

УДК 517.53

А. А. НЕРСЕСЯН

АПРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ
НА ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ
ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Пусть D — область в конечной комплексной плоскости с непустой границей в расширенной плоскости ($\partial D \neq \emptyset$); $D^* = D \cup \{\partial D\}$ — ее одноточечная компактификация и E — замкнутое в D подмножество ($E \subset D$). Из результатов работ [1], [2], [3] следуют необходимые, а также достаточные условия на E , при которых функции класса $H(E)$ (функции, непрерывные на E и гармонические на его внутренности E^0) можно аппроксимировать с любой точностью равномерно на E гармоническими в D функциями. В частности, множество $D^* \setminus \bar{E}$ должно быть локально связным и идеальной точке $\{\partial D\}$, где $\bar{E}$ — объединение E с предкомпактными в D компонентами $D \setminus E$. В настоящей работе мы будем рассматривать равномерную аппроксимацию на множествах, вообще говоря, неудовлетворяющих упомянутому необходимому условию. Полученный результат находит применение в решении задачи, поставленной Л. А. Рубелем (см. [4]). Теоремы 1 и 2 анонсированы в [4] и [5] в случае $E^0 = \emptyset$.

Будем говорить, что множество F линейно достижимо из области $V(F, V \subset \mathbb{C})$, если существует такой непрерывный путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$, что для произвольного открытого U , $F \subset U$, $\gamma(t) \in U$, для значений параметра $t \in [0, 1)$, достаточно близких к 1.

Через $C_\infty(\partial E)$ будем обозначать класс ограниченных непрерывных функций на $\partial E = \partial E \cap D$ и для положительной на ∂E непрерывной функции ψ обозначим через $C_\psi(\partial E)$ класс непрерывных на ∂E функций, растущих при $z \rightarrow \partial D$ не быстрее функции ψ ($f \in C_\psi(\partial E)$, если $|f| < c_\psi \psi$ на ∂E , при некоторой постоянной $c_\psi > 0$). Через $H_D(E)$ обозначим класс функций, равномерно на E аппроксимируемых с любой точностью гармоническими в D функциями.

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

- $C_\infty(\partial E) \cap H(E) \subset H_D(E)$.
- $C_\psi(\partial E) \cap H(E) \subset H_D(E)$, при некоторой положительной непрерывной на ∂E функции ψ такой, что $\psi(z) \rightarrow +\infty$, при $z \rightarrow \partial D$.

с) (i) Если V — область, $\partial V \subset E \cup \partial D$ и ∂D линейно недостижима из V , то $V \cap \partial E = \emptyset$. (ii) Для произвольного компакта $K \subset D$ существует такой компакт $\bar{K} \subset D$, что если V — область, $\partial V \subset E \cup K \cup \partial D$ и ∂D линейно недостижима из V , то $(V \setminus \bar{K}) \cap \partial E = \emptyset$.

Для множеств, удовлетворяющих условию с), допустимую скорость возрастания аппроксимируемых функций (т. е. функцию v) можно описать с помощью метрических характеристик множества E , в частности, гармонической мерой определенных порций его границы в надлежащих открытых множествах. Такое описание содержится в следующем утверждении, характеризующем класс $H_D(E)$ для множеств, удовлетворяющих условию с).

Пусть K_n , $n = 1, 2, \dots$ — компактное исчерпание области D . G_n — объединение тех компонент множества $D \setminus (E \cup B_n)$, из которых ∂D линейно недостижима, но которые линейно связаны с ∂D вне $E \cup B_{n-1}$; $n = 2, 3, \dots$ ($B_1 = \emptyset$)

Теорема 2. Пусть E удовлетворяет условию с) теоремы 1. Для того, чтобы функция $f \in H(E)$ принадлежала $H_D(E)$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $n \geq 1$ и компактном $K \subset D$ выполнялось неравенство

$$\sup \left\{ \int_{\partial G_n \setminus E_m} f d\mu_z : z \in K \cap G_n \right\} < +\infty, \quad (1)$$

где $d\mu_z$ — гармоническая мера на границе открытого множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$; $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, а $m \geq n$ — произвольное натуральное число.

