ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 519.212.3

В. Р. ФАТАЛОВ

ИНТЕНСИВНОСТИ ПРОРЕЖЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ПУАССОНОВСКИМ ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССОМ НА ПЛОСКОСТИ

В последнее время большой интерес проявляется к изучению статистических свойств конечных подмножеств реализаций стохастических процессов геометрических элементов в R^n. Предполагается, что процесс подмножеств можно описать как трансляционно-инвариантный т. н. маркированный точечный процесс конечной интенсивности (см., например, [1, 2]). Первые результаты в этом направлении были получены недавно Р. В. Амбарцумяном, [3, 4] и его учениками, [5, 6].

Перейдем к постановке задачи, рассматриваемой в этой статье.

Обозначим через M_2 группу евклидовых движений плоскости. Пусть на плоскости заданы независимые M_2-инвариантный пуассоновский точечный процесс Φ_1 интенсивности λ и M_2-инвариантный пуассоновский процесс прямых Φ_2 интенсивности μ (необходимые определения можно найти в [1]). Пусть Φ — суперпозиция процессов Φ_1 и Φ_2 и, следовательно, также M_2-инвариантный процесс. Нас интересует процесс $T_{k,l}$ треугольников $P_iP_jP_s$, порожденный процессом Φ и определяемый следующим образом:

(а) каждая вершина P_q принадлежит реализации процесса Φ_1;

(б) внутри треугольника $P_iP_jP_s$ находится ровно $k > 0$ точек из процесса Φ_1;

(в) треугольник $P_iP_jP_s$ пересекают ровно $l > 0$ прямых из процесса Φ_2.

Важной задачей является вычисление распределения типичного треугольника процесса $T_{k,l}$. Нам однако удалось найти только интенсивность процесса $T_{k,l}$. Для ее нахождения будем придерживаться следующей схемы. Будем задавать треугольники Δ на плоскости следующим образом: $\Delta = (M, S, \sigma)$, где $M \in M_2$ задает положение треуголоника, S — его площадь, σ — его форма. Периметр треугольника Δ обозначим через H.

Рассмотрим множество всех треугольников, «натянутых» на Φ_1:

$$\{P_iP_jP_s\} = \{M_\alpha, S_\alpha, \sigma_\alpha\}, \tag{1}$$

где индекс α соответствует тройке $\{i, j, s\}$. Произведем прореживание множества (1) согласно требованиям (б), (в). Именно, выбросим все те тройки $\Delta_\alpha = (M_\alpha, S_\alpha, \sigma_\alpha)$, для которых нарушено хотя бы одно из условий (б), (в). Множество оставшихся треугольников обозначим через

$$\{M_\kappa,\ S_\kappa,\ \sigma_\kappa\}_{k,\,l}. \tag{2}$$

Это есть маркированный точечный процесс на группе M_2. Согласно общей теореме факторизации (см. [4]) первая моментная мера процесса (2) имеет вид

$$dM\ \nu_\sigma(dS)\, m(d\sigma),$$

где dM — кинематическая мера на плоскости,

$$\nu_\sigma(dS) = (\lambda S)^k (k!)^{-1} e^{-\lambda S} (\mu H)^l (l!)^{-1} e^{-\mu H}\, 2\, SdS$$

— мера в пространстве размеров, множитель $2\,SdS$ возникает в результате факторизации „по площади", см. (1.1) из [4], оставшийся множитель — следствие условий (б) и (в), индекс σ у ν_σ указывает на зависимость H от σ, $H = H(S,\ \sigma)$; $m(d\sigma)$ — мера в пространстве $\sum = (0,\ \pi) \times (0,\ \pi)$ треугольных форм на плоскости, которая в данном случае имеет вид (вновь отсылаем читателя к формуле (1.1) из [4]):

$$m(d\sigma) = (\sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin(\psi_1+\psi_2))^{-1}\, d\psi_1 d\psi_2,\quad \sigma = (\psi_1,\ \psi_2),$$

ψ_1, ψ_2 — внутренние углы треугольника.

