций является линейным пространством. Тогда $\mathrm{N}_1 \neq \varnothing$, для $f \in L_1$ выполняется*

$$\left.\begin{aligned} I_2(f, \mu, \mathrm{S}_1) &= \max\left\{(\mathrm{S}_1)\int_U f(x)\, d\nu(x) : \nu \in \mathrm{N}_1\right\}, \\ I_1(f, \mu, \mathrm{S}_1) &= \min\left\{(\mathrm{S}_1)\int_U f(x)\, d\nu(x) : \nu \in \mathrm{N}_1\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и существуют меры ν_1, $\nu_2 \in N_1$ такие, что

$$(S_1)\int_U f(x)\,d\nu_1(x) = I_2(f,\ \mu,\ S), \tag{3}$$

$$(S_1)\int_U f(x)\,d\nu_2(x) = I_1(f,\ \mu,\ S). \tag{4}$$

Если $f \in L_1$ и для всех $A \in S$ функции $\varphi(\cdot,\ A) \in L_1$, то $N \neq \varnothing$ и

$$I_2(f,\ \mu,\ S) = \max\{I_2(f,\ \nu,\ S) : \nu \in N\}, \tag{5}$$

$$I_1(f,\ \mu,\ S) = \min\{I_1(f,\ \nu,\ S) : \nu \in N\}. \tag{6}$$

Отметим, что предположение относительно класса L_1 является дополнительным требованием, так как, вообще говоря, сумма двух ограниченных S_1-измеримых функций может не быть S_1-измеримой в случае, когда S_1 не является σ-алгеброй множеств.

Доказательство теоремы 7а. Утверждение $N_1 \neq \varnothing$ и соотношения (2) доказаны в [9], § 4, без предположений о L_1. Обозначим через G подпространство L_1, $G = \{\lambda f : -\infty < \lambda < \infty\}$. Определим на L_1 функционал $p(y) = I_2(y,\ \mu,\ S)$, а на G линейный функционал $q(\lambda f) = \lambda p(f)$. Так как функционал $p(y)$ является полуаддитивным и положительно-однородным (см. следствие 1), то по теореме Хана — Банаха [17], с. 141, существует линейный функционал $Q(y)$ на L_1 такой, что $Q(y) \leqslant p(y)$, $y \in L_1$, и $Q(y) = q(y)$, $v \in G$. Согласно следствию из теоремы 2, если $y(x) \geqslant 0$ на U, то $-Q(y) = Q(-y) \leqslant \leqslant p(-y) \leqslant 0$, т. е. $Q(y) \geqslant 0$, $y \in L_1$. По теореме Г. М. Фихтенгольца — Л. В. Канторовича [17], с. 222, существует аддитивная ограниченной вариации функция множества ν_1 на S_1 такая, что

$$Q(y) = (S_1)\int_U y(x)\,d\nu_1(x),$$

где интеграл понимается в смысле Радона. Используя известное свойство интеграла Радона [17], с. 217, 2°, и теорему 5, получим для $A \in S_1$

$$0 < Q(\varphi(\cdot,\ A)) = \nu_1(A) \leqslant p(\varphi(\cdot,\ A)) = I_2(\varphi(\cdot,\ A)) \leqslant \mu_2(A).$$

Таким образом, $\nu_1(A) > 0$ при $A \in S_1$, следовательно, ν_1 — аддитивная S_1-мера, или, что то же, ν_1 — четкая S_1-мера. Кроме того, $-\nu_1(A) = Q(-\varphi(\cdot,\ A)) \leqslant p(-\varphi(\cdot,\ A)) = I_1(-\varphi(\cdot,\ A)) \leqslant -\mu_1(A)$, т. е. $\nu_1(A) \geqslant \mu_1(A)$. Следовательно, $\nu_1(A) \in \mu(A)$ для всех $A \in S$, $\nu_1 \in N$. Но $(S)\int_U f(x)\,d\nu_1(x) = Q(f(x)) = q(f(x)) = p(f(x)) = I_2(f,\ \mu,\ S)$, т. е. доказано (3). Отметим, что ν_1 зависит от f. Применим доказанное равенство (3) к $-f$ и учтем, что для интеграла ν_1 можно выносить за знак интеграла множитель -1. Тогда получим (4).