Легко видеть, что условие (1) не зависит от выбора конкретного исчерпания.

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Если подмножество $F \subset \partial \Omega$ линейно недостижимо из открытого множества Ω , то его гармоническая мера в Ω равна нулю.

Доказательство опирается на следующие замечания.

1) Если гармоническая мера μ_E подмножества $E \subset \partial \Omega$ положительна в (некоторой компоненте) Ω , то

$$\sup_{\Omega} \mu_E = 1$$

(см. [6], стр.264).

II) Если гармоническая мера μ_E замкнутого подмножества $E \subset \partial \Omega$ тождественно не равна единице ни в одной компоненте Ω , то в каждой точке $x_0 \in \partial \Omega \setminus E$ выполнено условие

$$\lim_{z \rightarrow x_0, z \in \Omega} \mu_E(z) < 1.$$

В самом деле. Выберем $\delta > 0$ такое, что $D(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$ и обозначим μ_E^* гармоническую меру E относительно множества $\Omega^* = \Omega \cup$

$\cup D(x_0, \delta) (D(x_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < \delta\})$. Согласно принципу расширения имеем $\mu_E^* \geq \mu_E$ в Ω и, в частности, в $\Omega \cap D(x_0, \delta)$, причем μ_E^* тождественно не равна единице. Так как $x_0 \in (\Omega^*)^n$, то $\sup_{D(x_0, \delta/2)} \mu_E^* = \lambda < 1$.

Повтому в $\Omega \cap D(x_0, \delta/2)$ имеет место неравенство $\mu_E^* < \lambda$, из чего следует требуемое соотношение.

Благодаря регулярности гармонической меры как борелевой меры на компакте $\partial\Omega \subset \bar{\Omega}$ достаточно доказать, что $\mu_F(z) = 0$; $z \in \Omega$, в случае замкнутого линейно недостижимого $F \subset \partial\Omega$. Предположим, что $\mu_F > 0$ в некоторой компоненте $\bar{\Omega} \subset \Omega$. В силу замкнутости и линейной недостижимости F имеем $0 < \mu < 1$ в $\bar{\Omega}$. Согласно замечанию 1), $A_1 = \{z \in \bar{\Omega}; \mu_F(z) > 1/2\}$ является открытым не пустым подмножеством $\bar{\Omega}$. Обозначим A_1 некоторую компоненту A_1 . Имеем $\mu_F = 1/2$ на $\partial A_1 \cap \Omega$. Ясно, что $\partial A_1 \cap \partial\bar{\Omega}$ может состоять только из иррегулярных точек Ω и поэтому имеет гармоническую меру нуль в A_1 (см. [6], теорема VIII на стр. 253 и замечание на стр. 265). Если бы гармоническая мера $\partial A_1 \cap F$ была бы равна нулю в A_1 , то мы имели бы $\mu_F = 1/2$ на A_1 . Поэтому $\sup_{A_1} \mu_F = 1$, так как $\mu_F(z, \Omega) > \mu_F(z, A_1)$; $z \in A_1$, а $\sup_{A_1} \mu_F(z, A_1) = 1$.

Фиксируем произвольную точку $z_1 \in A_1$ и обозначим A_2 некоторую компоненту непустого открытого подмножества A_1 , на котором $\mu_F > 2/3$. Фиксируем точку $z_2 \in A_2$. Продолжив этот процесс получим последовательность вложенных областей $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и точек $z_i \in A_i$ таких, что

$$\mu_F(z) > 1 - \frac{1}{i+1}; \quad z \in A_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Из замечания II) легко следует, что какова бы ни была открытая окрестность V множества F , начиная с некоторого номера все $A_i \subset V$. Соединим ломаной $\gamma_i \subset A_i$ точку z_i с z_{i+1} при всех $i \geq 1$. Рассматривая путь $\gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ легко видеть, что его предельное множество принадлежит F , что противоречит его линейной недостижимости. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть Ω — открытое множество, регулярное в смысле задачи Дирихле, $F \subset \partial\Omega$ — линейно недостижимо из Ω и $f \in C(\partial\Omega \setminus F)$. Если существует гармоническая в Ω функция U такая, что $U = f$ на $\partial\Omega \setminus F$, то U является решением обобщенной задачи Дирихле в Ω для произвольно продолженной на $\partial\Omega$ функции f . В частности

$$U(z) = \int_{\partial\Omega \setminus F} f d\mu_z; \quad z \in \Omega, \quad (2)$$

причем интеграл сходится в каждой точке $z \in \Omega$.

