УДК 517.98

М. И. КАРАХАНЫАН

ОБ ОПЕРАТОРНОМ УРАВНЕНИИ $HU - UK = C$

Пусть X — слабо полное (в частности рефлексивное) банахово пространство, а H, K — вообще говоря, неограниченные спектральные операторы скалярного типа (подробнее см. [1]), для которых спектры $\sigma(H), \sigma(K) \subset \mathbb{R}^1$.

В данной работе нас интересует вопрос о разрешимости операторного уравнения

$$HU - UK = Cu, \tag{A}$$

где $u \in D(K), C \in B(X)$ — спектральный оператор скалярного типа, при условии, что $Y \in B(X)$. Здесь $B(X)$ — алгебра ограниченных линейных операторов, отображающих пространство X в себя. Полученные в этой работе результаты усиливают результаты из [2], [3].

Хорошо известно (см. [4]), что для операторов H, K вышесказанное равносильно тому, что существуют строго непрерывные однопараметрические группы $H(t), K(s)$ ($t, s \in (\mathbb{R}^1)$) спектральных операторов скалярного типа, у которых спектры лежат на единичной окружности, соответствующие разложения единицы E_H, E_K равномерно ограничены по норме и инфинитезимальные производящие операторы, соответственно, являются H и K .

Так как

$$\langle H(t)u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \langle E_H(d\lambda)u, \varphi \rangle,$$

$$\langle K(s)u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\lambda} \langle E_K(d\lambda)u, \varphi \rangle,$$

$u \in X, \varphi \in X^*$, то ясно, что $\sup_t \|H(t)\| < \infty, \sup_s \|K(s)\| < \infty$.

Поэтому в силу теории Хилле-Иосиды (см. [5], [6], [7]) H и K -замкнутые, плотно определенные операторы, для которых нормы резольвент имеют оценки

$$\|R_H(z)\| \leq \frac{M_H}{|\operatorname{Im} z|}, \quad \|R_K(z)\| \leq \frac{M_K}{|\operatorname{Im} z|},$$

где M_H, M_K — константы. С другой стороны, ввиду того, что

$$Hu = \lim_{t \rightarrow 0^+} S_t^{<H>} u \quad \text{и} \quad Kv = \lim_{t \rightarrow 0^+} S_t^{<K>} v,$$

где $u \in D(H), v \in D(K), t > 0$, а $S_t^{<H>} = -it \sin H_t$,

$S_t^{<K>} = -it \sin K_t$ — спектральные операторы скалярного типа, у которых спектры $\sigma(S_t^{<H>}) \subset J$, $\sigma(S_t^{<K>}) \subset J$, где $J = \{it : t \in \mathbb{R}^1\}$ и соответствующие разложения единицы равномерно ограничены по норме, то в силу результатов (см. [1]), гл. XVII) следует, что операторы H^* и K^* — спектральные операторы скалярного типа класса X . Отметим, что вышеуказанные свойства и оценки резольвент операторов H и K будут выполняться и для операторов H^* и K^* .

Хорошо известно (см. [8]), что когда $H, K, C \in B(X)$ и $\sigma(H) \cap \sigma(K) = \emptyset$, то операторное уравнение $HY - YK = C$ имеет единственное решение в алгебре $B(X)$, которое получается по формуле

$$Y = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_H} \int_{\Gamma_K} \frac{R_H(\lambda) CR_K(\mu)}{i - \mu} d\lambda d\mu,$$

где Γ_H, Γ_K — контуры, охватывающие спектры, соответственно, операторов H и K , а $R_H(\lambda), R_K(\mu)$ — соответствующие резольвенты. Применяя методику работы [2] и вышеуказанное соображение в случае непересекающихся спектров мы покажем, что операторное уравнение

$$(H + iyI)Yu - Y(K - iyI)u = Cu, \quad (1)$$

где $u \in D(K)$, $y > 0$ имеет единственное решение $T_y \in B(X)$, которое позволит получить критерий разрешимости операторного уравнения (A).