Пусть теперь для всех $A \in S$ выполняется $\varphi(\cdot,\ A) \in L_1$. Обозначим $\nu_0(A) = Q(\varphi(\cdot,\ A))$. Очевидно, ν_0 является аддитивной S-мерой. Точно так, как выше для $A \in S_1$, для $A \in S$ получим $\mu_1(A) \leqslant \nu_0(A) = Q(\varphi(\cdot,\ A)) \leqslant \mu_2(A)$, т. е. $\nu_0(A) \in \mu(A)$. Таким образом, $N \neq \varnothing$.

Пусть $c \in K(T, f)$. Тогда $S(T, \nu_0, c) = \sum_{j=1}^{n} c_j \nu_0(A_j) = Q\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi(x, A_j)\right) =$
$= Q(f(x)) + Q\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi(x, A_j) - f(x)\right) \geqslant Q(f(x)) = I_2(f, \mu, S)$.

Отсюда получаем $I_2(f, \nu_0, S) \geqslant I_2(f, \mu, S)$. Но из теоремы 4 следует, что для всех $\nu \in N$ выполняется $I_2(f, \mu, S) \geqslant I_2(f, \nu, S)$, откуда получаем (5). Записав (5) с $-f$ вместо f, приходим к (6). Теорема 7а доказана.

Заметным недостатком теоремы 7а является требование S_1-измеримости для различных функций. Дело в том, что при достаточно широком классе S класс S_1 может быть очень бедным. Пусть, например, $U = [a, b]$, S—алгебра множеств $A \in F(U)$, для которых функция $\varphi(\cdot, A)$ непрерывна на U. Тогда $S_1 = \{U, \varnothing\}$. Поэтому может представлять интерес вариант теоремы 7а, в котором наложены дополнительные требования на алгебру множеств S и S-меру μ, но зато не упоминается S_1-измеримость.

Скажем, что алгебра множеств S обладает свойством D, если выполняется следующее. Пусть $T = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ — произвольное $F(U)$-разбиение U. Для любых $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant n$, $1 < p < n$, обозначим через $\xi(j_1, \cdots, j_p)$ сумму $\xi_{j_1} + \cdots + \xi_{j_p}$. Пусть $\{A_s(j_1, \cdots, j_p)\}$ — конечная система множеств из S, для всех из них $\xi(j_1, \cdots, j_p) \subset A_s(j_1, \cdots, j_p)$. Тогда существуют $B_1, \cdots, B_n \in S$ такие, что $\xi_j \subset B_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n$ и $B_{j_1} + \cdots + B_{j_p} \subset A_s(j_1, \cdots, j_p)$ для любых $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p < n$.

Пример 3. Пусть $S \subset Cr(U)$. Тогда S обладает свойством D. В самом деле, достаточно взять $B_j = \cap \{A_s(j_1, \cdots, j_p) : j \in \{j_1, \cdots, j_p\}\}$. Если $j \in \{j_1, \cdots, j_p\}$, то $\xi_j \subset \xi(j_1, \cdots, j_p) \subset A_s(j_1, \cdots, j_p)$; поэтому из $\varphi(x, \xi_j) > 0$ следует $\varphi(x, A_s(j_1, \cdots, j_p)) = 1$, а значит, и $\varphi(x, B_j) = 1$. Включение $\xi_j \subset B_j \subset A_s(j_1, \cdots, j_p)$ очевидно, откуда $B_{j_1} + \cdots + B_{j_p} = B_{j_1} \cup \cdots \cup B_{j_p} \subset A(j_1, \cdots, j_p)$.

Пример 4. Алгебра множеств $F(U)$ обладает свойством D. Действительно, в этом случае можно взять $B_j = \xi_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пример 5. Пусть $U = [0, 1]$, S — алгебра множеств $A \subset F(U)$ таких, что $\varphi(\cdot, A)$ — кусочно-постоянна на U. Пусть $T = \{\xi_1, \cdots, \xi_4\}$, $\varphi(x, \xi_1) = \varphi(x, \xi_2) = x/2$, $\varphi(x, \xi_3) = \varphi(x, \xi_4) = (1 - x)/2$, $\varphi(x, A(1, 3)) \equiv 1/2$, для $\{j_1, \cdots, j_p\} \neq \{1, 3\}$ выполняется $A(j_1, \cdots, j_p) = U$. Очевидно, $\xi(1, 3) = A(1, 3)$, однако при любом выборе $B_1, B_3 \in S$, $\xi_1 \subset B_1$, $\xi_3 \subset B_3$, $B_1 + B_3 \supset A(1, 3)$, $B_1 + B_3 \neq A(1, 3)$. Система S не обладает свойством D.

