ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.53

А. М. ДЖРБАШЯН

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ И АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ АКУТОВИЧА

Введение

Статья посвящена установлению двух теорем о равномерной аппроксимации с произвольной точностью в классах мероморфных функций обобщенно-ограниченного вида в полуплоскости [1], [2], [3] посредством произведений типа Бляшке [4], [5], а также установлению аналога в указанных классах хорошо известной теоремы Акутовича [6] (см. также [7], стр. 191, [8], стр. 198).

1. Прежде чем сформулировать установленные в статье теоремы, необходимо привести ряд определений и результатов, лежащих в их основе.

Классом $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ функций обобщенно-ограниченного вида в нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{w:\operatorname{Im} w<0\}$ впредь будем называть множество мероморфных в $G^{(-)}$ функций, допускающих представление вида

$$F(w)=\frac{B_\alpha(w,\{a_m\})}{B_\alpha(w,\{b_n\})}\exp\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}+iC\right\};\ w\in G^{(-)}, \tag{1}$$

где C — вещественное число, $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке из $(-\infty,+\infty)$, подчиненная условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|d\mu(t)|}{1+|t|^{1+\alpha-p}}<+\infty\ (p\text{ — целое, } p-1<\alpha\leqslant p). \tag{2}$$

Далее, в представлении (1)

$$B_\alpha(w,\{a_m\})\equiv\prod_m b_\alpha(w,a_m),\ B_\alpha(w,\{b_n\})\equiv\prod_n b_\alpha(w,b_n)$$

— аналитические в $G^{(-)}$ функции, суть произведения типа Бляшке для полуплоскости $G^{(-)}$, составленные по нулям $\{a_m\}\subset G^{(-)}$ и полюсам $\{b_n\}\subset G^{(-)}$ функции $F(w)$. При этом, произведение $B_\alpha(w,\{b_n\})$ сходящееся $(\not\equiv 0)$, ибо впредь для последовательности $\{b_n\}$ предполагается выполненным условие сходимости этого произведения

$$\sum_n|\operatorname{Im} b_n|^{1+\alpha}<+\infty. \tag{3}$$

При любых $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ и $\zeta=\xi+i\eta\in G^{(-)}$ элементарный фактор $b_\alpha(w, \zeta)$ произведения B_α — аналитическая в $G^{(-)}$ функция с единственным и простым нулем в точке ζ, представимая в виде

$$b_\alpha(w, \zeta)=\exp\{-\Omega_\alpha(w, \zeta)\}, \tag{4}$$

где

$$\Omega_\alpha(w, \zeta)=\int\limits_{-|\eta|}^{|\eta|}\frac{(|\eta|-|t|)^\alpha\,dt}{[i(w-\xi)-t]^{1+\alpha}}\equiv-\log b_\alpha(w, \zeta). \tag{5}$$

Классы функций обобщенно-ограниченного вида в $G^{(-)}$ ассоциированы с оператором дробного интегродифференцирования Вейля. На множестве допустимых функций этот оператор определяется следующим образом:

$$W^{-\alpha}U(w)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}U(w-i\sigma)\,d\sigma,\ 0<\alpha<+\infty,$$

$$W^0U(w)=U(w),$$

$$W^\alpha U(w)=W^{-(p-\alpha)}\left\{\frac{\partial^p}{\partial(\operatorname{Im} w)^p}U(w)\right\};\ 0<\alpha<+\infty$$

(p — целое число такое, что $p-1<\alpha\leqslant p$).

2. Основными результатами статьи являются нижеприведенные три теоремы. Первые две из них относятся к равномерной аппроксимации функций классов $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ и являются своеобразными аналогами результатов М. М. Джрбашяна и Н. У. Аракеляна (см. [9], стр. 524 и теоремы 5.12, 5.13) о равномерной аппроксимации функций обобщенно-ограниченного вида в круге. Третья — напоминает вышеупомянутую теорему Акутовича для аналитических и ограниченных в полуплоскости функций, однако установлена для значительно более общих классов $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$.

