ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.53

Р. Аб. АВЕТИСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ

Вопрос о представлении функций рядами вида $\sum_{k=1}^{\infty} A_k/(\zeta_k - z)$ с определенными ограничениями на последовательность полюсов ζ_k и коэффициентов A_k изучался в ряде работ (см. [1]—[12]). Д. Вольф [1] доказал следующую теорему.

Теорема [1]. *Пусть G — ограниченная жорданова область, и пусть f аналитична в замкнутой области $\bar{G}$. Тогда f допускает представление*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\zeta_k - z}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|A_k|<+\infty, \quad \zeta_k \in \overline{G}, \quad z\in G. \tag{1}$$

В работе [8] (см. также [9]—[12]) получено обобщение теоремы Вольфа для случая единичного круга. Чтобы сформулировать его введем некоторые определения. Пусть $D=\{z:|z|<1\}$. Через E обозначим множество функций, аналитических в D и допускающих в D представление (1). Введем в E норму по формуле

$$\|f\|_E=\inf\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|, \tag{2}$$

где inf берется всем представлениям f вида (1).

Через F обозначим множество аналитических в D функций таких, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad g\in L^1(\partial D). \tag{3}$$

Норму в D введем по формуле

$$\|f\|_F=\inf\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}|g(\zeta)|\,|d\zeta|, \tag{4}$$

где inf берется по всем представлениям f вида (3).

В работе [8] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пространства E и F с нормами* (2) *и* (4) *идентичны.* С другой стороны, в работах [2]—[7] изучался вопрос не только о представимости определенных классов функций в виде (1), но и об оценке коэффициентов A_k в представлении (1). В настоящей заметке мы обобщим теорему А на случай жордановых областей со спрямляемой границей так, чтобы получить также некоторые оценки коэффициентов A_k в представлении (1). Отметим, что эти оценки будут несколько иного вида, чем в работах [2]—[7].

Введем некоторые определения. Пусть G — ограниченная жорданова область со спрямляемой границей ∂G. Положим $G_- = \overline{C}/\overline{G}$. Пусть ω — функция, непрерывная в $\overline{G}$. Через $B_\omega(G)$ обозначим множество функций f, голоморфных в G и допускающих в G представление вида

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\zeta_k - z},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|}{|\omega(\zeta_k)|}<+\infty,\ \zeta_k\in\overline{G},\ z\in G \tag{5}$$

(если $\omega(\zeta_k)=0$, то считается тогда, что и $A_k=0$ и соответствующий член в (5) опущен).

Норму в пространстве $B_\omega(G)$ введем по формуле

$$\|f\|_{B_\omega(G)}=\inf\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|}{|\omega(\zeta_k)|}, \tag{6}$$

где inf берется по всем представлениям f вида (5).

Через $F_\omega(G)$ обозначим множество голоморфных в D функций таких, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,\qquad \int_{\partial G}\frac{|g(\zeta)|}{|\omega(\zeta)|}\,|d\zeta|<+\infty. \tag{7}$$

Норму в $F_\omega(G)$ введем по формуле

$$\|f\|_{F_\omega(G)}=\inf\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}\frac{|g(\zeta)|}{|\omega(\zeta)|}|d\zeta|, \tag{8}$$

где inf берется по всем представлениям f вида (7).

Введем теперь подходящий класс функций ω. Для этого обозначим через $\Phi(\zeta)$ функцию, конформно и однолистно отображающую область G_- на дополнение к кругу $\overline{D}$, и пусть $\zeta=\psi(w)$ — функция, обратная к Φ. Отметим, что Φ не предполагается нормированной условием $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$. Через A_G обозначим множество функций ω, непрерывных в $\overline{G}_-$, таких, что ω допускают представление

$$\omega(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n|\Phi(\zeta)|^{-n},\quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|<+\infty,\ \zeta\in G_-. \tag{9}$$

Отметим, что в частности, $\omega\in A_G$, если ω — голоморфна в G_- и $\omega'\in E(G_-)$, где E_1 — известный класс В. И. Смирнова.

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная жорданова область со спрямляемой границей. Если $\omega\in A_G$, то пространства $B_\omega(G)$ и $F_\omega(G)$ с нормами* (6) *и* (8) *идентичны.*