Очевидно, что оператор $Y \in B(X)$ будет решением задачи (A) тогда и только тогда, когда является решением одной из задач

$$\langle HYu, \varphi \rangle - \langle YKu, \varphi \rangle = \langle Cu, \varphi \rangle, \quad (A_1)$$

где $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$ или

$$YR_K(z) - R_H(z)Y = R_H(z)CR_K(z) + 2iyR_H(z)YR_K(z), \quad (A_2)$$

где $z = x + iy$, $z = x - iy$, $y \neq 0$.

Используя вышеуказанные оценки на нормы резольвент операторов H и K , легко получить, что

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-r}^r \langle R_H(z)u, \varphi \rangle dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-r}^r \langle R_K(z)u, \varphi \rangle dx = \\ &= \operatorname{sgn} y \langle u, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

В силу слабой полноты пространства X при $y > 0$ существует оператор $T_y = T(H, K, C, y)$ как слабый интеграл

$$T_y = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r R_H(\bar{z}) CR_K(z) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r R_H(\bar{z}) CR_K(z) dx, \quad (3)$$

Лемма 1. Пусть $y > 0$. Тогда оператор $T_y \in B(X)$, $\|T_y\| \leq \frac{M}{y}$ и T_y — единственное ограниченное решение операторного уравнения $(iI + iyI)Yu - Y(K - iyI)u = Cu$, где $u \in D(K)$.

Доказательство. Пусть $u \in X$, $|u| = 1$, $\varphi \in X^*$, $|\varphi| = 1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\langle R_H(\bar{z}) C R_K(z) u, \varphi \rangle| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\langle C R_K(z) u, R_{H^*}(\bar{z}) \varphi \rangle| dx \leq \\ \leq |C| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |R_K(z)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |R_{H^*}(\bar{z})|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Но так как

$$|R_{H^*}(\bar{z})|^2 \leq \int_{\sigma(H^*)} \frac{|E_{H^*}(dt)|}{|t - \bar{z}|^2}, \quad |R_K(z)|^2 \leq \int_{\sigma(K)} \frac{|E_K(dt)|}{|t - z|^2},$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_K(z)|^2 dx \leq \frac{M_1}{\sqrt{y}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |R_{H^*}(\bar{z})|^2 dx \leq \frac{M_2}{\sqrt{y}},$$

ткуда следует, что $|T_y| \leq \frac{M}{y}$.

Убедимся в том, что оператор T_y — решение уравнения (1). В самом деле, если $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$, то

$$\langle (H + iyI) T_y u, \varphi \rangle - \langle T_y (K - iyI) u, \varphi \rangle = \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r [\langle C R_K(z) u, \varphi \rangle - \langle R_H(z) C u, \varphi \rangle] dx = \langle C u, \varphi \rangle.$$

Пусть теперь уравнение (1) имеет ограниченное решение Y . Тогда при $y > 0$, $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$ имеем

$$\langle Y R_K(z) u, \varphi \rangle - \langle R_H(z) Y u, \varphi \rangle = \langle R_H(\bar{z}) C R_K(z) u, \varphi \rangle,$$

откуда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle Y R_K(z) u, \varphi \rangle dx - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle R_H(z) Y u, \varphi \rangle dx = \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \langle R_H(\bar{z}) C R_K(z) u, \varphi \rangle dx.$$

Но тогда в силу соотношения (2) имеем, что $\langle Y u, \varphi \rangle = \langle T_y u, \varphi \rangle$ т. е. $Y = T_y$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Задача (А) имеет ограниченное решение тогда, и только тогда, когда семейство $\{\|T_y\|: y > 0\}$ ограничено. Если семейство $\{\|T_y\|: y > 0\}$ ограничено, то существует слабо сходящаяся при $y_n \rightarrow 0$ последовательность T_{y_n} , и всякая слабо сходящаяся последовательность слабо сходится к ограниченному решению задачи (А).*

Доказательство. Предположим, что задача (А) имеет ограниченное решение Y . Тогда при $u \in D(K)$, $\varphi \in D(H^*)$, $y > 0$ из (А₂) имеем

$$\langle Yu, \varphi \rangle = \langle T(H, K, C, y)u, \varphi \rangle + 2iy \langle T(H, K, Y, y)u, \varphi \rangle.$$