Следовательно, после интегрирования по dM интенсивность точечного процесса центров тяжести треугольников из прореженного процесса (2) имеет вид

$$J_{k,\,l} = J_{k,\,l}(\lambda,\ \mu) = 2\pi \int_0^\infty \int_\Sigma \nu_\sigma(dS)\, m(d\sigma).$$

Численные значения интенсивностей $J_{k,\,l}(\lambda,\ \mu)$ при разных k, l, λ, μ могут быть полезны для статистических целей при проверке гипотезы о пуассоновости точечного множества на плоскости. В настоящей работе получено более удобное для расчетов представление интеграла $J_{k,\,l}$ в виде одномерного интеграла от специальных функций, приводится также таблица значений $J_{k,\,l}$, вычисленных на основе этого представления. Сформулируем наш основной результат.

Для любых λ, $\mu > 0$, k, $l = 0, 1, \cdots$ имеет место следующее тождество

$$J_{k,\,l} = 2^{l/2-k+2} 3^{3l/4-3/2} \pi (2k+l+3)!\, (k!\, l!)^{-1} \lambda^{-(l/2+2)}\,.$$

$$\cdot \mu^l \int_0^\pi \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-l/2} \exp\left\{\frac{\mu^2 h^2(\alpha)}{8\lambda}\right\} D_{-(2k+l+4)}\left(\frac{\mu h(\alpha)}{\sqrt{2\lambda}}\right)\cdot \tag{3}$$

$$\cdot((a-c)\,b)^{-1/2}\left(\left(\frac{3}{c}-\frac{3}{a}\right)E(q) + \left(\frac{3}{a}-1\right)K(q)\right) d\alpha,$$

где $h(\alpha) = 2(27)^{1/4}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^{-1/2}$,

$$D_{-n}(x) = ((n-1)!)^{-1} \exp\{-x^2/4\} \int_0^\infty \exp\{-xt - t^2/2\}\, t^{n-1}\, dt,\quad n = 1,\ 2, \cdots$$

— функция параболического цилиндра,

$$a = a(\alpha) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + 1\right), \quad b = b(\alpha) = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right),$$

$$c = c(\alpha) = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + 1\right), \quad q = q(\alpha) = \sqrt{(b-c)\,a\,((a-c)\,b)^{-1}},$$

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} (1 - q^2 \sin^2 x)^{-1/2}\,dx, \quad E(q) = \int_0^{\pi/2} (1 - q^2 \sin^2 x)^{1/2}\,dx$$

— полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

Теоретические сведения о специальных функциях $D_{-n}(x)$, $K(q)$, $E(q)$ и подробные численные таблицы их значений имеются в обстоятельном справочнике [7]. Формула (3) хотя и имеет громоздкий вид, однако проводить по ней численные расчеты довольно просто. Для вычислительных целей укажем следующее асимптотическое равенство. Обозначив произведение коэффициента перед интегралом в (3) на подынтегральную функцию в (3) через $f_{k,l}(\lambda, \mu; \alpha)$, находим с помощью формулы 19.8.1 из [7, с. 498]:

$$\lim_{\alpha \uparrow \pi} f_{k,l}(\lambda, \mu; \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi(l+1)(l+2)(l+3)\mu^{-4}\delta_{k,0}, \tag{4}$$

где $\delta_{0,0} = 1$, $\delta_{k,0} = 0$, $k \neq 0$.

В прилагаемых таблицах интенсивности $J_{k,l}$ вычислены на основании тождества (3) с использованием формулы Симпсона с шагом $\frac{\pi}{8}$ и с учетом равенства (4); приведены значения $J_{k,l}\lambda^2$.

$k \backslash l$	0	1	2	3	4	5	6
0	35,863	104,83	193,49	291,90	399,87	523,70	671,14
1	19.297	68,937	142,10	222.78	291,77	—	—
2	11.697	49,783	117,78	—	—	—	—
3	7.532	—	—	—	—	—	—

1) Случай $\mu/\sqrt{\lambda} = 1/2$.