Доказательство. Мы будем использовать метод обобщенных преобразований Фабера (см. [13], стр. 126). Пусть $\omega\in A_G$ и $\Phi(\zeta)$ — отображающая функция, участвующая в определении (9) функции ω. Положим

$$\varphi_z(t) = (\psi(t^{-1}) - z)^{-1} \text{ для } t \in D,\ z \in G.$$

Так как область G имеет спрямляемую жорданову границу, то согласно известной теореме о соответствии границ (см. [14], стр. 46, т. 4) функция Ψ допускает непрерывное продолжение на ∂D такое, что Ψ взаимно-однозначно отображает ∂D на ∂G. Отсюда следует, что $\varphi_z(t)$ также допускает непрерывное продолжение на ∂D такое, что $\varphi_z(t)$ имеет ограниченную вариацию на ∂D. Следовательно (см. [15], стр. 105), функция $\varphi_z(t)$ абсолютно непрерывна на ∂D и имеет абсолютно сходящийся ряд коэффициентов Тейлора. Последнее означает, что

$$\frac{1}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(z)}{t^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n(z)| < +\infty, \quad z \in G,\ t \in \overline{D},$$

где $b_n(z)$ — полиномы степени n. Отсюда, учитывая (9), получаем

$$\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{[\Phi(\zeta)]^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |B_n(z)| < +\infty, \quad \zeta \in \overline{G}_-,\ z \in G, \tag{10}$$

где $B_n(z)$ — полиномы степени n, зависящие только от ω и Φ.

В силу абсолютной непрерывности $\varphi_z(t)$, функция $\psi(t)$ также абсолютно непрерывна на ∂D. Поэтому мы можем отобразить пространство $F_\omega(G)$ на F оператором T_ω, определенным по формуле

$$T_\omega(f)(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{t \cdot g(\psi(t))}{t - w} \frac{\psi'(t)}{\omega(\psi(t))} dt, \quad f \in F_\omega(G),\ w \in D.$$

Очевидно, функцию g в представлении (7) можно выбрать так, чтобы $\|T_\omega(f)\|_F \leqslant \|f\|_{F_\omega(G)} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, по теореме А функция $T_\omega(f)$ допускает в D представление вида (1) такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \leqslant \|f\|_{F_\omega(G)} + 2\varepsilon. \tag{11}$$

Обозначим через a_n коэффициенты Тейлора функции $T_\omega(f)$. Очевидно

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{w_k^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{[\Phi(\zeta)]^n},$$

где w_k — полюсы в представлении (1) функции $T_\omega(f)$. Учитывая (10) и полагая $\zeta_k = \psi(w_k)$ для $f \in F_\omega(G)$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{[\Phi(\zeta)]^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{w_k^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{\zeta_k - z},$$

где $B_k = A_k \cdot \omega(\zeta_k) / w_k$. Учитывая (11), имеем

$$\|f\|_{B_\omega(G)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|B_k|}{|\omega(\zeta_k)|} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \|f\|_{F_\omega(G)} + 2\varepsilon.$$

Следовательно, если $f \in F_\infty(G)$, то $f \in B_\infty(G)$ и $\|f\|_{B_\infty(G)} \leq \|f\|_{F_\infty(G)}$. Докажем теперь обратное утверждение. Будем считать при $a = \infty$ функцию $\frac{a}{a-z} \equiv 1$. Отобразим пространство $B_\infty(f)$ на F оператором K_∞, определенным по формуле

$$K_\infty(f)(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \Phi(\zeta_k)}{\omega(\zeta_k)(\Phi(\zeta_k) - w)}, \quad f \in B_\infty(G),\ w \in D.$$

Так как при $|a| > 1$, $\left\|\frac{a}{a-w}\right\|_F = 1$ и F есть банахово пространство, то можно выбрать такое представление (5) функции f, чтобы $\|K_\infty(f)\|_F \leq \leq \|f\|_{B_\infty(G)} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Следовательно, $K_\infty(f)$ допускает в D представление вида (3) такое, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |g(t)|\,|dt| \leq \|f\|_{B_\infty(G)} + 2\varepsilon. \tag{12}$$

Обозначим через $\tilde{a}_n$ коэффициенты Тейлора функции $K_\infty(f)$

$$\tilde{a}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\omega(\zeta_k)\,[\Phi(\zeta_k)]^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(\Phi(\zeta))}{[\Phi(\zeta)]^{n+1}} \Phi'(\zeta)\, d\zeta.$$

Вновь учитывая (10), для $f \in B_\infty(G)$, имеем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\omega(\zeta_k)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{[\Phi(\zeta_k)]^n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \cdot \int_{\partial G} \frac{g(\Phi(\zeta))}{[\Phi(\zeta)]^{n+1}} \Phi'(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где $g_1(\zeta) = g(\Phi(\zeta)) \cdot \Phi(\zeta) \cdot \Phi'(\zeta) \cdot \omega(\zeta)$. Учитывая (12), получаем

$$\|f\|_{F_\infty(G)} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{|g_1(\zeta)|}{|\omega(\zeta)|}\, |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |g(t)|\,|dt| \leq \|f\|_{B_\infty(G)} + 2\varepsilon.$$

Теорема 1 доказана.