S-мера μ называется монотонной, если для любых A, $B \in S$ включение $A \subset B$ влечет $\mu_j(A) \leqslant \mu_j(B)$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что всякая четкая мера является монотонной. Нечеткая S-мера μ, $S \cup Cr(U)$, уже может не быть монотонной. Пусть, например, $U = \{1, 2\}$, $\mu(\{1\}) = [1, 2]$, $\mu(\{2\}) = [0, 1]$, $\mu(U) = [0, 1]$, $S = Cr(U)$, $T = \{\{1\}, \{2\}\}$. Тогда $P(T, \mu) = \{(1, 0)\} \neq \varnothing$. Но хотя $\{1\} \subset U$, имеем $\mu_1(\{1\}) = 1 > \mu_1(U) = 0$, $\mu_2(\{1\}) = 2 > \mu_2(U) = 1$. Тем не менее, если $S \subset Cr(U)$ нечеткую S-меру μ можно заменить монотонной S-мерой μ' такой, что интеграл от любой функции по μ' совпадает с интегралом по μ [9], § 4, теорема 9, лемма 3.

Справедлива

Теорема 76. *Пусть* S — *алгебра множеств, обладающая свойством* D, $S^* = F(U)$, μ — *монотонная* S-*мера*, $N(M^*)$ — *класс четких* S-*мер* (S^*-*мер*) ν *таких, что* $\nu(A) \in \mu(A)$ *для всех* $A \in S$ $(A \in S^*)$. *Тогда* $N \neq \varnothing$, $N^* \neq \varnothing$ *и*

$$I_2(f, \mu, S) = \max\{I_2(f, \nu, S) : \nu \in N\} = \max\{I_2(\nu, S^*) : \nu \in N\}, \qquad (7)$$

$$I_1(f, \mu, S) = \min\{I_1(f, \nu, S) : \nu \in N\} = \min\{I_1(f, \nu, S^*) : \nu \in N^*\}. \qquad (8)$$

Из теоремы 76 можно вывести в качестве следствия утверждение, доказанное в [9], § 4, теорема 12.

Следствие. *Пусть* $S_1 \subset \mathrm{Cr}(U)$, $S_1^* = \mathrm{Cr}(U)$, μ — S-*мера*, $(N_1 (N_1^*)$ — *класс четких* S_1-*мер* (S^*-*мер*) ν *таких, что* $\nu(A) \in \mu A)$ *для всех* $A \in S_1 (A \in S_1^*)$. *Тогда* $N_1^* \neq \varnothing$, $N_1 \neq \varnothing$ *и*

$$I_2(f, \mu, S_1) = \max\{I_2(f, \nu, S_1) : \nu \in N_1\} = \max\{I_2(f, \nu, S_1^*) : \nu \in N_1^*\},$$

$$I_1(f, \mu, S_1) = \min\{I_1(f, \nu, S_1) : \nu \in N_1\} = \min\{I_1(f, \nu, S_1) : \nu \in N_1^*\}.$$

При доказательстве следствия следует использовать пример 3, а при выводе соотношений с N_1^* слегка видоизменить некоторые моменты в следующих ниже доказательствах теорем 8 и 76. Заметим, что, вообще говоря, интеграл по S не равен интегралу по $S_1 = S \cap \mathrm{Cr}(U)$. Действительно, пусть $S = S^*$, $S_1 = S_1^*$, $\mu_1(A) \equiv 0$, $\mu_2(A) = [s(\cdot, A))]$, $f(x) \equiv 1$. Тогда $I_1(f, \mu, S^*) = 0$, $I_2(f, \mu, S_1^*) = 1$.

Доказательство теоремы 76 будет приведено несколько позже, так как нам понадобятся некоторые определения и факты.