Доказательство. Рассмотрим случай неотрицательной функции f . Сначала заметим, что интеграл (2) конечен в Ω . В самом деле, согласно обобщенному принципу максимума, доказанному в [7], имеем $U \geq 0$ в Ω и

$$\int_{\partial\Omega \setminus F} f_n d\mu_z \leq U(z), \quad z \in \Omega, \quad n \geq 1,$$

где $f_n = \inf(n, f)$. Согласно лемме 1, для произвольно продолженной на $\partial\Omega$ функции f имеем

$$W(z) = \int_{\partial\Omega} f d\mu_z = \sup_n \int_{\partial\Omega \setminus F} f_n d\mu_z \leq U(z); \quad z \in \Omega.$$

Так как, учитывая регулярность множества Ω , функция W является гармонической в Ω , совпадающей на $\partial\Omega \setminus F$ с f (теорема М. Брело, [8], стр. 110), согласно упомянутому обобщенному принципу максимума имеем $U = W$ в Ω .

Доказательство теоремы 1. а) $\Rightarrow$ с). Предположим, что E не удовлетворяет условию с i). Тогда существует область V , из которой ∂D линейно недостижима, $\partial V \subset E \cup \partial D$ и $V \cap \partial E \neq \emptyset$. Пусть $z_0 \in V \cap \partial E$ является точкой пика алгебры $R(X)$, где $X = (\bar{C} \setminus V) \cup E$ (см. [9]). Существует рациональная функция r с полюсами вне X , удовлетворяющая условиям

$$i) |r(z_0) - 1| < \frac{1}{4}, \quad (3)$$

$$ii) \|r\|_X < \frac{5}{4}, \quad iii) \|r\|_{X \setminus D(z_0, s)} < \frac{1}{4},$$

где $s > 0$ такое, что $\bar{D}(z_0, s) \subset V$. Функция $\operatorname{Re} r$ — гармоническая на X и удовлетворяет тем же оценкам (3). В частности, $\operatorname{Re} r \in C_-(\tilde{\partial}E)$. Если бы $\operatorname{Re} r \in H_D(E)$, то существовала бы $u \in H(D)$ такая, что

$$\|\operatorname{Re} r - u\|_E < \frac{1}{4}.$$

Согласно (3i) имеем

$$|u(z_0)| > \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Далее, с учетом (3iii) имеем

$$\|u\|_{\partial V} < \frac{1}{2},$$

откуда, согласно обобщенному принципу максимума работы [7],

$$\|u\|_V < \frac{1}{2},$$

что противоречит (4).

Предположим теперь, что E не удовлетворяет условию с ii) и пусть B_n , $n = 1, 2, \dots$ — произвольное компактное исчерпание области D . По предположению существует последовательность (необязательно различных) областей $V_n \subset D$, $n = 1, 2, \dots$ таких что $\bar{\partial} V_n \subset E \cup B_n$ ($n_0 \geq 1$), ∂D линейно недостижима из V_n и $(V_n \setminus B_{n_0+n}) \cap \partial E \neq \emptyset$, $n \geq 1$. Пусть $z_n \in V_n \setminus B_{n_0+n} \cap \partial E$ — точка пика алгебры $R(X_n)$, где $X_n = (\bar{C} \setminus V_n) \cup E \cup B_{n_0+n}$, $n \geq 1$, причем $z_n \neq z_m$, если $n \neq m$. Для чисел $\varepsilon_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1/4$, существуют рациональные функции r_n с полюсами вне X_n , удовлетворяющие условиям:

$$\text{i) } |r_n(z_n) - 1| < \varepsilon_n,$$

$$\text{ii) } \|r_n\|_{X_n} < 1 + \varepsilon_n, \text{ iii) } \|r_n\|_{X_n \setminus D(z_n, s_n)} < \varepsilon_n,$$

где $\bar{D}(z_n, s_n) \subset V_n \setminus B_{n_0+n}$, $n \geq 1$, и $\bar{D}(z_n, s_n) \cap \bar{D}(z_m, s_m) = \emptyset$, при $n \neq m$.