Задачу о представлении функций в виде (1) очевидно можно считать задачей о нахождении «дискретного» аналога интегральной формулы Коши. Естественным продолжением этой задачи является нахождение «дискретных» аналогов формул Шварца и Герглотца. С помощью метода Вольфа [1] может быть получена следующая теорема («дискретный» аналог формулы (Герглотца).

Теорема 2. *Голоморфная в круге D функция f такая, что* $\mathrm{Re} f(z) > 0$, $f(0) > 0$, *допускает в D представление вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{z_k + z}{z_k - z}, \quad c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty, \quad z_k \in \overline{D},\ z \in D \tag{13}$$

тогда и только тогда, когда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,u(e^{it})\,dt, \tag{14}$$

где u — положительная полунепрерывная снизу на ∂D функция из класса $L^1(\partial D)$.

Доказательство. Если f допускает представление вида (13), то в качестве $u(e^{it})$ в (14) можно взять функцию

$$u(e^{it})=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\operatorname{Re}\frac{z_k+e^{it}}{z_k-e^{it}},\quad t\in[0,\ 2\pi],$$

которая, очевидно, положительна, полунепрерывна снизу на ∂D и из $L^1(\partial D)$. Обратно, пусть теперь f представляется в D в виде (14). Положим $u(z)=\operatorname{Re}f(z)$. Так как u — полунепрерывна снизу на ∂D, то существует последовательность непрерывных функций $\{u_n(e^{it})\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0<u_n(e^{it})\leqslant u_{n+1}(e^{it})<u(e^{it})$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(e^{it})=u(e^{it})$, $t\in[0,\ 2\pi]$. Обозначим через $u_n(z)$ решение задачи Дирихле для функций $u_n(e^{it})$. Возьмем последовательность $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$. Существует n_1 такое, что $u(z)-u_{n_1}(z)>0$ при $z\in D$ и $u(z)-u_{n_1}(z)<\varepsilon_1$ при $|z|\leqslant\frac{1}{2}\cdot$ Так как $u_{n_1}(z)>0$, то найдется $\delta>0$ такое, что $2\delta<u_{n_1}(z)$ при $z\in\overline{D}$ и $4\delta<\varepsilon_1$. Далее, найдется $r_1>0$ такое, что $|u_{n_1}(z)-u_{n_1}(r_1z)|<\delta$ при $z\in\overline{D}$. Отсюда получаем $\delta<u_{n_1}(z)-(u_{n_1}(r_1z)-2\delta)<3\delta$ при $z\in\overline{D}$. Функция $u_{n_1}(r_1z)-2\delta$ гармонична и положительна в круге D_{1/r_1}. Поэтому из формулы Пуассона получаем, что функцию $u_{n_1}(z)$ можно приблизить в $\overline{D}$ следующим образом:

$$0<u_{n_1}(z)-\sum_{k=1}^{m_1}c_k^1\operatorname{Re}\frac{z_k^1+z}{z_k^1-z}<4\delta\quad\text{при}\quad z\in\overline{D},$$

где $c_k^1>0$, $|z_k^1|>1$. Положим

$$v_1(z)=u(z)-\sum_{k=1}^{m_1}c_k^1\operatorname{Re}\frac{z_k^1+z}{z_k^1-z}\quad\text{при}\ z\in D.$$

Из предыдущих неравенств получаем, что $v_1(z)>0$ при $z\in D$ и $v_1(z)<2\varepsilon_1$ при $|z|\leqslant\frac{1}{2}\cdot$ Заметим теперь, что граничные значения функции $v_1(z)$ вновь образуют положительную и полунепрерывную снизу функцию $v_1(e^{it})$ на ∂D. Следовательно, предыдущие рассуждения можно повторить для функции $v_1(e^{it})$ и числа $\varepsilon_2>0$. Повторяя таким образом эти рассуждения n раз можно получить, что

$$0<u(z)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}c_k^j\operatorname{Re}\frac{z_k^j+z}{z_k^j-z}<2\varepsilon_n\ \text{при}\ |z|\leqslant\frac{1}{2},$$

где $c_k^j>0$, $|z_k^j|>1$. Устремляя здесь $n\to\infty$, получаем нужное нам утверждение. Теорема 2 доказана.