Пусть μ — некоторая S-мера. Для $A \in S^*$ определим

$$\mu_2^*(A) = \inf\{\mu_2(B) : B \in S,\ A \subset B\},$$

$$\mu_1^*(A) = \sup\{\mu_1(B) : B \in S,\ B \subset A\}.$$

Теорема 8. *Пусть* S — *алгебра множеств, обладающая свойством* D, μ — *монотонная* S-*мера. Для* $A \in S^*$ *выполняется* $\mu_1^*(A) \leqslant \mu_2^*(A)$, $\mu^*(A) = [\mu_1^*(A), \mu_2^*(A)]$ *является* S^*-*мерой и для любой функции* f

$$(S^*) \int\limits_U f(x)\, d\mu^*(x) = (S) \int\limits_U f(x)\, d\mu(x).$$

Доказательство. Пусть $T = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ — некоторое S^*-разбиение. Если $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$, то обозначаем $\xi(j_1, \cdots, j_p) = \xi_{j_1} + \cdots + \xi_{j_p}$, $\{j_1', \cdots, j_{n-p}'\} = \{1, \cdots, n\} \setminus \{j_1, \cdots, j_p\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем $A(j_1, \cdots, j_p) \subset \xi(j_1, \cdots, j_p)$, $B(j_1, \cdots, j_p) \supset \xi(j_1, \cdots, j_p)$, $A(j_1, \cdots, j_p) \in S$, $B(j_1, \cdots, j_p) \in S$ такие, что

$$\mu_1(A(j_1, \cdots, j_p)) \geqslant (\mu_1^*(\xi(j_1, \cdots, j_p)) - \varepsilon)^+,$$

$$\mu_2(B(j_1, \cdots, j_p)) < \mu_2^*(\xi(j_1, \cdots, j_p)) + \varepsilon.$$

Заметим, что из $A(j_1', \cdots, j_{n-p}') \subset \xi(j_1', \cdots, j_{n-p}')$ следует, что $\xi(j_1, \cdots, j_p) \subset cA(j_1', \cdots, j_{n-p}')$. Так как S-мера μ обладает свойством D, то существуют $D_1, \cdots, D_n \in S$ такие, что для всякого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\xi_j \subset D_j$ и всякого $(j_1, \cdots, j_p)$ выполняется

$$D_{j_1} + \cdots + D_{j_p} \subset B_{j_1}(j_1, \cdots, j_p), \tag{9}$$

$$D_{j_1} + \cdots + D_{j_p} \subset cA(j_1', \cdots, j_{n-p}'). \tag{10}$$

Возьмем произвольную функцию f. Пусть $c \in K(T, f)$. Можно считать, что $\xi_1, \cdots, \xi_n$ пронумерованы так, что $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_n$. Положим $C_1 = D_1$, $C_j = D_1 + \cdots + D_j) - (D_1 + \cdots + D_{j-1})$ при $2 \leqslant j \leqslant n$. Так как $U \supset D_1 + \cdots + D_n \supset \xi_1 + \cdots + \xi_n = U$, то

$$\varphi(x, C_1) + \cdots + \varphi(x, C_n) = \varphi(x, D_1) + (\varphi(x, D_1) +$$

$$+ \varphi(x, D_2))^{\wedge} - \varphi(x, D_1) + \cdots + (\varphi(x, D_1) +$$

$$+ \varphi(x, D_n))^{\wedge} - (\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{n-1}))^{\wedge} =$$

$$= \varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_n))^{\wedge} \equiv 1.$$

Поэтому $T' = \{C_1, \cdots, C_n\}$ является S-разбиением. Заметим, что оно зависит от ε. Пусть $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n$.

Тогда $\varphi(x, C_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, C_{j_p}) = \{(\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_1}))^{\wedge} - (\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_1-1})))^{\wedge}\} + \cdots + \{\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_p}))^{\wedge} - (\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_{p-1}}))^{\wedge}\}$.

Если $\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_1-1}) \geqslant 1$, то

а) $\varphi(x, C_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, C_{j_p}) = 0$. В остальных случаях существует наименьшее k, $1 \leqslant k < p$ такое, что или

б) $\varphi(x, C_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, C_{j_p}) = \varphi(x, D_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k})$, или

в) $\varphi(x, C_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, C_{j_p}) = \varphi(x, D_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, D_{j_{k-1}}) + 1 - (\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k-1}))$.

