ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մաթեմատիկա XXV, № 4, 1990 Математика

УДК 517.547

А. О. КАРАПЕТЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

§ 0. Введение

0.1. Известный результат Винера и Пэли [1] (см. также [2]) гласит, что класс Харди H^2 в правой полуплоскости, состоящий из тех голоморфных функций $f(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$, для которых

$$\sup_{x>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2\,dy\right\}<+\infty, \tag{0.1}$$

допускает параметрическое интегральное представление вида

$$f(z)=\int_0^{+\infty}F(t)\cdot e^{-zt}\,dt,\ \operatorname{Re} z>0, \tag{0.2}$$

где функция $F(t)\in L^2(0,+\infty)$ произвольна.

В дальнейшем в работах ряда авторов (см., например, [3], [4]) были приведены различные обобщения этого результата, не выходящие, однако, за рамки идей и методов монографии [1]. В то же время в исследованиях М. М. Джрбашяна, подытоженных в его монографии [5], была развита теория гармонического анализа и интегральных преобразований в комплексной области. На ее основе в работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [6] и в монографии [5] были получены существенно новые интегральные представления типа Винера—Пэли посредством ядер типа Миттаг—Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}. \tag{0.3}$$

Речь идет об интегральных представлениях (см. [5], теоремы 7.7, 7.7′, 7.8), установленных для классов $H_2[\alpha;\omega]$ $(1/2<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1)$. Эти классы состоят из функций $f(z)$, голоморфных в области угла

$$\Delta_\alpha=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<+\infty,\ |\arg z|<\pi/2\alpha\} \tag{0.4}$$

и подчиненных условию вида

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2\alpha}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^2\cdot r^{\omega}\,dr\right\}<+\infty. \tag{0.5}$$

0.2. Одновременно с указанными работами велись исследования с целью обобщения теоремы Винера—Пэли на случай многих комплексных переменных. Для ознакомления с результатами, полученными в этом направлении, необходимо ввести ряд обозначений и понятий.

Пусть $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ обозначают n-мерные координатные пространства, соответственно, комплексных и действительных чисел, причем $\mathbf{R}^n$ будет рассматриваться как вполне вещественное подпространство в $\mathbf{C}^n$. Каждое $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ можно записать в виде

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = x + iy, \tag{0.6}$$

где $\operatorname{Re} z = x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\operatorname{Im} z = y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, причем $z_k = x_k + iy_k (1 \leqslant k \leqslant n)$. Для произвольного $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ положим $\bar{z} = (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n) \in \mathbf{C}^n$, и тогда легко видеть, что если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$ вводится обычным образом:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \bar{w}_k, \tag{0.7}$$

где $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ и $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbf{C}^n$.

Если $z = x + iy \in \mathbf{C}^n$ $(x, y \in \mathbf{R}^n)$, то через $dm(z) = dxdy$ будет обозначаться $2n$-мерная мера Лебега в пространстве $\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$, где dx, dy — элементы объема в $\mathbf{R}^n$.

Далее, для произвольного множества $E \subset \mathbf{R}^n$ положим

$$T_E = \{z = x + iy \in \mathbf{C}^n : x \in \mathbf{R}^n,\ y \in E\}. \tag{0.8}$$

Трубчатой областью в $\mathbf{C}^n$ с основанием $B \subset \mathbf{R}^n$ (где B — открытое связное множество) называется область вида $T_B \subset \mathbf{C}^n$.

Множество $V \subset \mathbf{R}^n$ называется открытым выпуклым конусом (ОВК), если оно открыто в эвклидовой топологии пространства $\mathbf{R}^n$, выпукло и к тому же является конусом, то есть из $x = (x_1, \cdots, x_n) \in V$ и $\lambda \in (0, +\infty)$ следует, что $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \cdots, \lambda \cdot x_n) \in V$. Конус $V \in \mathbf{R}^n$ называется острым, если в нем не содержится целиком ни одной прямой пространства $\mathbf{R}^n$. Наконец, отметим, что для произвольного ОВК $V \subset \mathbf{R}^n$ сопряженным конусом называется множество

$$V^* = \{y \in \mathbf{R}^n : \langle y, v \rangle \geqslant 0 \text{ при всех } v \in V\}. \tag{0.9}$$

В работе [7] С. Бохнер установил многомерный аналог параметрического интегрального представления (0.2) для класса функций, голоморфных в трубчатой области $T_V \subset \mathbf{C}^n$ и подчиненных условию вида

$$\sup_{y \in V} \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f(x + iy)|^2 \, dx \right\} < +\infty, \tag{0.10}$$

где V — произвольный острый ОВК в $\mathbf{R}^n$.

В дальнейшем оказалось, что теорема Винера-Пэли может быть перенесена на случай многомерных областей, более общих по сравнению с трубчатыми. Речь идет об областях Зигеля, имеющих вид

$$D=\{\eta=(z,\ u)\in\mathbf{C}^{n+m}:z\in\mathbf{C}^n,\ u\in\mathbf{C}^m,\ \operatorname{Im}z-F(u,u)\in V\},\qquad(0.11)$$

где V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n\ (n\geqslant1)$, а отображение $F:\mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^n\ (m\geqslant0)$ обладает рядом естественных свойств, в силу которых обычно называется V-эрмитовой формой на $\mathbf{C}^m$. Если $n\geqslant1$, но $m=0$ (т. е отображения F попросту нет), D называется областью Зигеля первого рода и, как легко видеть, представляет собой трубчатую область в $\mathbf{C}^n$, в основании которой лежит острый ОВК из $\mathbf{R}^n$.

В работе С. Г. Гиндикина [8] наряду с многочисленными глубокими результатами было получено дальнейшее обобщение теоремы Винера-Пэли, а именно: результат С. Бохнера был распространен на случай областей Зигеля второго рода, т. е. областей вида (0,11) при $n\geqslant1$, $m\geqslant1$. В этой же работе на основе уже установленных интегральных представлений были построены ядра Коши-Сегё для соответствующих классов функций.

0.3. Упомянутые выше исследования, обобщая классический результат Винера-Пэли в различных направлениях, тем не менее касались только пространств голоморфных функций типа Харди. А между тем в уже цитированной работе С. Г. Гиндикина [8] впервые была поставлена и решена задача получения параметрических интегральных представлений типа Винера-Пэли для классов голоморфных в областях Зигеля $D\subset\mathbf{C}^{n+m}$ $(n\geqslant1,\ m\geqslant0)$ функций, квадратично интегрируемых *по всей области D*. Там же на основе полученных представлений были построены воспроизводящие ядра для рассматриваемых классов функций. Следует отметить, что в частном случае, когда $n\geqslant1$, но $m=0$, результат С. Г. Гиндикина устанавливает интегральные представления типа Винера—Пэли для классов квадратично интегрируемых голоморфных функций в трубчатых областях $T_V\subset\mathbf{C}^n$, где V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$.