Замечание. Из теоремы 2 нетрудно получить также «дискретный» аналог формулы Шварца. Отметим также, что с помощью теоремы 2 можно получить еще одно доказательство теоремы A из работы [8].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3. I. 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wolff.* Sur les series $\sum_{k=1}^{\infty} A_k/(\zeta_k - z)$, C. r. Acad. Sci., 173, 1921, 1327–1328.
2. *A. Denjoy.* Sur les series de fractions rationalles, Bull. soc. mat. France, 52, 1924, 418–434.
3. *А. А. Гончар.* О квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1028—1031.
4. *Т. А. Леонтьева.* Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций, Мат. заметки, 4, № 3, 1968, 191—200.
5. *Т. А. Леонтьева.* О представлении функций в единичном круге рядами простых дробей, Мат. сб., 84 (126), № 2, 1971, 313—326.
6. *Р. Аб. Аветисян.* О представлении аналитических функций рядами простых дробей в замкнутом круге, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XVI, № 1, 1981, 31—43.
7. *Ю. Ф. Коробейник.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям, Мат. заметки, 31, № 5, 1982, 723—737.
8. *L. Brown, A. Shields, K. Zeller.* On absolutely convergent exponential sums, Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 96, № 1, 162–183.
9. *L. Rubel, A. Shields.* The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, 16, № 1, 1966, 235–277.
10. *K. Hoffman, H. Rossi.* Extensions of positive weak *-continuous functions, Duke Math. J., 34, № 3, 1967, 453–466.
11. *В. П. Хавин.* Пространства H^{∞} и L^1/H^1_0. Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 39, 1974, 120—148.
12. *Н. К. Никольский.* Современное состояние проблемы спектрального анализа-синтеза, Сб. Теория операторов в функциональных пространствах, «Наука», 1977, 240—282.
13. *П. К. Суетин.* Ряды по многочленам Фабера, «Наука», 1984.
14. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966.
15. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, 1965.

УДК 517.5

О наилучшем приближении классов функций с ограниченной первой производной кусочно-постоянными в одномерном и двумерном случаях. Апакян А. М. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 215—235.

В статье получены точные оценки погрешности приближения соболевских классов кусочно-постоянными в произвольном пространстве L_q. Некоторые оценки обобщены для функций двух переменных. Библиографий 6.

УДК 517.5,517.9

Кратная интерполяция в весовых классах Харди и регуляризация расходящихся интегралов. Дыбин В. Б. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 236—260.

Работа содержит обобщение некоторых результатов М. М. Джрбашяна, относящихся к кратной интерполяции в полуплоскости (Р. Ж. Мат., 1979, 3690) на пространства Харди с A_p весом $1<p<\infty$. Доказывается интерполяционная теорема в H_2 в случае, когда интерполяция реализуется на действительном множестве Карлесона. Этот результат используется для регуляризации интегралов, расходящихся на счетных множествах. Библиографий 30.

УДК 517.444

Интегральные неравенства в весовых рефлексивных пространствах Орлича для сопряженной функции. Казарян С. С. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 261—273.

В настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия на весовые функции, чтобы для сопряженной функции $\tilde{f}(x)$ имели место, следующие интегральные неравенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}(x))\, w(x)\, dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\, w(x)\, dx;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(w(x)\, \tilde{f}(x))\, dx \leqslant C'_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(w(x)\, f(x))\, dx.$$

Библиографий 11.

УДК 517.53

Аппроксимация гармоническими функциями на замкнутых подмножествах плоских областей. Нерсесян А. А. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 274—283.

Описаны некомпактные замкнутые подмножества плоской области, на которых равномерно аппроксимируемы гармоническими в области функциями функции, непрерывные на подмножестве, гармонические внутри и ограниченные на границе подмножества. Доказывается, что для этих подмножеств существует скорость такая, что функции, непрерывные на подмножестве, гармонические внутри и на его границе возрастающие не быстрее данной скорости (при стремлении точки к границе области), также аппроксимируемы. В терминах гармонической меры границы этих множеств указан интегральный критерий, характеризующий класс аппроксимируемых функций. Библиографий 11.

УДК 517.98

Полиэдральные пространства: крайние операторы и расстояние Банаха—Мазура. Восканян В. В. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 284—292.

Для пары конечномерных полиэдральных пространств X и Y описываются в матричных терминах крайние операторы из X в Y, а также расстояние Банаха—Мазура $d(X, Y)$ в случае, когда крайние точки единичных шаров $S(X)$ и $S(Y)$ явно выписаны. Библиографий 7.

УДК 517.53

О равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости и аналоге теоремы Акутовича. Джрбашян А. М. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 293—302.

В статье установлены две теоремы о равномерной аппроксимации с произвольной точностью в классах мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости посредством произведений типа Бляшке. Одна из этих теорем является своеобразным аналогом известной теоремы Шура. Установлен также аналог хорошо известной теоремы Акутовича для указанных классов мероморфных функций. Библиографий 10.

УДК 517.53

О представлении аналитических функций рядами простых дробей. Аветисян Р. А6. Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», 1990, XXV, № 3, 303—308.

В настоящей статье рассматривается вопрос о представлении аналитических функций рядами простых дробей в областях G со спрямляемой жордановой границей. Показывается, что если функция $f(z)$ есть интеграл Коши функции g интегрируемой по определенному весу ω на ∂G, то f можно представить G в виде ряда $\sum_{1}^{\infty} A_k/(\zeta_k - z)$ и оценить коэффициенты A_k. Библиографий 15.