Сумма f ряда $\sum r_n$ является мероморфной в D функцией, ограниченной на E , причем

$$\text{i) } \|f\|_{D \setminus \cup V_n} < \frac{1}{4} \text{ и ii) } |f(z_n) - 1| < \frac{1}{4}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Функция $\operatorname{Re} f$ будет гармонической на E , также удовлетворяющей оценкам (5). Если бы существовала гармоническая в D функция u такая, что

$$\|f - u\|_E < \frac{1}{4},$$

то мы имели бы согласно (5i)

$$\|u\|_{\cup \partial V_n \setminus B_{n_0}} < \frac{1}{2} \quad (6)$$

и согласно (5ii)

$$|u(z_n) - 1| < \frac{1}{2}, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

На основании предложения 2.1 работы [10] можем утверждать, что из оценки (6) вытекает

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \partial D; z \in \cup V_n} |u(z)| < \frac{1}{2},$$

что, очевидно противоречит (7) по меньшей мере для достаточно больших n .

с) $\Rightarrow$ b). Пусть $\{B_n\}$ — некоторое компактное исчерпание области D , а множества G_n и гармоническая мера μ_z , $z \in \cup_{n=1}^{\infty} G_n$, определены как в теореме 2. Так как множество $F = \partial G_n \cap \partial D$ линейно недостижимо из $G_n = \emptyset$, в силу леммы 1 и теоремы Дини, при произвольном $n \geq 1$ имеем

$$\mu(z, \partial G_n \setminus B_m) \rightarrow 0, \text{ при } m \rightarrow +\infty,$$

равномерно по $z \in K \cap G_n$, для произвольного компакта $K \subset D$. Следовательно, существуют положительные функции $v_n \in C((0, 1))$ такие, что $v_n(t) \rightarrow +\infty$, при $t \rightarrow 0$, и для любого компакта $K \subset D$

$$\sup \left\{ \int_{\partial G_n \setminus B_n} v_n(\rho(\zeta, \partial D)) d\mu_{\partial D}(\zeta) : z \in K \cap G_n \right\} < +\infty, n \geq 1^*.$$

Выберем функцию $v \in C((0, 1))$ такую, что

$$\frac{n}{2} \leq v(t) \leq n, \text{ при } k_n \geq t > k_{n+1}, n = 1, 2, \dots,$$

где k_n находится из условия

$$\min(v_1, \dots, v_n) \geq n \text{ при } t \leq k_n; n = 1, 2, \dots$$

($k_n \rightarrow 0$). Будем иметь $v(t) \rightarrow +\infty$, при $t \rightarrow 0$ и $0 < v \leq v_n$, при $t \leq k_n$. Поэтому

$$\sup \left\{ \int_{\partial G_n \setminus B_n} v d\mu_{\partial D} : z \in K \cap G_n \right\} < +\infty,$$

при любом $n \geq 1$ и компактном $K \subset D$, т. е. для v выполнено условие (1) теоремы 2. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 нам остается фактически доказать достаточность в теореме 2.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Здесь мы воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из результатов работ [2], [3].

Теорема 3. (Готье, Гольдстейн, Оу, Хенгартнер, Лабреш). Пусть F — замкнутое подмножество области D . Тогда, если $F^c = D \setminus F$ связно и локально связно, то $H(F) \subset H_D(F)$.

Мы покажем, что для множества E и функции f , удовлетворяющих условиям теоремы 2, существуют: а) множество $\tilde{E}$ со связным и локально связным дополнением в D^* , $E \subset \tilde{E}$ и б) функция $\tilde{f} \in H(\tilde{E})$, с сужением $\tilde{f}|_E = f$.