Теорема I. *Класс $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций, допускающих в $G^{(-)}$ представление вида*

$$F(w)=\frac{B_\alpha(w, \{a_m\})}{B_\alpha(w, \{b_n\})}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\lim_{\eta\to-0}|\eta|^{-1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\log b_\alpha(w, t+i\eta)\,d\mu(t)+iC\right\}, \tag{6}$$

где предельный переход равномерен внутри $G^{(-)}$, $\{b_n\}\subset G^{(-)}$ — последовательность, подчиненная условию (3), $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке из $(-\infty, +\infty)$, подчиненная условию (2), а C — вещественное число.

Теорема II. *Пусть функция $F(w)\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ имеет вид*

$$F(w) = B_\alpha(w, \{a_m\}) \exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\};\ w \in G^{(-)}, \quad (7)$$

где $\mu(t)$ — *монотонно неубывающая функция, подчиненная условию* (2).

Тогда при любых натуральных $\varkappa$ *и* N *существует треугольная таблица отличных друг от друга комплексных чисел* $\{w_l^{(k)}(\varkappa, N)\} \subset G^{(-)}$ $(k = 1, 2, \cdots;\ l = 1, 2, \cdots, k)$, *такая, что*

1°. *Для любого* $k \geqslant 1$

$$\operatorname{Im} w_l^{(l)}(\varkappa, N) = \eta_\varkappa(\varkappa, N)\ (l = 1, 2, \cdots, k),$$

причем

$$\sup_{k \geqslant 1, \varkappa \geqslant 1} |k|\eta_k(\varkappa, N)|^{1+\alpha}| < \frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\left|\ \overset{N}{\underset{-N}{V}}\mu + 1\right|.$$

2°. *Из ассоциированных с этой таблицей конечных произведений*

$$B_\alpha(w, \{w_l^{(k)}(\varkappa, N)\}_1^k) = \prod_{l=1}^{k} b_\alpha(w, w_l^{(k)}(\varkappa, N))$$

можно извлечь последовательность $\{B_\alpha(w, \{w_l^{(k_j)}(\varkappa_j, N_j)\}_1^{k_j})\}_{j=1}^{\infty}$ — *такую, что равномерно внутри* $G^{(-)}$

$$F(w) = B_\alpha(w, \{a_m\}) \lim_{j\to\infty} B_\alpha(w, \{w_l^{(k_j)}(\varkappa_j, N_j)\}_1^{k_j}).$$

Замечание. 1. Эта теорема является аналогом теоремы Шура [10] о том, что любую аналитическую и ограниченную в единичном круге (либо в полуплоскости) функцию можно равномерно аппроксимировать последовательностью произведений Бляшке. Однако, в случае $\alpha = 0$ ее утверждение по существу отлично от указанной теоремы Шура.

Замечание 2. Факторизационную формулу (1) можно представить в виде отношения двух функций вида (7), умноженного на число с модулем, равным единице. Поэтому из теоремы II непосредственно вытекает аналогичная теорема о равномерной аппроксимации произвольных мероморфных функций класса $N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ посредством дробей от двух конечных произведений типа Бляшке.

Теорема III. *Пусть* $F(w) \in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $F(w) \not\equiv 0$. *Тогда*

1°. Если

$$\lim_{v \to -0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|W^{-\alpha}\log|F(u+iv)|\right|\frac{du}{1+u^2} = 0, \quad (8)$$

то $F(w)$ *имеет вид*

$$F(w) = e^{iC}\frac{B_\alpha(w, \{a_n\})}{B_\alpha(w, \{b_n\})},\ w \in G^{(-)}, \quad (9)$$

где C — *вещественное число, а* B_α — *сходящиеся произведения типа Бляшке с нулями* $\{a_m\} \subset G^{(-)}$ *и* $\{b_n\} \subset G^{(-)}$, *подчиненными условиям вида* (3).

2°. *Обратно, если $F(w)$ имеет вид* (9), *то*

$$\lim_{v\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty}|W^{-\alpha}\log|F(u+iv)||du=0. \tag{10}$$

Замечание. Как и в случае с теоремой II, теорема III, являясь аналогом теоремы Акутовича для классов $N_\alpha\{G^{(-)}\}$, в случае $\alpha=0$ переходит в утверждение, по существу отличающееся от нее.

§ 1. Доказательство теорем I и III

1.1. Доказатлеьству теоремы I предпошлем следующую лемму.