В силу леммы 1 семейство $\{y \| T(H, K, Y, y) \| : y > 0\}$ ограничено и, следовательно, ограничено семейство $\{\|T_y\| : y > 0\}$, где $T_y = T(H, K, C, y)$. Обратно, если семейство операторов $\{\|T_y\| : y > 0\}$ ограничено, то существует последовательность $\{T_{y_n}\}$ с $y_n \rightarrow 0$, которая слабо сходится к ограниченному оператору Y . В силу леммы 1 имеем, что $\langle HYu, \varphi \rangle - \langle YKu, \varphi \rangle = \langle Cu, \varphi \rangle$, т. е. Y — решение задачи (А). Теорема 1 доказана.

Замечание. а) Доказанную теорему 1 можно обобщить, если вместо пространства X рассмотреть пару слабо полных банаховых пространств X_1, X_2 , где H действует в X_1 , K действует в X_2 , а оператор $C \in B(X_2, X_1)$.

б) Нетрудно видеть, что вышеуказанные результаты работают и в том случае, если $\sigma(H), \sigma(K) \subset \mathbb{R}^1$ и нормы резольвент имеют оценки $\|R_H(z)\| \leq \frac{M_H}{|z|}$, $\|R_K(z)\| \leq \frac{M_K}{|z|}$.

Отметим, что две операторные матрицы $L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ и $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ как операторы из $B(X \oplus X)$, у которых компоненты есть спектральные операторы скалярного типа, называются подобными друг другу, если существует обратимая операторная матрица $U \in B(X \oplus X)$ такого же типа, для которых $UL = SU$. В случае, когда операторы $H, K \in B(X)$, имеет место следующая

Теорема 2. Пусть H, K — ограниченные эрмитовые спектральные операторы скалярного типа, действующие в слабо полном банаховом пространстве X . Тогда уравнение $HY - YK = C$, где $C \in B(X)$ — спектральный оператор скалярного типа имеет ограниченное решение тогда и только тогда, когда операторные матрицы $\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} H & C \\ 0 & K \end{bmatrix}$ подобны друг другу.

Доказательство. Если уравнение $HY - YK = C$ имеет ограниченное решение Y , то подобие вышеуказанных операторных матриц следует из тождества

$$\begin{bmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & HY - YK \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Обратно, предположим, что эти операторные матрицы подобны, т. е. существует такой обратимый оператор U на $X \oplus X$, что

$$\begin{bmatrix} H & C \\ 0 & K \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} U.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} R_H(z) & -R_H(\bar{z})CR_K(z) \\ 0 & R_K(z) \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} R_H(z) & 0 \\ 0 & R_K(z) \end{bmatrix} U,$$

откуда получаем, что

$$\begin{bmatrix} R_H(\bar{z}), -R_H(\bar{z})CR_K(z) \\ 0 & R_K(z) \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} R_H(z), 0 \\ 0, R_K(z) \end{bmatrix} U - \\ -2iy \begin{bmatrix} R_H(\bar{z}), 0 \\ 0, I \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} R_H(z), 0 \\ 0, R_K(z) \end{bmatrix} U, \quad (4)$$

где $z = x + iy$, $y > 0$.

Применим к обеим частям тождества (4) операцию интегрирования $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r \dots dx$. Тогда в левой части получим операторную матрицу

$$\begin{bmatrix} -\frac{I}{2}, -T_y \\ 0, \frac{I}{2} \end{bmatrix}, \text{ а правая часть в силу леммы 1 будет равно-}$$

мерно ограничена при $y > 0$. Таким образом, семейство $\{ \|T_y\| : y > 0 \}$ ограничено, и в силу теоремы 1 уравнение $HU - UK = C$ имеет решение в алгебре $B(X)$. Теорема 2 доказана.