При построении множества E мы будем часто опираться на следующее замечание.

(*). Если $\{\partial D\}$ линейно недостижима из попарно непересекающихся областей V_j , $\partial V_j \subset E \cup K$, $1 \leq j \leq N$ ($1 \leq N \leq +\infty$), где K — компактное подмножество E (возможно $K = \emptyset$) и для некоторой точки $z_0 \in \bigcap_{j=1}^N \bar{V}_j$ существует окрестность U_{z_0} такая, что $U_{z_0} \subset E \cup \bigcup_{j=1}^N V_j$, то существует область V , из которой ∂D линейно недостижима, $\partial V \subset E \cup K$ и $\bigcup_{j=1}^N V_j \subset V$. Легко видеть, что требуемыми свойствами обладает область $V = U_{z_0} \cup \bigcup_{j=1}^N V_j$.

* $\rho(\zeta, \partial D)$ — сферическое расстояние точки ζ до множества ∂D .

Будем считать, что $\{B_n\}$ является исчерпанием области D компактными областями, $B_1 = \emptyset$. Множество $\bar{E}$ определим как объединение некоторых замкнутых подмножеств $E_n \subset D$, построение которых проведем по индукции.

Обозначим $E_1 = E \cup G_1$. Справедлива

Лемма 2. i) Дополнение к E_1 линейно связно в D^* . ii) $\partial E \subset \partial E_1$.

Доказательство. i) следует из определения множества G_1 .

Если ii) не выполнено, то существует точка $z_0 \in \partial E \cup E_1^0$, т. е. существует окрестность U_{z_0} точки z_0 такая, что $U_{z_0} \subset E \cup G_1$. Тогда, согласно замечанию (*) существует область V , $\partial V \subset E$, ∂D линейно недостижима из V и $z_0 \in V$. Но это, очевидно, противоречит ci).

Пусть при некотором $n \geq 1$ построено замкнутое подмножество $E_n = E \cup \bigcup_{i=1}^n \bar{G}_i$ (G_k — некоторые подмножества множеств G_k), обладающее свойствами:

d) $\partial E \subset \partial E_n$.

e) $D^* \setminus E_n$ линейно связно, причем для некоторых натуральных чисел $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_n$, точки $z \in (E_n \cup B_{m_1})^c$ могут быть соединены с ∂D непрерывными путями вне $E_n \cup B_n$, а точки $z \in E_n^c \cap (B_{m_k} \setminus B_{m_{k-1}})$ — непрерывными путями, лежащими вне $E_n \cup B_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots, n$.

Обозначим $M_1^{(n)}$ подмножество точек $(E_n^0)^c$, обладающих окрестностью, лежащей в $E \cup G_{n+1}$. Согласно cii) и замечанию (*), найдем число $s_1 > m_n$ такое, что $M_1^{(n)} \cap E \subset B_{s_1}^0$ и пусть $M_2^{(n)} = M_1^{(n)} \setminus B_{s_1}$. Существует число $s_2 \geq s_1$ такое, что замыкание объединения предкомпактных в D компонент дополнения $\bar{M}_2^{(n)} \cup B_{s_1}$ содержится в $B_{s_2}^0$. В противном случае, с помощью замечания (*) можно было бы построить области V , $\partial V \subset E \cup B_{s_1}$, из которых ∂D линейно недостижима, содержащие точки ∂E , как угодно близкие к ∂D (в сферической метрике). Рассмотрим множество $M_3^{(n)} = M_2^{(n)} \setminus B_{s_2}$. Имеем $M_3^{(n)} \cap E = \emptyset$, так как $M_3^{(n)} = M_1^{(n)} \setminus B_{s_2}$, и $B_{s_1} \subset B_{s_2}$. Обозначим $M_4^{(n)}$ объединение компонент $M_2^{(n)} \setminus M_3^{(n)}$, охватываемых $E \cup \bar{M}_3^{(n)}$ (т. е. предкомпактных в D подмножеств множества $M_2^{(n)}$, граница которых содержится в $E \cup \bar{M}_3^{(n)}$). При этом заметим, что согласно выбору s_2 , связности B_n и замечанию (*), можно утверждать, что $\bar{M}_4^{(n)} \cap B_{s_1} = \emptyset$, что влечёт $M_4^{(n)} \cap E = \emptyset$. Возьмем теперь

$$E_{n+1} = E_n \cup G_{n+1}, \text{ где } G_{n+1} = M_3^{(n)} \cup M_4^{(n)} \text{ и } m_{n+1} = s_2.$$