$k \backslash l$	0	1	2	3	4	5	6
0	3,938	13,499	29,613	48,422	70.877	94,756	119,07
1	1,145	5,145	13,773	27,724	46,619	—	—
2	0,3675	2,117	6,754	—	—	—	—
3	0,1372	—	—	—	—	—	—

2) Случай $\mu/\sqrt{\lambda} = 1$.

$k \backslash l$	0	1	2	3	4	5	6
0	0,3165	1,202	2,830	5,291	8,605	12.710	17,509
1	0,03197	0,1750	0,5537	1,321	2,637	—	—
2	0,004198	0,02959	0,1162	—	—	—	—
3	0,0006631	—	—	—	—	—	—

3) Случай $\mu/\sqrt{\lambda} = 2$.

Доказательство тождества (3). Основная идея вычисления интеграла $J_{k,l}$ заключается в использовании связи между площадью S треугольника Δ, периметром H и его внутренними углами ψ_1, ψ_2. Именно, введем величину

$$h = h(\psi_1, \psi_2) = \frac{H}{\sqrt{S}} = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{\psi_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\psi_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{2}(\sin\psi_1 + \sin\psi_2 + \sin(\psi_1+\psi_2))(\sin\psi_1\sin\psi_2\sin(\psi_1+\psi_2))^{-1/2}. \tag{5}$$

Тогда по теореме Фубини будем иметь

$$J_{k,l} = 8\pi\frac{\lambda^k\mu^l}{k!\,l!}\int\limits_D(\sin\psi_1\sin\psi_2\sin(\psi_1+\psi_2))^{-1}h^l(\psi_1,\psi_2)\times$$
$$\times\,\theta_{k,l}(h(\psi_1,\psi_2))\,d\psi_1 d\psi_2, \tag{6}$$

где обозначено $D = \{(\psi_1, \psi_2) : 0 < \psi_1 \leqslant \pi,\ 0 < \psi_2 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \psi_1 + \psi_2 \leqslant \pi\}$,

$$\theta_{k,l}(h) = \int\limits_0^\infty S^{k+l/2+1}\exp\{-\lambda S - \mu h\sqrt{S}\}\,dS. \tag{7}$$

Интеграл $\theta_{k,l}$ легко выражается через функцию параболического цилиндра (см № 2.3.15 из книги [8, с. 343]):

$$\theta_{k,l}(h) = 2(2k+l+3)!\,(2\lambda)^{-(k+l/2+2)}\exp\left\{\frac{\mu^2h^2}{8\lambda}\right\}D_{-(2k+l+4)}\left(\frac{\mu h}{\sqrt{2\lambda}}\right). \tag{8}$$

Дальнейшее доказательство основано на использовании в качестве независимой переменной интегрирования величины $h = h(\psi_1, \psi_2)$. Эта замена переменных осуществляется в несколько этапов. Сначала естественно в интеграле (6) перейти к новым переменным интегрирования $u = \operatorname{tg}\frac{\psi_1}{2}$, $v = \operatorname{tg}\frac{\psi_2}{2}$. Обозначив для краткости $I_{k,l} = k!\,l!\,(8\pi\lambda^k\mu^l)^{-1}J_{k,l}$ в силу (5) тогда будем иметь $h(u, v) = 2\,((u+v)(uv(1-uv))^{-1})^{1/2}$,

$$I_{k,l} = \iint\limits_{\{(u,v):0<uv<1\}}(1/8 + 2u^{-2}v^{-2}h^{-4}(u,v))\,h^{l+2}(u,v)\,\theta_{k,l}(h(u,v))\,du\,dv. \tag{9}$$

В этом интеграле сделаем следующую замену переменных:

$$z = u + v,\quad t = uv. \tag{10}$$

Якобиан перехода равен $\frac{1}{2}(z^2/4 - t)^{-1/2}$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим ($z \geqslant 2\sqrt{t}$), симметричность по u и v подынтегральной функции и области интегрирования в (9) в результате замены (10), имеем

$$I_{k,l}=2\int_0^1 dt\int_{2\sqrt{t}}^{\infty}dz\,(1/16+t^{-2}h^{-4}(z,t))\,\frac{h^{l+2}(z,t)\theta_{k,l}(h(z,t))}{(z^2/4-t)^{1/2}}. \tag{11}$$

где $h(z, t)=2\,(z\,(t\,(1-t))^{-1})^{1/2}$.