Лемма 1.1. *При любых* $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ *и* $t+i\eta\in G^{(-)}$ *справедливо представление*

$$\Omega_\alpha(w,t+i\eta)=\frac{2|\eta|^{1+\alpha}}{(1+\alpha)[i(w-t)]^{1+\alpha}}+R_\alpha(w,t+i\eta),\quad w\in G^{(-)}, \tag{1.1}$$

где величина R_α такова, что для любого компакта $\mathbf{K}\in G^{(-)}$, любых $w\in\mathbf{K}$ и $t\in(-\infty,+\infty)$ имеет место оценка

$$|R_\alpha(w,t+i\eta)|\leqslant\frac{C_\alpha(\mathbf{K})|\eta|^{2+\alpha}}{1+|t|^{2+\alpha}};\quad|\eta|<\frac{1}{2}\min_{w\in\mathbf{K}}|\operatorname{Im}w|, \tag{1.2}$$

в которой $C_\alpha(\mathbf{K})$ — постоянная, зависящая лишь от α и компакта $\mathbf{K}$.

Доказательство в силу леммы 1.2 из работы [5] сводится к установлению оценки (1.2) для функции

$$R_\alpha(w,t+i\eta)=$$

$$=\int_0^{|\eta|}\left\{\frac{1}{[i(w-t)-\sigma]^{2+\alpha}}-\frac{1}{[i(w-t)+\sigma]^{2+\alpha}}\right\}(|\eta|-\sigma)^{1+\alpha}d\sigma.$$

Это, в свою очередь, следует из легко проверяемых неравенств

$$2|i(w-t)\pm\sigma|\geqslant\begin{cases}|t|, & \text{при } |t|\geqslant 2\varkappa+\rho\\ \rho, & \text{при } |t|\leqslant 2\varkappa+\rho\end{cases}\quad(0<\sigma<|\eta|),$$

где $\varkappa=\max\limits_{w\in K}|\operatorname{Re}w|$, а $\rho=\min\limits_{w\in K}|\operatorname{Im}w|$.

Доказательство теоремы I. Покажем сначала, что если функция $F(w)\in N_\alpha\{G^{(-)}\}$ $(-1<\alpha<+\infty)$, то она допускает также представление вида (6). Для этого заметим, что в силу (5) и (1.1) при любом $\eta<0$

$$\frac{1}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}=-\frac{1+\alpha}{2}\,\frac{\log b_\alpha(w,t+i\eta)}{|\eta|^{1+\alpha}}-\frac{1+\alpha}{2}\,\frac{R_\alpha(w,t+i\eta)}{|\eta|^{1+\alpha}}.$$

Подставим это равенство в (1) и приведем экспоненциальный множитель факторизации функции $F(w)$ к следующему виду:

$$\exp\left\{-\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}|\eta|^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\log b_{\nu}(w, t+i\eta)\,d\mu(t)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}|\eta|^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\alpha}(w, t+i\eta)\,d\mu(t)+iC\right\}. \tag{1.3}$$

Заметим теперь, что в силу оценки (1.2)и условия (2) для любого компакта $K\subset G^{(-)}$, равномерно по $w\in K$ выполнено соотношение

$$\lim_{\eta\to-0}|\eta|^{-1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\alpha}(w, t+i\eta)\,d\mu(t)=0 \tag{1.4}$$

и, тем самым, справедливо представление (6), где предел равномерен относительно w внутри $G^{(-)}$.

Из представления (6), ввиду (1.3) и (1.4) следует, что $F(w)\in N_{\alpha}\{G^{(-)}\}$.

1.2. Доказательство теоремы III. Утверждение 2° теоремы доказано в работе автора [5] (соотношение (3.11)). Для доказательства утверждения 1° отметим, что из формулы (1) (как нетрудно убедиться воспользовавшись равенством (2.6) работы [5]) следует представление

$$W^{-\alpha}\log|F(w)|=W^{-\alpha}\log\left|\frac{B_{\alpha}(w, \{a_m\})}{B_{\alpha}(w, \{b_n\})}\right|+$$

$$+\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(u-t)^2+v^2};\quad w=u+iv\in G^{(-)}. \tag{1.5}$$

При этом функцию $\mu(t)$ можно представить в виде разности $\mu(t)=\mu_1(t)-\mu_2(t)$, где $\mu_{1,2}(t)$ — монотонно неубывающие функции, подчиненные условию вида (2).