Указанные результаты работы [8] в дальнейшем были продолжены и обобщены в исследованиях ряда авторов. Прежде, чем дать обзор соответствующих работ, введем новые обозначения.

Пусть $p,\ s\in(0,\ +\infty)$, B — область в $\mathbf{R}^n$ и $\gamma(y)$, $y\in B$ — произвольная непрерывная положительная (т. е. $\gamma(y)>0$ при $y\in B$) функция. Через $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ обозначим пространство всех голоморфных в трубчатой области $T_B\subset\mathbf{C}^n$ функций $f(z)\equiv f(x+iy)$, для которых

$$M^p_{s,\gamma}(f)=\int\limits_B\left\{\int\limits_{\mathbf{R}^n}|f(x+iy)|^p\,dx\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy<+\infty.\qquad(0.12)$$

При $\gamma(y)\equiv1$ $(y\in B)$ пространства $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ нам удобнее будет обозначать просто через $H^p_s(T_B)$.

В работе Генчева [9] были получены интегральные представления типа Винера—Пэли для классов $H^p_s(T_B)$ в случае $n=1$, $B=(0,+\infty)\subset\mathbf{R}$

и при условиях $1 \leqslant p < 2$, $s=1$ или же $1 < p < 2$, $s = 1/(p-1)$. Необходимо отметить, что в наиболее важном случае $p=2$, когда соответствующие интегральные представления являются параметрическими, статья [9] повторяет результат работы [8] С. Г. Гиндикина, да и то для весьма частного случая $n=1$, $m=0$.

Затем в работах М. М. Джрбашяна и В. М. Мартиросяна [10, 11] иными по сравнению с [8] и [9] методами* были получены интегральные представления опять же типа Винера-Пэли для весьма широких классов голоморфных функций одного комплексного переменного, включающих в качестве специального случая пространства $H_s^p(T_B)$ при $n=1$, $B=(a, b) \subset \mathbf{R}\ (-\infty < a < b < +\infty)$ и $1 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$.

Далее, в своих работах [12, 13] Генчев опубликовал аналогичные интегральные представления классов $H_s^p(T_B)$ уже для $n > 1$ и вновь при условиях $1 \leqslant p < 2$, $s=1$ или же $1 < p < 2$, $s = 1/(p-1)$. Однако и они в важном случае $p=2$ явились фактически повторением результатов работы [8] при $n > 1$, $m=0$.

0.4. Как видим, в работах [9]—[13] при установлении интегральных представлений классов $H_{s,\gamma}^p(T_B)$ предполагалось, что $\gamma(y) \equiv 1$, $y \in \bar{B}$. В работах [14, 15] аналогичные результаты были получены в случае произвольной весовой функции $\gamma(y) > 0\ (y \in B)$. В интересах дальнейшего изложения мы приведем точные формулировки некоторых основных результатов (см. [14], а также главу II диссертации [15], в которой приводятся и подробные доказательства). Но прежде введем некоторые обозначения.

Всюду дальше, если не оговорено противное, B будет обозначать некоторую область в пространстве $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 1$, а $\gamma(y)$, $y \in B$ — произвольную непрерывную положительную функцию. При этом используется обозначение:

$$\gamma_B^*(t) \equiv \int_B e^{-\langle y, t \rangle} \cdot \gamma(y)\, dy, \quad t \in \mathbf{R}^n. \tag{0.13}$$

Для функции $f(z) \equiv f(x+iy)$, заданной в трубчатой области $T_B \subset \mathbf{C}^n$, полагаем ($\forall y \in B$):

$$f_y(x) \equiv f(x+iy), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{0.14}$$

Далее, если $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ — некоторая функция, то договоримся обозначать через $\hat{g}$ ее преобразование Фурье (при условии, конечно, что оно определено).

В работах [14, 15] на основе методов, развитых в [10, 11], были установлены следующие основные результаты.

Теорема I. *Пусть* $2 \leqslant p < +\infty$, $q = p/(p-1)$, $0 < s < +\infty$ *и измеримая функция* $F(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$ *удовлетворяет условию вида*

$$\int_B \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q\langle y, t \rangle}\, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty. \tag{0.15}$$

* В своем реферате (Zentralblatt für Math., Vol. 609, 1987, 30039) Генчев необъективно осветил суть метода работы [11].

Тогда функция

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} F(t) \cdot e^{i<z,\,t>}\, dt, \quad z \in T_B, \tag{0.16}$$

принадлежит пространству $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ *и при этом*

$$M^p_{s,\gamma}(f) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2\cdot s\cdot(p-2)}} \cdot \int_B \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\,t>}\, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty. \tag{0.17}$$

Теорема II. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$ *и* $0 < s < +\infty$, *тогда каждая функция* $f \in H^p_{s,\gamma}(T_B)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} F(t) \cdot e^{i<z,\,t>}\, dt, \quad z \in T_B, \tag{0.18}$$

где:

1. *При* $p=1$ *функция* $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, *непрерывна и удовлетворяет условию*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n} \left[|F(t)|^s \cdot \gamma_B^*(s\cdot t) \right] \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2\, s}} \cdot M^1_{s,\gamma}(f) < +\infty. \tag{0.19}$$

2. *При* $1 < p \leqslant 2$ *функция* $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, *измерима и удовлетворяет условию* ($q = p/(p-1)$):

$$\int_B \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\,t>}\, dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2\cdot s(2-p)}} \cdot M^p_{s,\gamma}(f) < +\infty. \tag{0.20}$$

При этом для п. в. $y \in B$ *справедливо равенство*

$$\hat{f}_y(t) = F(t) \cdot e^{-<y,\,t>}, \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{0.21}$$

Кроме того, при $p=2$ *интегральное представление* (0.18) *класса* $H^p_{s,\gamma}(T_B)$ *является к тому же параметрическим, т. е.* $H^2_{s,\gamma}(T_B)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *задаваемых формулой* (0.18), *и при этом выполняется равенство Парсеваля*

$$M^2_{s,\gamma}(f) = \int_B \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^2 \cdot e^{-2<y,\,t>}\, dt \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy. \tag{0.22}$$

На основании теоремы II и методов работы [8] в [14, 15] были построены воспроизводящие ядра для некоторых весовых классов функций, голоморфных в трубчатых областях $T_B \subset \mathbb{C}^n$ с основанием вида

$$B = \left\{ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 > \sum_{k=2}^n y_k^2 \right\}. \tag{0.23}$$

0.5. В настоящей работе устанавливаются интегральные представления типа Винера-Пэли и строятся воспроизводящие ядра для классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, а параметр s и непрерывная положительная функция $\gamma(y)$, $y \in V$, подчинены определенным условиям.