В последнем случая $\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k}) \geqslant 1$, поэтому $\varphi(x, C_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, C_{j_p}) \leqslant \varphi(x, D_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k})$. Таким образом, в любом случае в силу (9) $C_{j_1} + \cdots + C_{j_p} \subset D_{j_1} + \cdots + D_{j_p} \subset B(j_1, \cdots, j_p)$ и в силу монотонности S-меры μ

$$\mu_2(C_{j_1} + \cdots + C_{j_p}) \leqslant \mu_2(B(j_1, \cdots, j_p)) < \mu_2^*(\xi(j_1 \cdots, j_p)) + \varepsilon. \tag{11}$$

Равенство б) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k}) < 1$, но $\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_{k+1}-1}) \geqslant 1$. Тем более, $\varphi(x, D_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k}) + \varphi(x, D_{j_1'}) + \cdots + \varphi(x, D_{j_{n-p}'}) \geqslant 1$. Следовательно

$$\varphi(x, C_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, C_{j_p}) \geqslant 1 - (\varphi(x, D_{j_1'}) + \cdots + \varphi(x, D_{j_{n-p}'})). \tag{12}$$

Равенство в) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k-1}) < 1$, но $\varphi(x, D_1) + \cdots + \varphi(x, D_{j_k}) \geqslant 1$. Тогда $\varphi(x, C_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, C_{j_p}) \geqslant \varphi(x, D_{j_1}) + \cdots + \varphi(x, D_{j_{k-1}})$, и рассуждая как выше, снова получаем (12). В случае а) неравенство (12) очевидно, так как правая часть его отрицательна. Из (10) следует, что $\{1-(\varphi(x, D_{j_1})+\cdots+\varphi(x, D_{j_{n-p}}))\}^+ \geqslant \varphi(x, A(j_1,\cdots, j_p))$. Учитывая (12), получаем, что $A(j_1,\cdots, j_p)\subset C_{j_1}+\cdots+C_{j_p}$. В силу монотонности S-меры μ выполняется

$$\mu_1(C_{j_1}+\cdots+C_{j_p}) \geqslant \mu_1(A(j_1,\cdots, j_p)) \geqslant (\mu_1^*(\xi(j_1,\cdots, j_p))-\varepsilon)^+. \quad (13)$$

Для $A\subset F(U)$ обозначим $\mu_\varepsilon^*(A)=[(\mu_1^*(A)-\varepsilon)^+, \mu_2^*(A)+\varepsilon]$. Тогда из (11) и (13) следует, что $P(T', \mu)\subset P(T, \mu_\varepsilon^*)$. Следовательно

$$P(T, \mu^*)=\bigcap_{\varepsilon>0} P(T, \mu_\varepsilon^*)\neq\varnothing. \quad (14)$$

и μ^* является S^*-мерой.

Так как для всех j, $1\leqslant j\leqslant n$, выполняется $\xi_j\subset D_j$ и $C_1+\cdots+C_j=D_1+\cdots+D_j$, то

$$\xi_1+\cdots+\xi_j\subset C_1+\cdots+C_j. \quad (15)$$

Из (15) следует $c_1\varphi(x, \xi_1)+\cdots+c_n\varphi(x, \xi_n)=(c_1-c_2)\varphi(x, \xi_1)+$

$$+(c_2-c_3)\varphi(x, \xi_1+\xi_2)+\cdots+(c_{n-1}-c_n)\varphi(x, \xi_1+\cdots+\xi_{n-1})+$$
$$+c_n\varphi(x, \xi_1+\cdots+\xi_n)\leqslant(c_1-c_2)\varphi(x, C_1)+(c_2-c_3)\varphi(x, C_1+C_2)+\cdots+$$
$$+(c_{n-1}-c_n)\varphi(x, C_1+\cdots+C_{n-1})+c_n\varphi(x, C_1+\cdots+C_n)=$$
$$=c_1\varphi(x, C_1)+\cdots c_n\varphi(x, C_n),$$

поэтому $c\in K(T', f)$, т. е. $K(T, f)\subset K(T', f)$. Из монотонности S-меры μ следует, что для $A\in S$ выполняется $\mu^*(A)=\mu(A)$. По теореме 6

$$(S^*)\int_U f(x)\,d\mu^*(x)\subset(S)\int_U f(x)\,d\mu(x). \quad (16)$$

Отсюда следует правильность S^*-меры μ^*.