Наконец, перейдем во внутреннем интеграле в (11) от z к новой переменной $h=h(z, t)$. Получим $y(t)=(8\,(\sqrt{t}\,(1-t))^{-1})^{1/2}$:

$$I_{k,l}=\int_0^1 dt\int_{y(t)}^{\infty}dh\left\{(1/16+t^{-2}h^{-4})\,\frac{h^{l+3}\sqrt{t}\,(1-t)\,\theta_{k,l}(h)}{(h^4t\,(1-t)^2/64-1)^{1/2}}\right\}. \tag{12}$$

Обозначим выражение в фигурных скобках в (12) через $\varphi(t, h)$. Сейчас наша цель — поменять порядок интегрирования в (12) и затем провести интегрирование по t. Чтобы выполнить первое нужно найти обратную функцию для $h=y(t)$, т. е. выразить t через h, $0\leqslant t\leqslant 1$. Имеем кубичное уравнение в области $t\in[0, 1]$:

$$t^3-2t^2+t-\frac{64}{h^4}=0. \tag{13}$$

Так как для этого уравнения дискриминант $Q=64h^{-4}(16h^{-4}-1/27)<0$, то имеем т. н. неприводимый случай, для которого используется тригонометрическое решение (см. § 1.8 из [9, с. 44]):

$$\begin{aligned} a&=a(h)=\frac{2}{3}\left(1+\cos\frac{\alpha}{3}\right)\in\left[1, \frac{4}{3}\right], \\ b&=b(h)=\frac{2}{3}\left(1+\cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\in\left[\frac{1}{3}, 1\right], \\ c&=c(h)=\frac{2}{3}\left(1+\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\in\left[0, \frac{1}{3}\right], \end{aligned} \tag{14}$$

где $\alpha=\alpha(h)=\arccos(864h^{-4}-1)$.

По теореме Виета имеют место следующие соотношения:

$$a+b+c=2,\ ab+ac+bc=1,\ abc=64h^{-4}. \tag{15}$$

Из трех решений (14) первое $a(h)$ не входит в область допустимых значений $0\leqslant t\leqslant 1$. Учитывая, что функция $y(t)$ при $0<t\leqslant\frac{1}{3}$ монотонно убывает от $+\infty$ до $2\sqrt[4]{27}$, а при $\frac{1}{3}<t<1$ монотонно возрастает от $2\sqrt[4]{27}$ до $+\infty$, заключаем, что на каждом из этих отрезков обратная к $y(t)$ функция состоит из однозначных ветвей — $c(h)$ и $b(h)$ соответственно. Следовательно, имеем для интеграла (12)

$$I_{k,l}=\int_0^{1/3}dt\int_{y(t)}^{\infty}\varphi(t,h)\,dh+\int_{1/3}^{1}dt\int_{y(t)}^{\infty}\varphi(t,h)\,dh=\int_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty}dh\int_{c(h)}^{1/3}\varphi(t,h)\,dt+$$

$$+\int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} dh \int\limits_{1/3}^{b(h)} \varphi(t, h)\,dt = \int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} dt \int\limits_{c(h)}^{b(h)} \varphi(t, h)\,dt. \tag{16}$$

Вспоминая вид функции $\varphi(t, h)$ с учетом найденных корней (14) уравнения (13) последнее выражение в (16) можем записать в виде

$$I_{k,l} = \int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} dh\, h^{l+1}\,\theta_{k,l}(h) \int\limits_{c(h)}^{b(h)} \frac{1}{2}(1+16\,t^{-2}h^{-4})\frac{(t^{1/2}-t^{3/2})\,dt}{((t-c)(b-t)(a-t))^{1/2}}. \tag{17}$$