В § 1 устанавливаются некоторые вспомогательные факты. В частности, исследуются свойства функции

$$\gamma_V^*(t)=\int_V e^{-<t,\,y>}\gamma(y)\,dy,\ t\in R^n,\tag{0.24}$$

в зависимости от свойств функции $\gamma(y)$, заданной в конусе V (предложение 1.2).

В § 2 приводится важное уточнение теоремы II в случае, когда основание B рассматриваемой трубчатой области суть острый ОВК в $\mathbf{R}^n$. Тогда оказывается (теорема 2.1), что участвующая в интегральном представлении (0.18) функция $F(t)$ обращается в нуль вне сопряженного конуса V^*, если весовая функция $\gamma(y)$, $y\in V$, удовлетворяет условию

$$\lim_{|y|\to+\infty}\frac{\ln\gamma(y)}{|y|}>0\,(y\in V).\tag{0.25}$$

В § 3, исходя из острого ОВК $V\subset\mathbf{R}^n$ и функции $\gamma(y)$, $y\in V$, удовлетворяющей, помимо (0.25), некоторым дополнительным условиям, строится интегральное ядро по формуле

$$\Phi(z,\ w)=\int_{V^*}\frac{e^{i<z-\bar{w},\,t>}}{\gamma_V^*(2\cdot t)}\,dt,\ z,\ w\in T_V.\tag{0.26}$$

Затем устанавливается основная теорема 3.1, утверждающая, что построенное ядро $\Phi(z,\ w)$ является воспроизводящим для функций класса $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, где $1\leqslant p<2$, а параметр s пробегает определенный промежуток.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность академику АН Армении М. М. Джрбашяну за постановку задач и полезные обсуждения входе выполнения данной работы.

§ 1. Вспомогательные результаты

1.1. Пусть E суть произвольное множество в $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 1)$, договоримся обозначать через $\overline{E}$ и $\mathrm{Int}\,E$, соответственно, замыкание и внутренность E. Далее, напомним, что множество $E\subset\mathbf{R}^n$ называется конусом, если из $y\in E$ и $\lambda\in(0,\ +\infty)$ следует, что $\lambda\cdot y\in E$. Легко проверяется, что если $E\subset\mathbf{R}^n$ есть конус, то и множества $\overline{E}$, $\mathrm{Int}\,E$ являются конусами.

Единичной сферой в пространстве $\mathbf{R}^n$ $(n\geqslant 1)$ называется множество

$$S_n=\left\{y=(y_1,\cdots,\ y_n)\in\mathbf{R}^n:|y|^2=\sum_{k=1}^n y_k^2=1\right\}.\tag{1.1}$$

Поверхностную меру Лебега на сфере S_n будем обозначать через σ_n.

Пусть E — произвольный конус в $\mathbf{R}^n$, тогда обозначим через E_S проекцию множества E на единичную сферу S_n при радиальном проектирования $y \to y/|y|$. Очевидно, что для любого конуса $E \subset \mathbb{R}^n$: $E_S = E \cap S_n$. Поэтому легко проверяются следующие соотношения:

$$\overline{(E_S)} = (\overline{E})_S, \ \operatorname{Int}(E_S) = (\operatorname{Int} E)_S, \tag{1.2}$$

в которых операции замыкания и взятия внутренности справа понимаются относительно эвклидовой топологии $\mathbb{R}^n$, а слева — относительно топологии, индуцированной в S_n из пространства $\mathbb{R}^n$. Из (1.2) следует, что если конус E — открытое (замкнутое) множество в $\mathbb{R}^n$, то E_S является открытым (замкнутым) множеством сферы S_n.

Наконец, для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ при $0 < R < +\infty$ положим

$$E_R = \{y \in E : |y| < R\}. \tag{1.3}$$

1.2. Всюду дальше V будет обозначать открытый выпуклый конус (ОВК) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Выше мы ввели понятие сопряженного конуса V^* (см. § 0, (0.9)), причем легко видеть, что V^* в любом случае является замкнутым выпуклым конусом в $\mathbb{R}^n$. Внутренность конуса V^* обычно будем обозначать через $\operatorname{Int} V^*$, хотя более точным (но не удобным!) было бы обозначение $\operatorname{Int}(V^*)$. Нетрудно проверить, что для произвольного ОВК $V \subset \mathbb{R}^n$ множество $\operatorname{Int} V^*$ либо пусто, либо является ОВК в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Справедливо следующее

Предложение 1.1. (а) *Каждое открытое выпуклое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ канонически открыто, то есть $\operatorname{Int}(\overline{E}) = E$. Каждое замкнутое выпуклое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью канонически замкнуто, то есть $\overline{(\operatorname{Int} E)} = E$.*

б) *Если V — ОВК в $\mathbb{R}^n$, то $\overline{V} + V = V$.*

в) *Если V — ОВК в $\mathbb{R}^n$, то*

$$\operatorname{Int} V^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v \rangle > 0 \text{ при всех } v \in \overline{V} \setminus \{0\}\}. \tag{1.4}$$

(г) *Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ является острым лишь при условии $\operatorname{Int} V^* \neq \varnothing$.*

(д) *Если V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, то и $\operatorname{Int} V^*$ является острым ОВК в пространстве $\mathbb{R}^n$.*

(е) *Если V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, то*

$$V = \operatorname{Int}(\operatorname{Int} V^*)^*. \tag{1.5}$$

Чтобы не отклоняться от основной линии изложения, мы опускаем доказательство, хотя оно не представляет труда. Отметим лишь, что содержание предложения 1.1, по-видимому, хорошо известно.

1.3. Всюду дальше V обозначает острый ОВК в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\gamma(y)$, $y \in V$ — произвольная непрерывная положительная функция. Сформулируем ряд свойств, которыми может обладать или не обладать функция γ.