Пользуясь представлением (1.5) и соотношениями (8), (10) получаем, что обозначая

$$\Phi(w)=\frac{|v|}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{(u-t)^2+v^2}\right|,\quad w=u+iv\in G^{(-)}, \tag{1.6}$$

будем иметь

$$\lim_{v\to-0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u+iv)}{1+u^2}\,du=0.$$

Заметим, что при любых $x\in(-\infty, +\infty)$ и $y\in(0, +\infty)$ имеет место оценка

$$\frac{y}{\pi}\frac{C(x, y)}{(x-u)^2+y^2}\leqslant\frac{1}{1+u^2}\ (-\infty<u<\infty),$$

где $C(x, y)>0$ — постоянная, зависящая лишь от x и y. Поэтому

$$\lim_{v \to -0} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u+iv)}{(x-u)^2+y^2} du = 0. \tag{1.7}$$

Введем теперь обозначения

$$\varphi_{1,2}(w) = \frac{|v|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_{1,2}(t)}{(u-t)^2+v^2}, \quad w = u+iv \in G^{(-)}, \tag{1.8}$$

$$I_{1,2} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{1,2}(u+iv)}{(x-u)^2+y^2} du, \quad v < 0. \tag{1.9}$$

Тогда, в силу формулы

$$\frac{y|v|}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[(x-u)^2+y^2][(u-t)^2+v^2]} = \frac{1}{\pi} \frac{y+|v|}{(x-t)^2+(y+|v|)^2},$$

будем иметь

$$I_{1,2} = \frac{y+|v|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_{1,2}(t)}{(x-t)^2+(y+|v|)^2}.$$

Заметим теперь, что при любом $v < 0$ справедлива оценка

$$\frac{y+|v|}{\pi} \frac{C'(x, y)}{(x-t)^2+(y+|v|)^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

где $C'(x, y) > 0$ — постоянная, зависящая лишь от $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y \in (0, +\infty)$. Следовательно, в силу теоремы Лебега

$$\lim_{v \to -0} I_{1,2} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_{1,2}(t)}{(x-t)^2+y^2}. \tag{1.10}$$

Однако, ввиду (1.6), (1.8) и (1.9)

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u+iv)}{(x-u)^2+y^2} du \geqslant |I_1 - I_2|,$$

что вместе с (1.7) и (1.10) приводит к равенству нулю величины

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2+y^2} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_1(t)}{(x-t)^2+y^2} - \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu_2(t)}{(x-t)^2+y^2}.$$

Отсюда, в силу произвольности $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y \in (0, +\infty)$ следует, что $\mu(t) = \mathrm{const}$, и, тем самым, формула (1) сводится к виду (9).

§ 2. Доказательство теоремы II

2.1. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ *и* $N\geqslant 1$ — *любые, а*

$$f_0(w,\ N)=\exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\},\quad w\in G^{(-)},$$

где $\mu(t)$ — *непрерывная, монотонно возрастающая функция на* $[-N,\ N]$.

Тогда существует треугольная таблица отличных друг от друга комплексных чисел $\{w_l^{(k)}(\mu,\ N)\}_{l=1}^{k}\subset G^{(-)}$ $(k=1,2,\cdots)$, *такая, что*

1° *Для любого* $k\geqslant 1$

$$\operatorname{Im} w_l^{(k)}(\mu,\ N)=\eta_k(\mu,\ N)\ (l=1,\ 2,\cdots,\ k),\tag{2.1}$$

причем

$$|\eta_k(\mu,\ N)|^{1+\alpha}=\frac{1}{k}\ \frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\ \mathop{V}_{-N}^{N}\mu.\tag{2.2}$$

2°. *Внутри* $G(-)$ *равномерно выполняется соотношение*

$$f_0(w,\ N)=\lim_{k\to\infty}E_\alpha(w,\ \{w_l^{(k)}(\mu,\ N)\}_1^k).\tag{2.3}$$

Доказательство. Для любого $k\geqslant 1$ произведем разбиение отрезка $[-N,\ N]$ точками $-N=t_1^{(k)}<t_2^{(k)}<\cdots<t_k^{(k)}<t_{k+1}^{(k)}=N$ таким образом, чтобы

$$\mu(t_{l+1}^{(k)})-\mu(t_l^{(k)})=\frac{1}{k}\mathop{V}_{-N}^{N}\mu\ (l=1,2,\cdots,k).$$