Пусть $R_H[t], R_K[t]$ — кольца полиномов, порожденные, соответственно, операторами $H, K \in B(X)$ над полем R^1 . Тогда имеет место

Следствие. Пусть X — слабо полное банахово пространство, $C \in B(X)$ есть спектральный оператор скалярного типа, а для операторов $H, K \in B(X)$ имеют место условия $\sup \|e^{ip(H)}\| : p \in R_H[t] < \infty$, $\sup \|e^{ip(K)}\| : p \in R_K[t] < \infty$. Тогда уравнение $HU - UK = C$ разрешимо в алгебре $B(X)$ тогда и только тогда, когда операторные матрицы $\begin{bmatrix} H, 0 \\ 0, K \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} H, C \\ 0, K \end{bmatrix}$ подобны друг другу.

Доказательство. Из условия следствия (см. [9]) получаем, что операторы H, K — спектральные операторы скалярного типа, у которых $\sigma(H), \sigma(K) \subset R^1$. Остается применить теорему 2.

Пусть оператор $T \in B(X)$ — разложимый оператор, т. е. $T = H + iK$, где $H, K \in B(X)$ — эрмитовы операторы и $[\cdot, \cdot]$ — полускалярное произведение в X , которое совместно с исходной нормой на X (см. [10]), тогда в прямой сумме $X \oplus X$ можно задать полускалярное

произведение $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] = [x_1, x_2] + [y_1, y_2]$, которое совместимо с нормой в $X \oplus X$. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 2. Пусть операторы $T_{pq} \in B(X)$ есть разложимые операторы, т. е. $T_{pq} = H_{pq} + iK_{pq}$ и H_{pq}^l, K_{pq}^l , где $l = 1, 2$; $p, q = 1, 2$ — эрмитовы операторы. Если операторная матрица

$$T = \begin{bmatrix} T_{11}, T_{12} \\ T_{21}, T_{22} \end{bmatrix} \in B^{-1}(X \oplus X), \text{ то } T_{21} T_{21}^+ + T_{22} T_{22}^+ \in B^{-1}(X).$$

Доказательство. Рассмотрим операторную матрицу

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^+ & T_{21}^+ \\ T_{12}^+ & T_{22}^+ \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T_{11}T_{11}^+ + T_{12}T_{12}^+ & T_{11}T_{21}^+ + T_{12}T_{22}^+ \\ T_{21}T_{11}^+ + T_{22}T_{12}^+ & T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+ \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

которая обратима в алгебре $B(X \oplus X)$. Так как

$$T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+ = H_{21}^2 + K_{21}^2 + k_{22}^2 + H_{22}^2 + i[K_{21}, H_{21}] + i[K_{22}, H_{22}]$$

и операторы $H_{pq}^2, K_{pq}^2, i[K_{pq}, H_{pq}]$ — эрмитовы операторы, то оператор $T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+$ — эрмитов оператор. Поэтому спектр оператора $T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+$ совпадает с его аппроксимативным спектром. Для доказательства обратимости оператора $T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+$ достаточно показать, что $0 \notin \sigma(T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+)$. Пусть наоборот, тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ с $\|x_n\| = 1$ такая, что $\|(T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+)x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но с другой стороны

$$W \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_{11}T_{21}^+ + T_{12}T_{22}^+)x_n \\ (T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+)x_n \end{pmatrix},$$

откуда

$$\left\| W \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \|(T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+)x_n, x_n\|.$$

Но так как $\|(T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+)x_n, x_n\| \leq \|(T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+)x_n\|$ и при $n \rightarrow \infty, \|(T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+)x_n\| \rightarrow 0$, то это противоречит обратимости оператора W . Таким образом, оператор $T_{21}T_{21}^+ + T_{22}T_{22}^+$ полуограничен снизу и эрмитов, поэтому обратим в алгебре $B(X)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. Пусть B, D, C — ограниченные линейные (спектральные операторы скалярного типа, действующие в слабо полном (в частности, рефлексивном) банаховом пространстве X . Тогда уравнение $B Y - Y D = C$ имеет решение $X \in B(X)$ тогда и только тогда, когда операторные матрицы $\begin{bmatrix} B, 0 \\ 0, D \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B, C \\ 0, D \end{bmatrix}$ подобны друг другу.