(А) $$\lim_{|y|\to+\infty} \frac{\ln\gamma(y)}{|y|}=0 \ (y\in V).$$

(Б) $$\overline{\lim_{|y|\to+\infty}} \frac{\ln\gamma(y)}{|y|}\leqslant 0 \ (y\in V).$$

(В) $$\underline{\lim_{|y|\to+\infty}} \frac{\ln\gamma(y)}{|y|}> 0 \ (y\in V).$$

(Г) $$\gamma\in L^1(V).$$

(Д) $\gamma\in L^1(V_R)$ для каждого $R\in(0, +\infty)$.

(Е) Существует константа $C\in(0, +\infty)$, такая, что

$$\gamma(2\cdot y)\leqslant C\cdot\gamma(y), \ y\in V.$$

Далее положим

$$\gamma_V^*(t)\equiv\int\limits_V e^{-<y,\, t>}\cdot\gamma(y)\,dy, \ t\in\mathbf{R}^n. \tag{1.6}$$

и при этом заметим, что (1.6) хорошо согласуется с ранее введенным более общим обозначением (0.13).

Имеет место

Предложение 1.2. (а) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*В*), *то* $\gamma_V^*(t)\equiv+\infty$ *при* $t\in\mathbf{R}^n\setminus V^*$.

(б) *Если* γ *удовлетворяет условиям* (*Б*) *и* (*Д*), *то* $0<\gamma_V^*(t)<+\infty$ *при* $t\in\operatorname{Int}V^*$ *и функция* $\gamma_V^*(t)$ *непрерывна в конусе* $\operatorname{Int}V^*$.

(в) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*Д*), *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует константа* $C=C(\gamma, \varepsilon)\in(0, +\infty)$, *такая, что*

$$\gamma_V^*(t)\geqslant C\cdot e^{-\varepsilon\cdot|t|}, \ t\in\mathbf{R}^n. \tag{1.7}$$

(г) *Если* $\delta\in[1, +\infty)$, *то*

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t)\leqslant\gamma_V^*(t), t\in V^*. \tag{1.8}$$

(д) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*Е*), *то для любого* $\delta\in(0, 1)$ *существует константа* $C=C(\gamma, \delta)\in(0, +\infty)$, *такая, что*

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t)\leqslant C\cdot\gamma_V^*(t), \ t\in V^*. \tag{1.9}$$

(е) *Если* γ *удовлетворяет условию* (*Г*), *то* $0<\gamma_V^*(t)<+\infty$ *при* $t\in V^*$ *и функция* $\gamma_V^*(t)$ *непрерывна в конусе* V^*.

Доказательство. Пусть γ подчинена условию (В) и $t\in\mathbf{R}^n\setminus V^*$. В силу (0.13) найдется $\zeta_0\in V_S\subset S_n$, для которого $<t, \zeta_0><0$. Следовательно, существуют открытая (относительно S_n!) окрестность $\Omega\subset V_S$ точки ζ_0 и положительное число ε такие, что

$$<t, \zeta>\leqslant-\varepsilon, \ \zeta\in\Omega. \tag{1.10}$$

Далее, так как γ обладает свойством (В), то

$$\gamma(y)\geqslant e^{-\varepsilon/2\cdot|y|}, \ |y|\geqslant R=R(\varepsilon)>0 \ (y\in V). \tag{1.11}$$

С учетом (1.10) и (1.11) приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\gamma_V^*(t) \geqslant \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-<y,t>} \cdot \gamma(y)\,dy \geqslant \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-<y,t>} \cdot e^{-\varepsilon/2 \cdot |y|}\,dy =$$

$$= \int\limits_R^{+\infty} e^{-\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} \int\limits_{V_S} e^{-r<\zeta,t>} d\sigma_n(\zeta)\,dr \geqslant \int\limits_R^{+\infty} e^{-\varepsilon/2 \cdot r} \times$$

$$\times r^{n-1} \int\limits_\Omega e^{\varepsilon \cdot r} d\sigma_n(\zeta)\,dr = \sigma_n(\Omega) \cdot \int\limits_R^{+\infty} e^{\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1}\,dr = +\infty, \qquad (1.12)$$

и тем самым утверждение (а) доказано.

Пусть теперь функция γ обладает свойствами (Б) и (Д). Покажем, что для произвольного компакта $K \subset \operatorname{Int} V^*$ существует функция $\Psi \in L^1(V)$ такая, что независимо от $t \in K$ выполняется неравенство

$$e^{-<y,t>} \cdot \gamma(y) \leqslant \Psi(y), \; y \in V, \qquad (1.13)$$

после чего утверждение (б) становится очевидным. Заметим прежде всего, что в силу соотношений (1.4) и (1.2) для каждого $t \in K$ имеем: $<t, \zeta> > 0$, $\zeta \in \overline{(V_S)}$. Из соображений компактности следует существование некоторого положительного числа ε такого, что

$$<t, \zeta> \geqslant \varepsilon, \; \zeta \in V_S, \; t \in K, \qquad (1.14)$$

или же

$$<t, y> \geqslant \varepsilon \cdot |y|, \; y \in V, \; t \in K. \qquad (1.15)$$

Следовательно, при $t \in K$ имеем

$$e^{-<y,t>} \cdot \gamma(y) \leqslant e^{-\varepsilon \cdot |y|} \cdot \gamma(y) \equiv \Psi(y), \; y \in V, \qquad (1.16)$$

и остается только показать, что $\Psi \in L^1(V)$. Поскольку γ обладает свойством (Б), то

$$\gamma(y) \leqslant e^{\varepsilon/2 \cdot |y|}, \; |y| \geqslant R = R(\varepsilon) > 0 \; (y \in V). \qquad (1.17)$$

Учитывая (1.17) и тот факт, что γ удовлетворяет условию (Д), получаем

$$\int\limits_V \Psi(y)\,dy = \int\limits_{V_R} e^{-\varepsilon \cdot |y|} \cdot \gamma(y)\,dy + \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-\varepsilon \cdot |y|} \cdot \gamma(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{V_R} \gamma(y)\,dy + \int\limits_{V \setminus V_R} e^{-\varepsilon/2 \cdot |y|}\,dy < +\infty. \qquad (1.18)$$

Далее, пусть функция γ обладает только свойством (Д) и положительное число ε произвольно. Полагая в соответствии с (1.3) $V_\varepsilon = \{y \in V : |y| < \varepsilon\}$, при любом $t \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$<t, y> \leqslant \varepsilon \cdot |t|, \; y \in V_\varepsilon. \qquad (1.19)$$

Следовательно, при $t \in \mathbf{R}^n$ справедливы неравенства

$$\gamma_V^*(t) \geqslant \int\limits_{V_\varepsilon} e^{-<t,y>} \cdot \gamma(y)\,dy \geqslant e^{-\varepsilon \cdot |t|} \cdot \int\limits_{V_\varepsilon} \gamma(y)\,dy =$$

$$= C(\gamma,\varepsilon)\cdot e^{-\varepsilon\cdot|t|},\quad C(\gamma,\varepsilon) = \int\limits_{V_\varepsilon} \gamma(y)\,dy. \tag{1.20}$$

И поскольку γ удовлетворяет условию (Д), то $C(\gamma,\varepsilon)\in(0,+\infty)$, что и доказывает (в).