Докажем включение в противоположную сторону по сравнению с (16). Возьмем произвольное $\eta>0$. Найдем S^*-разбиение T и $c\in K(T, f)$ такие, что $I_2(f, \mu^*, S^*)+\eta>S(T, \mu^*, c)$. Затем найдем столь малое $\varepsilon>0$, что $S(T, \mu^*, c)>S(T, \mu_\varepsilon^*, c)-\eta$. Возможность такого выбора ε следует из равенства $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} S(T, \mu_\varepsilon^*, c)=S(T, \mu^*, c)$, которое очевидно, если учесть связь $S(T, \mu^*, c)$ с опорной функцией $P(T, \mu^*)$, о которой говорилось после определения $S(T, \mu^*, c)$. По данному T и ε построим, как выше, S-разбиение T'. Так как $P(T', \mu)\subset P(T, \mu_\varepsilon^*)$ и $K(T, f)\subset K(T', f)$, то при $c\in K(T, f)$ выполняется $S(T', \mu, c)\leqslant S(T, \mu_\varepsilon^*, c)$ и $S_0(T, \mu_\varepsilon^*, f)\geqslant S_0(T', \mu, f)\geqslant I_2(f, \mu, S)$. Таким образом, $I_2(f, \mu^*, S^*)+2\eta\geqslant I_2(f, \mu, S)$, откуда в силу произвольности η получаем $I_2(f, \mu^*, S^*)\geqslant I_2(f, \mu, S)$. Применив это неравенство к $-f$, получим $I_1(f, \mu^*, S^*)\leqslant I_1(f, \mu, S)$. Таким образом

$$(S^*)\int_U f(x)\,d\mu^*(x)\supset(S)\int_U f(x)\,d\mu(x),$$

что вместе с (16) доказывает теорему 8.

Теперь приведем

Доказательство теоремы 7б. Построим S-меру μ^* и используем теорему 8. Считая в теореме 7а $S=S^*$, видим, что все ограниченные функциии являются S_1^*-измеримыми и класс L_1 необходимо является линейным пространством. По теореме 7а $N^*\neq\varnothing$. Так как $N^*\subset N$, то и $N\neq\varnothing$. Из (2), (5) и теоремы 6 следует $I_2(f, \mu, S)=$ $=I_2(f, \mu^*, S^*) = \max\{I_2(f, \nu, S^*): \nu\in N^*\}<\max\{I_2(f, \nu, S): \nu\in N\}=$ $=I_2(f, \mu, S)$. Таким образом, доказано (7). Соотношение (8) получается из (7), где вместо f взято $-f$.

Замечание 1. Можно было бы определять S-меру μ как $\mu: S\to$ $\to S'$, где S' множество компактных подмножеств R_+, $\mu_1(A)=\min\mu(A)$, $\mu_2(A)=\max\mu(A)$. Это потребовало бы лишь незначительных изменений в формулировках теорем.

Замечание 2. При следующем варианте построения интеграла по нечеткой мере вопрос о правильности S-меры не возникает. Будем предполагать, что $f(x)\geqslant 0$ при $x\in U$, а от $c\in K(T, f)$ будем требовать дополнительно, чтобы $c\in R_+^n$. После этого, как раньше $I_2(f, \mu)$, определяем $I_2'(f, \mu)$. Наряду с $S(T, \mu, c)$ определим $s(T, \mu, c)=$ $=\min\left\{\sum_{k=1}^{n} c_k t_k: t\in P(T, \mu)\right\}$, далее $s_0(T, \mu, f)=\inf\{s(T, \mu, c): c\in$ $\in K(T, f)\}$, $I_1'(f, \mu)=\inf\{s_0(T, \mu, f): T\in \mathrm{T}\}$. Очевидно, если μ-четкая, то $S(T, \mu, c)=s(T, \mu, c)$, $S_0(T, \mu, f)=s_0(T, \mu, f)$ $I_1'(f, \mu)=I_2'(f, \mu)$. В общем же случае $I_1'(f, \mu)\leqslant I_2'(f, \mu)$. Если теперь не будем требовать, чтобы $f>0$, то определим $I_2(f, \mu)=I_2'(f^+, \mu)-I_1'(f^-, \mu)$, $I_1(f, \mu)=$ $=I_1'(f_\mu^+)-I_2'(f^-, \mu)$. Как раньше, определим

$$I(f, \mu)=(S)\int_U f(x)\,d\mu(x)=[I_1(f, \mu), I_2(f, \mu)].$$

В частности, если $\mu_1\equiv 0$, то $I_1'=0$, и получаем обобщение определения интеграла из [9], § 1. При новом определении интеграла $I_2(f)$, вообще говоря, не является полуаддитивным функционалом и аналоги теорем 7а и 7б формулируются громоздко.