Займемся теперь вычислением внутреннего интеграла в (17), который мы обозначим через B:

$$B = B(h) = \frac{1}{2}\int\limits_{c}^{b}(1+16\,t^{-2}h^{-4})\frac{t^{1/2}-t^{3/2}}{((t-c)(b-t)(a-t))^{1/2}}\,dt.$$

Выражение B можно представить в виде линейной комбинации нормальных эллиптических интегралов. Введем следующие обозначения:

$$B_n = B_n(h) = \int\limits_{c}^{b} t^n\,(t(t-c)(t-b)(t-a))^{-1/2}\,dt,\quad n = -1, 0, 1, 2.$$

Тогда легко проверить, что

$$B = \frac{1}{2}(B_1 - B_2) + 8\,h^{-4}(B_{-1} - B_0).$$

Используя формулу (21.6—22) из справочника [9, с. 751], получаем равенство

$$B_2 = B_1 - 32\,h^{-4}B_{-1}.$$

Следовательно

$$B = 8\,h^{-4}(3\,B_{-1} - B_0)$$

и, подставляя это значение B в (17), имеем

$$I_{k,l} = 8\int\limits_{2\sqrt[4]{27}}^{\infty} h^{l-3}\,\theta_{k,l}(h)\,(3\,B_{-1}(h) - B_0(h))\,dh. \tag{18}$$

Интегралы B_{-1}, B_0 легко выражаются через нормальные эллиптические интегралы. Проведя соответствующие вычисления по формулам 1.2.36.1 и 1.2.36.3 из справочника [8, с. 78], учитывая (15) и тождество (см. формулу 17.7.24 из [7, с. 415])

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, q^2, q\right) = (1-q^2)^{-1}E(q)$$

(здесь $\prod\left(\frac{\pi}{2}, p, q\right)=\int\limits_0^{\pi/2}(1-p\sin^2 x)^{-1}(1-q^2\sin^2 x)^{-1/2}\,dx$ — полный эллиптический интеграл третьего рода, получаем

$$3B_{-1}(h)-B_0(h)=2((a-c)\,b)^{-1/2}\left(\left(\frac{3}{c}-\frac{3}{a}\right)E(q)+\left(\frac{3}{a}-1\right)K(q)\right),$$

где $q=((b-c)\,a\,((a-c)\,b)^{-1})^{1/2}$.

Подставляя найденное значение в (18) и произведя затем замену переменной $\alpha=\arccos(864\,h^{-1}-1)$, получим с учетом (8) формулу (3).

Относительно интенсивностей $J_{k,l}$ $(\lambda,\ \mu)$ справедливо следующее утверждение, выявляющее в некоторой степени роль условий (6) и (в) прореживания

Утверждение. *При любых* $\lambda,\ \mu>0,\ l=0,1,2,\cdots$ *имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_{k,l}=\frac{2}{21}\pi^2(l+1)(l+2)(l+3)\,\mu^{-4}; \tag{19}$$

при любых $\lambda,\ \mu>0,\ k=0,1,2,\cdots$ справедливо

$$\sum_{l=0}^{\infty} J_{k,l}=+\infty. \tag{20}$$

Доказательство. Для доказательства (19) изменим порядок интегрирования в формуле (18), как это было сделано в аналогичной ситуации при доказательстве тождества (3), в результате получим

$$J_{k,l}=\frac{8\pi\lambda^k\mu^l}{k!\,l!}\int\limits_0^1 dt\,\frac{3-t}{t\sqrt{t}}\int\limits_{y(t)}^{\infty} h^{l-1}\,\theta_{k,l}(h)\,(t(1-t)^2h^4/64-1)^{-1/2}\,dh. \tag{21}$$