Если $\delta\in[1,+\infty)$, то в силу (0.13) имеем

$$<\delta\cdot t, y> \geqslant <t, y>,\quad y\in V,\ t\in V^*. \tag{1.21}$$

Поэтому для $t\in V^*$ получим

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t) = \int\limits_V e^{-<\delta\cdot t, y>}\cdot\gamma(y)\,dy \leqslant \int\limits_V e^{-<t,y>}\cdot\gamma(y)\,dy = \gamma_V^*(t),$$

и утверждение (г) также доказано.

Если γ обладает свойством (Е) с некоторой константой $C\in(0,+\infty)$, то нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\gamma(y)\leqslant C^k\cdot\gamma(y/2^k),\quad y\in V\ (k=1,2,\cdots). \tag{1.22}$$

Далее, если задано $\delta\in(0,1)$, можно подобрать натуральное число N таким образом, чтобы $1\leqslant\delta\cdot 2^N<+\infty$. Тогда с учетом (1.22) имеем

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t) \leqslant C^N\int\limits_V e^{-<\delta\cdot t, y>}\cdot\gamma(y/2^N)\,dy,\quad t\in\mathbf{R}^n, \tag{1.23}$$

или же, после замены переменной интегрирования: $y=2^N\cdot v$, $v\in V$, и на основании (1.8)

$$\gamma_V^*(\delta\cdot t)\leqslant C^N\cdot 2^{Nn}\cdot\int\limits_V e^{-<\delta\cdot t, 2^N\cdot v>}\cdot\gamma(v)\,dv =$$

$$= C^N\cdot 2^{Nn}\cdot\gamma_V^*(2^N\cdot\delta\cdot t)\leqslant C^N\cdot 2^{Nn}\cdot\gamma_V^*(t),\quad t\in V^*. \tag{1.24}$$

Таким образом, (1.9) выполняется с константой $C(\gamma,\delta)=C^N\cdot 2^{Nn}$.

Наконец, если функция γ удовлетворяет условию (Г), то независимо от $t\in V^*$ справедливо неравенство ($y\in V$):

$$e^{-<y,t>}\cdot\gamma(y)\leqslant\gamma(y)\in L^1(V), \tag{1.25}$$

которое и влечет (е). Таким образом, предложение 1.2 полностью доказано.

§ 2. Интегральные представления типа Винера—Пэли

Всюду в данном параграфе V обозначает острый открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$.

2.1. Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Пусть* $1<p\leqslant 2$, $q=p/(p-1)$, $0<s<+\infty$ *и* $\gamma(y)$, $y\in V$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойством (В). Если измеримая функция* $F(t)$, $t\in\mathbf{R}^n$, *удовлетворяет условию вида*

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q e^{-q<y,\,t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty, \tag{2.1}$$

то $F(t)=0$ *для почти всех* $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$. Тогда имеем неравенчтво $<t_0, \zeta_0> < 0$ для некоторого $\zeta_0 \in V_S$. Следовательно, существуют открытая окрестность $W \subset \mathbb{R}^n \setminus V^*$ точки t_0 и открытая (относительно сферы S_n)окрестность $\Omega \subset V_S$ точки ζ_0 такие, что

$$<t, \zeta> < -\varepsilon \quad (t \in W,\ \zeta \in \Omega) \tag{2.2}$$

для некоторого положительного числа ε.

Далее, поскольку γ обладает свойством (B), то

$$\gamma(y) \geqslant e^{-ps\varepsilon/2 \cdot |y|},\ |y| \geqslant R = R(\varepsilon) > 0\ (y \in V). \tag{2.3}$$

Комбинируя (2.1)—(2.3), приходим к следующей цепочке неравенств:

$$+\infty > \int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\,t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \gamma(y)\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_{V \setminus V_R} \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-q<y,\,t>} dt \right\}^{s(p-1)} \cdot e^{-ps\varepsilon/2 \cdot |y|}\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \int_R^{+\infty} e^{-ps\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} \int_\Omega \left\{ \int_W |F(t)|^q \cdot e^{-qr<\zeta,\,t>} dt \right\}^{s(p-1)} d\sigma_n(\zeta)\, dr \geqslant$$

$$\geqslant \sigma_n(\Omega) \cdot \left\{ \int_W |F(t)|^q dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \int_R^{+\infty} e^{-ps\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} \cdot e^{qr\varepsilon \cdot s(p-1)} dr.$$

Таким образом, окончательно получилось

$$\sigma_n(\Omega) \cdot \left\{ \int_W |F(t)|^q dt \right\}^{s(p-1)} \cdot \int_R^{+\infty} e^{ps\varepsilon/2 \cdot r} \cdot r^{n-1} dr < +\infty. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что $F(t)=0$ п. в. в W. Итак, $F(t)=0$ (п. в.) в окрестности каждой точки $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$, а потому $F(t)=0$ для почти веех $t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*$. Лемма доказана.