Доказательство. Как и выше необходимость следует из тождества

$$\begin{bmatrix} I, -Y \\ 0, I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B, 0 \\ 0, D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I, Y \\ 0, I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B, BY - YD \\ 0, D \end{bmatrix}.$$

Обратно, пусть операторные матрицы $\begin{bmatrix} B, 0 \\ 0, D \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B, C \\ 0, D \end{bmatrix}$ подобны друг другу, т. е. существует обратимая операторная матрица $\begin{bmatrix} Q, K \\ S, I \end{bmatrix}$ у которых компоненты суть спектральные операторы скалярного типа, как в лемме 2, для которой

$$\begin{bmatrix} Q, R \\ S, T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B, 0 \\ 0, D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B, C \\ 0, D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q, R \\ S, T \end{bmatrix}.$$

Тогда $QB - BQ = CS$, $RD - BR = CT$, $SB = DS$, $TD = DT$. Используя теорему Фуганда—Путнама (см. [11]) имеем, что $SB^+ = D^+S$, $TD^+ = D^+T$, откуда $BS^+ = S^+D$ и $DT^+ = T^+D$. Кроме того, так как $DSS^+ = SBS^+ = SS^+D$ и $DTT^+ = TDT^+ = TT^+D$, то $(SS^+ + TT^+)D = D(SS^+ + TT^+)$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} C(SS^+ + TT^+) &= (QB - BQ)S^+ + (RD - AR)T^+ = \\ &= (QBS^+ + RDT^+) - (BQS^+ + BRT^+) = \\ &= (QS^+ + RT^+)D - B(QS^+ + RT^+). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C &= B \{ - (QS^+ + RT^+) (SS^+ + TT^+)^{-1} \} - \\ &- \{ - (QS^+ + RT^+) (SS^+ + TT^+)^{-1} \} D. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 7.IX. 1988

Մ. Ի. ԿԱՐԱՆԻԱՆԻԱՆ. $HY - YK = C$ օպերատորային հավասարման մասին (ամփոփում)

Հորվածում $HY - YK = C$ օպերատորային հավասարման համար, որտեղ H, K, C սկալյար տիպի սպեկտրալ օպերատորներ են գործող X թույլ լրիվ (մասնավորապես ռեֆլեկսիվ) բանախան տարածությունում, ապացուցված են լուծելիության որոշ լավանդիչներ: Մասնավորապես ապացուցված է, որ $HY - YK = C$ օպերատորային հավասարման լուծելիությունը համարժեք է

$$\begin{bmatrix} H, 0 \\ 0, K \end{bmatrix} \text{ և } \begin{bmatrix} H, C \\ 0, K \end{bmatrix} \text{ օպերատորային մատրիցների նմանությունի:$$

M. I. KARAHANIAN. On the $HY - YK = C$ operator equation (summary)

For the operator equation $HY - YK = C$, where H, K, C are scalar type spectral operators defined on weakly full (in particular reflexive) Banach space X , some solubility criterions are proved. In particular it is proved that $HY - YK = C$ operator equation solubility is equivalent to $\begin{bmatrix} H, 0 \\ 0, K \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} H, C \\ 0, K \end{bmatrix}$ operator matrix similarity.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы, Спектральные операторы, т. 3, М., Мир, 1974.
2. M. Rosenblum. The operator equation $BX - XA = Q$ with selfadjoint A and B ; Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 20, № 1, 115-120.
3. A. Shwetsberg. The operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B ; Pacif. J. Math., 1982, 102, № 2. 447-453.
4. E. Berkson. Semi-groups of Scalar type operators and a theorem of Stone, Illinois Jour. of Math., 1966, 10, № 2.

5. К. Исидра. Функциональный анализ, М., Мир, 1967.
6. С. Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., Наука, 1967.
7. В. Э. Кармельсон. в сб. Математические исследования, Казань, 1970, т. 5, в. 3, 186—189.
8. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., Наука, 1970.
9. S. A. Kitovovitz. Jordan decomposition for operators in Banach space. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, № 71, 841—893.
10. G. Lumer. Semi-inner product Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 100, 29—43.
11. Е. А. Горин, М. И. Караханян. Асимптотический вариант теоремы Фуганда-Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр. Мат. заметки, 1977, 22, № 2, 179—188.