Все члены выписанных ниже рядов неотрицательны, поэтому теорема Лебега о монотонной сходимости позволяет менять порядок суммирования и интегрирования. Учитывая это и пользуясь интегральным представлением $\theta_{k,l}(h)$ в (7) легко найти сумму ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\mu^l(k!\,l!)^{-1}\,\theta_{k,l}(h)=2(l+1)(l+2)(l+3)\,\mu^{-4}h^{-(l+4)}.$$

Следовательно, в силу (21) для установления справедливости (19) осталось вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^1 dt\,\frac{3-t}{t\sqrt{t}}\int\limits_{y(t)}^{\infty}(t(1-t)^2h^4/64-1)^{-1/2}\,h^{-5}\,dh.$$

Сделаем это. Во внутреннем интеграле произведем замену переменной $x=p(t)\,h^4$, где обозначено $p(t)=t(1-t)^2/64$. Тогда I будет равен произведению двух интегралов:

$$I=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(3-t)\,t^{-3/2}p(t)\,dt\int\limits_1^{\infty}x^{-2}(x-1)^{-1/2}\,dx.$$

Несложный подсчет дает (формулы 855.31, 855.41 из [10, с. 182, 183]):

$$\frac{1}{4}\int_0^1 (3-t)\,t^{-3/2}\,p(t)\,dt=\frac{1}{84},\quad \int_1^\infty x^{-2}(x-1)^{-1/2}dx=\frac{\pi}{2}\cdot$$

Следовательно, $I=\pi/168$ и формула (19) доказана.

Для проверки (20) используем непосредственно выражение для интенсивностей, приведенное перед тождеством (3); по теореме Лебега о монотонной сходимости имеем, $D=\{(\psi_1,\psi_2): 0\leqslant\psi_i\leqslant\pi,\ i=1,2,\ 0\leqslant\psi_1+\psi_2\leqslant\pi\}$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} J_{k,l}=8\pi\lambda^{-2}(k+1)\int_D(\sin\psi_1\sin\psi_2\sin(\psi_1+\psi_2))^{-1}d\psi_1d\psi_2=+\infty,$$

расходимость последнего интеграла и связанные с ним вопросы подробно исследованы в работе [6]. Утверждение доказано.

Отметим, что равенство (19) можно получить другим способом. Использование выражений (6), (7) дает нам

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_{k,l}=4\pi(l+1)(l+2)(l+3)\mu^{-4}\int_D\sin\psi_1\sin\psi_2\sin(\psi_1+\psi_2)\cdot$$

$$\cdot(\sin\psi_1+\sin\psi_2+\sin(\psi_1+\psi_2))^{-4}d\psi_1d\psi_2=\frac{2}{21}\pi^2(l+1)(l+2)(l+3)\mu^{-4},$$

значение последнего интеграла разными способами найдено в [5, 11], где обсуждаются также иные ситуации его появления (в содержательной работе [11] — в рамках общей теории шейпов в евклидовых пространствах, построенной Д. Кендаллом).

В заключение обсудим возможность применения метода Монте-Карло для вычисления интенсивностей $J_{k,l}(\lambda,\mu)$. Автором совместно с Шекян Э. составлена и апробирована на микро-ЭВМ типа «Электроника» программа на языке «ФОРТРАН-4» для статистического моделирования реализаций составного процесса Ф. По заданным параметрам λ, μ моделировалось ([1]) K точек и L прямых в круге радиуса R_1 и подсчитывалось число N треугольников, удовлетворяющих условиям (а)—(в) (при заданных k, l), центры тяжести которых попали в круг меньшего радиуса $R_2<R_1$. Число $N/(\pi R_2^2)$ дает значение искомой интенсивности. Однако, перебор всех возможных треугольников (а их число — C^{3k}), подсчет числа точек, попавших в фиксированный треугольник и числа прямых его пересекающих требует при достаточно больших (репрезентативных) K, U для единичной реализации программы на микро-ЭВМ машинного времени около часа. Соответственно, проведение большого числа испытаний, порядка нескольких десятчов (как того требует метод Монте-Карло) затруднено — это, помимо всего прочего, повышает значение тождества (3) для вычислительных целей. Результаты статистического моделирования будут опубликованы в другом месте.