2.2. Комбинируя теорему II (см. § 0) с предложением 1.2 (а) и леммой I.I, получаем следующий основной результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 < s < +\infty$ *и* $\gamma(y)$, $y \in V$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойством* (B). *Тогда каждая функция* $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *допускает интегральное представление вида*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z,\,t>} dt,\ z \in T_V, \tag{2.5}$$

где

1. *При* $p=1$ *функция* $F(t)$, $t\in\mathbb{R}^n$ *непрерывна и удовлетворяет условиям*

$$F(t)\equiv 0,\ t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*; \tag{2.6}$$

$$\sup_{t\in V^*}|\|F(t)\|^s\cdot\gamma_V^*(s\cdot t)|<\frac{1}{(2\pi)^{n/2\cdot s}}M^1_{s,\gamma}(f)<+\infty. \tag{2.7}$$

2. *При* $1<p<2$ *функция* $F(t)$, $t\in V^*$ *измерима и удовлетворяет условию* $(q=p/(p-1))$:

$$\int_V\left\{\int_{V^*}|F(t)|^q\cdot e^{-q<y,t>}\,dt\right\}^{s(p-1)}\cdot\gamma(y)\,dy\leqslant$$

$$<\frac{1}{(2\pi)^{n/2\cdot s(2-p)}}\cdot M^p_{s,\gamma}(f)<+\infty. \tag{2.8}$$

При этом справедливо равенство (для п. в. $y\in V$*):*

$$\hat f_y(t)=\begin{cases}F(t)\cdot e^{-<y,t>} & t\in V^*,\\ 0, & t\in\mathbb{R}^n\setminus V^*.\end{cases} \tag{2.9}$$

Кроме того, при $p=2$ *интегральное представление* (2.5) *класса* $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ *является к тому же параметрическим, то есть* $H^2_{s,\gamma}(T_V)$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *задаваемых формулой* (2.5), *где* $F(t)$, $t\in V^*$ — *произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_V\left\{\int_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy<+\infty, \tag{2.10}$$

причем выполняется равенство Парсеваля

$$M^2_{s,\gamma}(f)=\int_V\left\{\int_{V^*}|F(t)|^2\cdot e^{-2<y,t>}\,dt\right\}^s\cdot\gamma(y)\,dy. \tag{2.11}$$

§ 3. Построение воспроизводящих ядер

3.1. Прежде всего установим некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть* V — *открытый выпуклый конус в* $\mathbb{R}^n$ *и компакт* K *лежит в* V. *Тогда существует такое* $a\in V$, *при котором* $K\subset a+V$.

Доказательство этого факта простое и потому опускается.

Лемма 3.2. *Пусть* V — *острый ОВК в* $\mathbb{R}^n$ *и* $\gamma(y)$, $y\in V$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойством (Д). Если* $a\in V$ *и* $\delta\in(0,+\infty)$, $\alpha\in[0,+\infty)$, *то*

$$\eta(t)\equiv\frac{e^{-<a,t>}}{[\gamma_V^*(\delta\cdot t)]^{\alpha}}\in L^p(V^*) \tag{3.1}$$

при всех $0<p<\infty$.

Доказательство. Поскольку $a \in V$, то в силу предложения 1.1 имеем

$$\langle a, t \rangle > 0, \ t \in V^* \setminus \{0\}, \tag{3.2}$$

откуда следует существование некоторого положительного числа ε такого, что

$$\langle a, t \rangle > \varepsilon \cdot |t|, \ t \in V^*. \tag{3.3}$$

Далее, так как γ обладает свойством (Д), то согласно предложению 1.2 (в)

$$\overset{*}{\gamma}_V(t) \geqslant C \cdot e^{-\varepsilon/2\delta\varepsilon \cdot |t|}, \ t \in \mathbf{R}^n, \tag{3.4}$$

где $C \in (0, +\infty)$. Учитывая явный вид функции $\eta(t)$ (см. (3.1)) и неравенства (3.3), (3.4), получаем

$$\eta(t) \leqslant \frac{1}{C^*} \cdot e^{-\varepsilon/2 \cdot |t|}, \ t \in V^*, \tag{3.5}$$

после чего утверждение леммы уже очевидно.

3.2. Всюду дальше предполагается, что V — острый ОВК в $\mathbf{R}^n$, а $\gamma(y)$, $y \in V$ — непрерывная положительная функция, обладающая свойствами (А) и (Д).

Для произведения $z \in T_V$ и $v \in V$ положим

$$R_{z,v}(t) = \begin{cases} 0, \ t \in \mathbf{R}^n \setminus V^*, \\ (2\pi)^{n/2} \dfrac{e^{i \langle z + iv, t \rangle}}{\overset{*}{\gamma}_V(2 \cdot t)}, \ t \in \operatorname{Int} V^*. \end{cases} \tag{3.6}$$

Кроме того, рассмотрим также функцию

$$\Phi(z, w) = \int\limits_{V^*} \frac{e^{i \langle z - \overline{w}, t \rangle}}{\overset{*}{\gamma}_V(2 \cdot t)} dt, \ z, \ w \in T_V. \tag{3.7}$$

Основные свойства введенных функций устанавливает

Лемма 3.3. (а) *Функция* $\Phi(z, w)$, *задаваемая формулой* (3.7), *определена при всех* $z, w \in T_V$ *и является голоморфной относительно* z *и антиголоморфной относительно* w.

(б) *При любых* $z \in T_V$ *и* $v \in V$ $R_{z,v}(t) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *для всех* $0 < p \leqslant \infty$ *и при этом* $\Phi(z, u + iv)$, *как функция от* $u \in \mathbf{R}^n$, *является преобразованием Фурье функции* $R_{z,v}(t)$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из лемм 3.1 и 3.2, а утверждение (б) устанавливается сопоставлением формул (3.6) и (3.7) на основании леммы 3.2.

Перейдем теперь к установлению основного результата.

Теорема 3.1. *Пусть* V — *острый ОВК в* $\mathbf{R}^n$, $\gamma(y)$, $y \in V$ — *непрерывная положительная функция, обладающая свойствами* (*А*) *и* (*Д*), *и ядро* $\Phi(z, w)$ *определено по формуле* (3.7). *Допустим также, что* $1 \leqslant p \leqslant 2$ *и положительное число* s *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(а) $1/p \leqslant s \leqslant 2/p$;

(б) $1/p \leqslant s \leqslant 1/(p-1)$, *но при этом γ обладает дополнительным свойством* (E);

(в) $1/p \leqslant s < +\infty$, *но при этом γ обладает дополнительным свойством* (Γ).

Тогда любая функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ допускает представление вида

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du\, dv, \quad z \in T_V, \qquad (w = u + iv) \tag{3.8}$$

причем интеграл справа сходится абсолютно при всех $z \in T_V$.