Будем полагать

$$\eta_k\equiv\eta_k(\mu,\ N)=-\left|\frac{\Gamma(2+\alpha)}{2\pi}\mathop{V}_{-N}^{N}\mu\right|^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

$$w_l^{(k)}(\mu,\ N)=t_l^{(k)}+i\eta_k(k=1,2,\cdots;\ l=1,2,\cdots,\ k).$$

Тогда, очевидно, утверждения 1° выполнены.

Заметим теперь, что в силу (5) и (1.1)

$$\log B_\alpha(w,\ \{w_l^{(k)}(\mu,\ N)\}_1^k)=\sum_{l=1}^{k}\log b_\alpha(w,\ w_l^{(k)}(\mu,\ N))=$$

$$=-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\sum_{l=1}^{k}\frac{\mu(t_{l+1}^{(k)})-\mu(t_l^{(k)})}{[i(w-t_l^{(k)})]^{1+\alpha}}-\sum_{l=1}^{k}R_\alpha(w,\ t_l^{(k)}+i\eta_k).$$

Однако, если $\mathbf{K}\subset G^{(-)}$ — произвольный компакт, то, в силу (1.2), равномерно по $w\in\mathbf{K}$ выполняется оценка

$$\left|\sum_{l=1}^{k}R_\alpha(w,\ t_l^{(k)}+i\eta_k)\right|\leqslant C_\alpha(\mathbf{K})\,k\,|\eta_k|^{2+\alpha}=o(1).$$

Далее, очевидно, что равномерно по $w\in\mathbf{K}$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{\mu(t_{l+1}^{(k)})-\mu(t_l^{(k)})}{[i(w-t_l^{(k)})]^{1+\alpha}}=\int_{-N}^{N}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}$$

и, тем самым, справедливо соотношение (2.3).

2.2. **Доказательство теоремы II.** Пусть $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ — любое, и

$$f(w)\equiv\exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\},$$

$$f(w,\ N)=\exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\},$$

где $\mu(t)$ — монотонно неубывающая функция, подчиненная условию (2).

Предположим, что $\{\mathbf{K}_j\}_1^\infty$ — исчерпывающее $G^{(-)}$ семейство компактов, то есть, что

$$\mathbf{K}_j\subseteq\mathbf{K}_{j+1}\ (j=1,\ 2,\cdots)\ \text{и}\ \bigcup_{j=1}^{\infty}\mathbf{K}_j=G^{(-)}.$$

Далее, для любого $j\geqslant 1$ выберем N_j $(N_{j+1}>N_j)$ настолько большим, чтобы при $w\in\mathbf{K}_j$ имели

$$|f(w)-f(w,\ N_j)|<\frac{1}{3j}\,. \tag{2.5}$$

Введем теперь в рассмотрение последовательность непрерывных, монотонно возрастающих на $[-N,\ N]$ $(N\geqslant 1)$ функций

$$\mu_\varkappa(t)=\varkappa\int_{t}^{t+\frac{1}{\varkappa}}\varphi_\varkappa(x)\,dx+\frac{t}{2\varkappa N},\quad \varkappa=1,2,\cdots,$$

где

$$\varphi_\varkappa(t)=\begin{cases}\mu(N),\ \text{при}\ t\geqslant N\\ \mu(t),\ \text{при}\ -N+\dfrac{1}{\varkappa}<t<N\\ \mu(-N),\ \text{при}\ -N\leqslant t\leqslant -N+\dfrac{1}{\varkappa}.\end{cases}$$

Как нетрудно убедиться, при любом $t\in[-N,\ N]$

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\mu_\varkappa(t)=\mu(t)$$

и, одновременно, при любом $\varkappa\geqslant 1$

$$|\mu_\varkappa(t)|<|\mu(-N)|+\bigvee_{-N}^{N}\mu+1,\quad \bigvee_{-N}^{N}\mu_\varkappa\leqslant\bigvee_{-N}^{N}\mu+1.$$

Поэтому, в силу теоремы Хелли о предельном переходе в интеграле Стильтьеса

$$\lim_{\varkappa\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \frac{d\mu_{\varkappa}(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}} = \int\limits_{-N}^{N} \frac{d\mu(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}, \quad w\in G^{(-)}. \tag{2.6}$$

При этом, легко проверить, что это соотношение равномерно по w внутри $G^{(-)}$.