Автор выражает благодарность Р. В. Амбарцумяну за постановку задачи и внимание к работе, а также Г. Сукиасяну, В. Оганяну и рецензенту за полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24. XII. 1987

Վ. Ռ. ՖԱՏԱԼՈՎ. Հարթության վրա կետային պուասոնյան պրոցեսով ծնված եռանկյունների նոսրացված պրոցեսների ինտենսիվությունները *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է M_2 ինվարիանտ պուասոնյան Φ_1 կետային և Φ_2 ուղիղների պրոցեսների համադրությունը, որտեղ M_2-ը էվկլիդյան շարժումների խումբն է հարթության վրա։ Սահմանենք եռանկյունների $T_{k,l} = \{P_i P_j P_s\}$ պրոցեսը հետևյալ կերպ.

ա) յուրաքանչյուր P_q գագաթ պատկանում է Φ_1 պրոցեսի իրագործման,

բ) Φ_1 պրոցեսի k հատ կետեր, $k > 0$, գտնվում են $P_i P_j P_s$ եռանկյան ներսում,

գ) Φ_2 պրոցեսի l հատ ուղիղներ, $l > 0$, հատում են $P_i P_j P_s$ եռանկյունը։

$T_{k,l}$ պրոցեսի ինտենսիվությունը հաշվելու համար ստացված է երեք հատուկ ֆունկցիաներից բաղկացած, մի չափանի ինտեգրալի տեսքով բանաձև։

Ստացված բանաձևի հիման վրա բերված են նաև թվային աղյուսակներ։

V. R. FATALOV. *The intensities of thinned triangle processes generated by the Poisson points process on the plane* (summary)

The superposition of M_2 — invariant Poisson point process Φ_1 and M_2 invarian Poisson line process Φ_2 on the plane is considered, where M_2 is the group of euclidean motions of the plane. Define the triangle process $T_{k,l} = \{P_i P_j P_s\}$ as follows:

(a) every vertex P_q belongs to realization of Φ_1;

(b) exactly $k > 0$ points from Φ_1 lie inside the triangle $P_i P_j P_s$:

(c) exactly $l > 0$ lines from Φ_2 intersect the triangle $P_i P_j P_s$.

The $T_{k,l}$ process intensity is expressed as one-dimensional integral of specia functions. A numerical table based of this formula is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. Stoyan, W. S. Kendall, J. Mecke*, Stochastic geometry and its application Akademie—Verlag, Berlin and Wiley, N. Y., 1986.
2. *P. Franken, D. Konig, U. Arndt, V. Schmidt*. Queues and Point Processes, Akademie—Verlag, Berlin and Wiley, Chichester, 1982,
3. *R. V. Ambartzumian*. Random shapes by factorization, Statistics in theory and practice, Essays in honour of B. Matern, Umea, Sweden, 1982. 35—41.
4. *R. V. Ambartzumian*. Factorization on integral and stochastic geometry, Teubner—texte zur mathematik, 1984, Band 65, Leipzig, 14—33.
5. *В. К. Оганян*. О формах треугольников, образованных точками пуассоновского процесса на плоскости, ДАН АрмССР, т. 81, № 2, 1985, 59—63.
6. *H. S. Sukiasian*. Two results on triangle shapes, Teubner—texte zur mathematikt 1984, Band 65, Leipzig, 210—222.
7. Справочник по специальным функциям (под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган), М., Наука, 1979.
8. *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*. Интегралы и ряды. Элементарные функции, М., Наука, 1981.
9. *Г. Корн, Т. Корн*. Справочник по математике, М., Наука, 1977.
10. *Г. Б. Двайт*. Таблицы интегралов, М., Наука, 1978.
11. *D. G. Kendall*. Shape manifolds, Procrustean metrics and complex projective spaces, Bull. London Math. Soc., 1984, v. 16, 81—121.