Доказательство. Пусть функция $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$, тогда к ней применима теорема 2.1, согласно которой имеет место интегральное представление вида

$$f(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z,t>} dt, \quad z \in T_V, \tag{3.9}$$

где при $p=1$ функция $F(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, непрерывна и удовлетворяет условиям (2.6) и (2.7), а при $1 < p \leqslant 2$ F измерима на V^* и удовлетворяет условию (2.8). При этом выполняется равенство

$$\hat{f}_v(t) = \begin{cases} F(t) \cdot e^{-<v,t>}, & t \in V^*, \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus V^*. \end{cases} \tag{3.10}$$

Затем зафиксируем произвольную точку $z = x + iy \in T_V$, положим

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{T_V} f(w) \cdot \Phi(z, w) \cdot \gamma(v)\, du\, dv \quad (w = u + iv) \tag{3.11}$$

и в предположении абсолютной сходимости интеграла (3.11) установим равенство $I(z) = f(z)$ следующим образом:

$$I(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} f_v(u) \cdot \Phi(z, u+iv)\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} f_v(u) \cdot \hat{R}_{z,v}(u)\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_v(t) \cdot R_{z,v}(t)\, dt\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{V^*} F(t) \cdot e^{-<v,t>} \cdot \frac{e^{i<z+iv,t>}}{\gamma^*_V(2\cdot t)}\, dt\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t) \cdot \frac{e^{i<z,t>}}{\gamma^*_V(2\cdot t)} \int_V \gamma(v) \cdot e^{-2<v,t>}\, dv\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \int_{V^*} F(t) \cdot e^{i<z,t>}\, dt = f(z). \tag{3.12}$$

Итак, нам осталось убедиться в абсолютной сходимости интеграла (3.11), то есть показать, что

$$\tilde{I}(z) = \int\limits_{V} \gamma(v) \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_v(u)| \cdot |\Phi(z, u+iv)|\, du\, dv < +\infty. \tag{3.13}$$

Применяя интегральное неравенство Гёльдера, лемму 3.3 (б) и теорему Хаусдорфа-Юнга, приходим к оценке

$$\tilde{I}(z) \leqslant \mathrm{const} \cdot J, \tag{3.14}$$

где

$$J = \int\limits_{V} \tilde{f}(v) \cdot \tilde{R}(v) \cdot \gamma(v)\, dv, \tag{3.15}$$

$$\tilde{f}(v) = \Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_v(u)|^p\, du \Big)^{1/p}, \quad v \in V, \tag{3.16}$$

$$\tilde{R}(v) = \Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |R_{z,v}(t)|^p\, dt \Big)^{1/p} = (2\pi)^{n/2} \cdot \Big(\int\limits_{V^*} \frac{e^{-p\langle y+v,\, t\rangle}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p}\, dt \Big)^{1/p}, \quad v \in V. \tag{3.17}$$

Нам необходимо показать, что $J < +\infty$. При этом в силу предположения $f \in H^p_{s,\gamma}(T_V)$ имеем неравенство

$$\int\limits_{V} [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, dv < +\infty. \tag{3.18}$$

Прежде всего введем меру

$$d\nu(t) = \frac{e^{-p\langle y,\, t\rangle}}{[\gamma_V^*(2\cdot t)]^p}\, dt, \quad t \in V^*, \tag{3.19}$$

которая в силу леммы 3.2 имеет конечную массу $\nu_0 < +\infty$. Сопоставляя (3.17) с (3.19), получим

$$[\tilde{R}(v)]^p \leqslant (2\pi)^{pn/2} \cdot \int\limits_{V^*} e^{-p\langle v,\, t\rangle}\, d\nu(t), \quad v \in V, \tag{3.20}$$

откуда, кстати, следует, что

$$\sup_{v\in V} [\tilde{R}(v)] < +\infty. \tag{3.21}$$

Перейдем теперь непосредственно к разбору случаев (а), (б) и (в) (см. формулировку доказываемой теоремы). Но сначала заметим, что при $s = 1/p$, когда неравенство (3.18) принимает вид

$$\int\limits_{V} \tilde{f}(v) \cdot \gamma(v)\, dv < +\infty, \tag{3.22}$$

сразу же получаем необходимую оценку:

$$J \leqslant \sup_{v\in V} [\tilde{R}(v)] \cdot \int\limits_{V} \tilde{f}(v) \cdot \gamma(v)\, dv < +\infty. \tag{3.23}$$

Поэтому дальше будем действовать в предположении $s > 1/p$. В случае (в), когда $1/p < s < +\infty$ и γ обладает свойством (Г), введем меру

$$d\mu(v) = \tilde{R}(v) \cdot \gamma(v)\, dv, \quad v \in V, \tag{3.24}$$

с конечной массой $\mu_0 < +\infty$, и тогда (3.15) запишется в виде

$$J = \int_V \tilde{f}(v)\, d\mu(v). \tag{3.25}$$

Поскольку $1 < p \cdot s < +\infty$, то применив к (3.25) интегральное неравенство Йенсена, с учетом (3.18) и (3.21) получим

$$J^{ps} \leqslant \mu_0^{ps-1} \cdot \int_V [\tilde{f}(v)]^{ps}\, d\mu(v) \leqslant \mu_0^{ps-1} \cdot \sup_{v \in V} [\tilde{R}(v)] \times$$
$$\times \int_V [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, dv < +\infty. \tag{3.26}$$

Разберем теперь случаи (а) и (б). Так как $1 < p \cdot s$, то полагая $r = ps/(ps-1) \in (1, +\infty)$, применим к (3.15) интегральное неравенство Гёльдера

$$J \leqslant \left(\int_V [\tilde{f}(v)]^{ps} \cdot \gamma(v)\, dv \right)^{1/ps} \cdot \left(\int_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, dv \right)^{1/r}. \tag{3.27}$$

Следовательно, в силу (3.18) нам достаточно установить конечность интеграла

$$J_1 = \int_V [\tilde{R}(v)]^r \cdot \gamma(v)\, dv. \tag{3.28}$$

Поскольку в любом случае $r/p \geqslant 1$, то (3.20) дает

$$[\tilde{R}(v)]^r \leqslant (2\pi)^{rn/2} \cdot \nu_0^{r/p-1} \cdot \int_{V^*} e^{-r\langle v, t \rangle}\, d\nu(t), \quad v \in V. \tag{3.29}$$

Поэтому

$$J_1 \leqslant \text{const} \cdot \int_V \gamma(v) \int_{V^*} e^{-r\langle v, t \rangle}\, d\nu(t) = \text{const} \times$$
$$\times \int_{V^*} \gamma_V^*(r \cdot t)\, d\nu(t) = \text{const} \cdot \int_{V^*} \frac{\gamma_V^*(r \cdot t)}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^p} \cdot e^{-p\langle y, t \rangle}\, dt. \tag{3.30}$$

Далее, в случае (а) $1 < p \cdot s \leqslant 2$, поэтому $2 \leqslant r < +\infty$, и в силу предложения 1.2 (г) имеем

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leqslant \gamma_V^*(2 \cdot t), \quad t \in V^*. \tag{3.31}$$

В случае же (б) мы можем лишь утверждать, что

$$\gamma_V^*(r \cdot t) \leqslant \text{const} \cdot \gamma_V^*(2 \cdot t), \quad t \in V^*, \tag{3.32}$$

как это следует из предложения 1.2 (д).