Львовский государственный
университет имени И. Франко

Поступила 2. XII. 1987

Ա. Ա. ԳՈԼԴԲԵՐԳ. Ոչ ճստակ չափով ինտեգրալ *(ամփոփում)*

Ներմուծվում է ոչ հստակ բազմությունների մի հանրահաշվի վրա սահմանված ոչ հըստակ չափով ինտեգրալի նոր գաղափար։ Հստակ բազմությունների և հստակ չափի դեպքում այն համընկնում է դասականի հետ, իսկ հստակ բազմությունների և ոչ հստակ չափի դեպքում՝ 1964 թ. հեղինակի կողմից ներմուծված ոչ ադիտիվ ինտեգրալի հասկացության հետ։

A. A. GOLDBERG. *An integral with respect to a fuzzy measure* (summary)

A new notion of integral with respect to a fuzzy measure defined on som algebra of fuzzy sets is introduced. For the case of crisp sets and a crisp measure

coincides with the classical notion of an integral while for the case of crisp set and a fuzzy measure it coincides with the notion of an integral by a non-additive measure, which was introduced by the author in 1964.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Кофман.* Введение в теорию нечетких множеств, М., Радио и связь, 1982, 432 с.
2. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта (под ред. Д. А. Поспелова), М., Наука, 1986, 312 с.
3. *M. Sugeno.* Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. dissertation, Tokyo, Inst, Technology. 1974.
4. *D. Ralescu, G Adams.* The fuzzy integral, J. Math. Anal. and Appl., 1980, 75 № 2, 562—570.
5. *F. Suarez Garcia. P. Gil Alvares.* Integrales normadas y conormadas (generalizacion de la integral de Sugeno), Trabajos estadist. y invest. oper., 1985, 3 № 1, 107—121.
6. *Wang Zi—Xiao.* Fuzzy measures and measures of fuzziness, J, Math. Anal. and Appl., 1984, 104, № 2, 589—601.
7. *D. Butnariu.* Additive fuzzy measures and integrals. I, J. Math. Anal. and Appl., 1983, 93, № 2, 436—452.
8. *D. Butnariu.* Fuzzy measurability and integrability, J. Math. Anal. and Appl., 1986, 117, № 2. 385—410.
1. *А. Кофман.* Введение в теорию нечетких множеств, М., Радио и связь, 1982, 433 с. целых функций, I—IV, Матем. сб., 1962, 58, № 3, 289—334; 1963, 61, № 3, 334—349; 1964, 65 ,№ 3, 414—453; 1965, 66, № 3, 411—457.
10. *Г. Л. Лунц.* Об оценках роста канонического произведения, Изв. АН АрмССР, «Математика», 1968, 3, № 2, 126—136.
11. *Е Д. Файнберг.* Об интеграле по неаддитивной мере и оценках индикатора целой функции, Сибирск. мат. ж., 1983, 24, № 1, 175—186.
12. *Е. Д. Файнберг.* Оценки индикаторов функций, аналитических и нецелого конечного порядка в полуплоскости. I, В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Изд-во Харьковск. ун-та, 1974, вып. 21, 13—30.
13. *Г. Я. Арешкин, В. А. Попов.* Δ-функционалы и интеграл по непрерывной внешней мере, Известия вузов, Математика, 1976, № 8, 3—8.
14. *В. А. Попов.* Аддитивные и полуаддитивные функции на булевых алгебрах, Сибирск мат. ж., 1976, 17, № 2, 331—339.
15. *М. Н. Лубышев.* Об абсолютной непрерывности интеграла Гольдберга, В кн.: Функции множеств, Сыктывкар, Изд-во Коми пед. ин-та, 1977, 64—67.
16. *И. Калас, (J. Kalas).* Предельные теоремы, касающиеся интеграла по полуаддитивной мере, Acta math. univ. comenianae, 1980, 37, 135—145.
17. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959, 684 с.

Примечание. Через два года после поступления данной статьи в редакцию появилась статья Д. А. Молодцова, К вопросу об определении интервальной меры, в кн.: Новые результаты в теории исследования операций, М.: ВЦ АН СССР, 1989.— С. 3—51, в которой на некоторой алгебре четких множеств также вводится мера, принимающая значения из множества сегментов. В некоторых отношениях введенная Д. А. Молодцовым мера, названная им интервальной, более общая, чем наша (сегменты принадлежат [— ∞, ∞], а не [0, ∞]; множеству соответствует, вообще говоря, не один сегмент и т. д.). С другой стороны, на нее накладываются некоторые ограничения, которые у нас необязательны. В указанной статье Д. А. Молодцова теория интеграла по интервальной мере не строится.