При любых $\varkappa\geqslant 1$ и $j\geqslant 1$ положим

$$f_{\varkappa}(w, N_j) = \exp\left\{-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int\limits_{-N_j}^{N_j}\frac{d\mu_{\varkappa}(t)}{[i(w-t)]^{1+\alpha}}\right\}, \quad w\in G^{(-)}.$$

Тогда, в силу (2.6), можно подобрать последовательность натуральных чисел $\{\varkappa_j\}_1^{\infty}$ так, чтобы при любом $j\geqslant 1$

$$|f(w, N_j) - f_{\varkappa_j}(w, N_j)| < \frac{1}{3j}, \quad w\in \mathrm{K}_j. \tag{2.7}$$

В силу леммы 2.1, при любом $j\geqslant 1$ существует треугольная таблица отличных друг от друга комплексных чисел $\{w_l^{(k)}(\varkappa_j, N_j)\}$ $(k=1, 2,\cdots, l=1, 2,\cdots, k)$, подчиненная условиям (2.1) и (2.2), такая, что равномерно по w внутри $G^{(-)}$ выполнено соотношение (2.3). Следовательно, можно выделить последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_1^{\infty}$ такую, что при любом $j\geqslant 1$

$$\left|B_{k_j}\left(w, \{w_l^{(k_j)}(\varkappa_j, N_j)\}_1^{k_j}\right) - f_{\varkappa_j}(w, N_j)\right| < \frac{1}{3j}, \quad w\in \mathrm{K}_j.$$

Отсюда и из неравенств (2.5), (2.7) следует утверждение теоремы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26. I. 1988

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կիսահարթության մեջ ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտարկման և Ակուտովիչի թեորեմի համանմանի մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցված է երկու թեորեմ հավասարաչափ մոտարկման մասին կիսահարթության մեջ ընդհանրացված սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների դասերում Բլյաշկեյի տիպի արտադրյալների միջոցով։ Այդ թեորեմներից մեկը Շուրի հայտնի թեորեմի յուրօրինակ համանմանն է։ Ապացուցված է նաև Ակուտովիչի հայտնի թեորեմի համանմանը մերոմորֆ ֆունկցիաների նշված դասերի համար։

A. M. DJRBASHIAN (JERBASHYAN). *On uniform approximation of functions of generalized bounded type in the half-plane and the analogue of Akutowicz's theorem* (summary)

In the paper two theorems on uniform approximation by Blaschke type products are established in the classes of functions of generalized bounded type in the half-plane. One of these theorems is an original analogue of Schur's well known theorem. There is also proofed an analogue of Akutowicz's well known theorem for the pointed classes of meromorphic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Джрбашян*. Факторизация некоторых общих классов мероорфных в полуплоскости функций, ДАН СССР, 1981, 257, № 1, 21—25.
2. *А. М. Джрбашян*. Факторизация, параметрические представления и граничные свойства некоторых общих классов мероморфных в полуплоскости функций, автореферат дис. на соискание уч. степ. кандидата физ.-мат. наук, Харьков, 1983.
3. *А. М. Джрбашян*. Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для мероморфных в полуплоскости функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1986, XXI, № 3, 213—279.
4. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 1979, 246, № 6, 1295—1298.
5. *А. М. Джрбашян*. Функции типа Бляшке для полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1983, XVIII, № 6, 410—440.
6. *E. J. Akutowicz*. A qualitative characterization of Blaschke product in a half-plane, Amer. J. Math., 1956, v. 78, 677—684.
7. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1975.
8. *P.L. Duren*. Theory of H^p Spaces, Ac. Press, New York and London. 1970.
9. *М. М. Джрбашян*. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сборник, 1969, 79 (121), № 4 (8), 517—615.
10. *J. Schur*. Über Potenzreihen, die im Inneren des Einheitskreises beschräukt sind, J. reine und angew. Math., 1916, v. 147. 205—232, 1918, v. 148, 122—145.