Но так или иначе, из (3.30)—(3.32) вытекает оценка

$$J_1 \leqslant \text{const} \cdot \int \frac{e^{-p\langle y, t \rangle}}{[\gamma_V^*(2 \cdot t)]^{p-1}}\, dt,$$

которая на основании леммы 3.2 дает $J_1 < +\infty$. Таким образом, теорема полностью доказана.

3.3. Как видно из теоремы 3.1, если весовая функция $\gamma(y)$, $y \in V$, обладает лишь самыми необходимыми свойствами (A) и (Д), то интегральное представление (3.8) с воспроизводящим ядром $\Phi(z, w)$, ассоциированным с γ по формуле (3.7), справедливо для функций из классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, лишь для значений параметра s из промежутка $[1/p, 2/p]$. Попытка же расширить этот промежуток (см. формулировку теоремы 3.1) привела нас к необходимости наложить на γ дополнительные условия типа (E) и (Г). Тем не менее оказывается, что даже в том случае, ко да γ обладает лишь свойствами (A) и (Д), для функций из классов $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$ и произвольном $s \in [1/p, +\infty)$ справедливы интегральные представления типа (3.8), но с некоторой другой весовой функцией $\gamma_1(y)$, $y \in V$, и соответственно другим воспроизводящим ядром $\Phi_1(z, w)$. Этот факт легко вытекает из теоремы 3.1 и следующего простого предложения.

Предложение 3.1. *Пусть V — острый ОВК в $\mathbb{R}^n$, $\gamma(y)$, $y \in V$ — непрерывная положительная функция со свойствами (A) и (Д) и $p \in (0, +\infty)$, $s \in (0, +\infty)$. Рассмотрим функцию*

$$\gamma_1(y) = \min\{\gamma(y);\ 1/|y|^N\},\quad y \in V\ (N \geqslant N_0). \tag{3.34}$$

Тогда

1. $\gamma_1(y)$, $y \in V$ — *непрерывная положительная функция, обладающая как свойствами (A) и (Д), так и свойством (Г).*
2. $\gamma_1(y) \leqslant \gamma(y)$ *при* $y \in V$.
3. $H^p_{s,\gamma}(T_V) \subset H^p_{s,\gamma_1}(T_V)$.

Институт математики
АН Армении

Поступила 11. IX. 1989

Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Խողովակաձև տիրույթներում կշռային տարածությունների պատկանող հոլոմորֆ ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումներ *(ամփոփում)*.

Դիցուք V-ն սուր բաց ուռուցիկ C կոն է $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ տարածությունում և $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n,\ y \in V\}$։ Ենթադրենք, որ $0 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$, իսկ $\gamma(y)$-ը, $y \in V$, անընդհատ դրական ֆունկցիա է, նշանակենք $H^p_{s,\gamma}(T_V)$-ով T_V խողովակաձև տիրույթում հոլոմորֆ այն $f(z) = f(x+iy)$ ֆունկցիաների դասը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին.

$$\int_V \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^p\, dx \right\}^s \cdot \gamma(y)\, dy < +\infty:$$

Երբ $1 \leqslant p \leqslant 2$, իսկ γ կշռային ֆունկցիան և s պարամետրը բավարարում են որոշակի պայմանների, $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ դասի համար բերված է Պեյլի-Վիների տիպի ինտեգրալ ներկայացում, ինչպես նաև կառուցված է $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_V$, վերարտադրող կորիզ։

A. H. KARAPETIAN. *Integral representations for weighted spaces of functions holomorphic in tube domains* (summary)

Let V be a sharp open convex cone is $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ and $T_V = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in V\}$. Suppose that $0 < p < +\infty$, $0 < s < +\infty$ and $\gamma(y)$, $y \in V$, is a continuous positive (i. e. $\gamma(y) > 0$, $y \in V$) function. Let $H^p_{s,\gamma}(T_V)$ be the space of all fun-

ctions $f(z) = f(x+iy)$ holpmorphic in the tube domain $T_V \subset C^n$ and satisfying the condition

$$\int_V \left\{ \int_{R^n} |f(x+iy)|^p \, dx \right\}^s \cdot \gamma(y) \, dy < +\infty.$$

For $1 \leqslant p \leqslant 2$ and under certain conditions imposed on the function γ and the parameter s, the Paley—Wiener type integral representations are established and the reproducing kernels $\Phi(z, w)$, $z, w \in T_V$ are constructed for the classes $H^p_{s,\gamma}(T_V)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. E. A. C. Paley, N. Wiener.* Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
2. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., Наука, 1964.
3. *E. Hille, J. D. Tamarkin.* On the absolute integrability of Fourier transforms, Fund. Math., 25, 1935, 329—352.
4. *G. J. Mikusinski.* On the Paley—Wiener theorem, Studia Math., 13, 1953, 287—295.
5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
6. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460.
7. *S. Bochner.* Group invariance of Caushy's formula in several variables, Ann. Math., 45, № 4, 1944, 686—707.
8. *С. Г. Гиндикин.* Анализ в однородных областях, УМН, 19, № 4, 1964, 3—92.
9. *T. G. Genchev.* Paley—Wiener type theorems for functions holomorphic in a half—plane, Докл. Болг. АН, 37, № 2, 1983, 141—144.
10. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян.* Интегральные представления некоторых классов функций, голоморфных в полосе или в полуплоскости, ДАН СССР, 283, № 5, 1985, 1054—1057.
11. *M. M. Dzhrbashyan, V. M. Martirosyan.* Integral representations for some classes of functions holomorphic in a strip or in a half—plane. Anal. Math., 12, № 3, 1985, 191 - 212.
12. *T. G. Genchev.* Integral representations for functions holomorphic in tube domains, Докл. Болг. АН, 37, 1984, 717—720.
13. *T. G. Genchev.* Paley—Wiener type theorems for functions in Bergman spaces over tube domains, J. Math. Anal. Appl., 118, № 2, 1986, 495—501.
14. *А. О. Карапетян.* Интегральные представления в трубчатых областях, Изв. АН АрмССР, сер. матем., XXIII, № 1, 1988, 91—96.
15. *А. О. Карапетян.* Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе. Кандидатская диссертация, Ереван, 1987.