Для замкнутого в D подмножества $E_{n+1} \subset D$ имеет место

Лемма 3. Условия d) и e) (с заменой n на $n+1$) выполнены для множества E_{n+1} и числа m_{n+1} .

Доказательство. Если не выполнено d), то учитывая, что E_{n+1} получается прибавлением к E некоторых подмножеств $\bigcup_{k=1}^{n+1} G_k$, согласно замечанию (*) можно построить область V , $\partial V \subset E \cup B_{n+1}$, из которой ∂D линейно недостижимо, имеющую непустое пересечение с ∂E , что противоречит выбору m_{n+1} .

Множество $(E_n \cup G_{n+1})^c$ линейно связано согласно определению G_{n+1} и линейной связности $(E_n)^c$. Так как точки $z \in G_{n+1} \setminus \overline{G_{n+1}^*}$ могут быть соединены с ∂D путями, лежащими вне $E \subset B_n$, то линейно связано и $(E_{n+1})^c = (E_n \cup G_{n+1})^c \cup (G_{n+1} \setminus \overline{G_{n+1}^*})$. Точки $z \in (E_{n+1} \cup B_{m_{n+1}})^c$ могут быть соединены с ∂D путями вне $E_{n+1} \cup B_{n+1}$, так как они могут принадлежать G_k только при $k > n+1$. Далее, $(E_{n+1})^c \cup (B_{m_{n+1}} \setminus B_{m_n}) \subset (E_n \cup B_{m_n})^c \setminus M_1^{(n)}$, которое означает, что точки этого множества могут быть соединены с ∂D путями вне $E_{n+1} \cup B_n$. Наконец, так как $(E_{n+1})^c \cap (B_{m_k} \setminus B_{m_{k-1}}) = (E_n)^c \cap (B_{m_k} \setminus B_{m_{k-1}})$; $2 \leq k \leq n$, то точки k -го множества могут быть соединены с ∂D вне $E_{n+1} \cup B_{k-1}$.

Для построенной по индукции последовательности множеств E_n возьмем

$$\tilde{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G_n^*} \quad (G_1^* = G_1).$$

Отметим, что при каждом $k > n+1$ пути, по которым осуществляются указанные соединения, согласно определению множеств G_k можно взять лежащими вне $E_{n+1} \cup G_n$. Поэтому, так как порции множеств E_n на компактных подмножествах D совпадают для всех достаточно больших n , условия d) и e) означают, что $\tilde{E}$ замкнуто в D и $D^* \setminus \tilde{E}$ связно и локально связно.

Доопределим теперь функцию f до функции класса $H(\tilde{E})$ следующим образом: продолжив сначала f по непрерывности с $\partial \tilde{E}$ до функции $\tilde{f}$, определенной на $\partial \tilde{E}$, обозначим через φ решение задачи Дирихле на открытом множестве $\tilde{E}^c \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ для граничной функции $\tilde{f}$. Это решение существует согласно теореме М. Брело (см. выше), лемме 1 и условию (1), совпадающему с условием упомянутой теоремы в нашем случае. При этом, решение задается интегралом

$$\varphi(z) = \int_{\partial \tilde{E} \cap G_n^*} \tilde{f} d\mu_z; \quad z \in G_n^*$$

$$(\partial G_n^* \subset \partial G_n \cup B_{m_n}).$$

Согласно лемме 2 работы [11], условие (1) обеспечивает, чтобы

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \tilde{E} \setminus E} \varphi(z) = \tilde{f}(\zeta)$$

в любой точке $\zeta \in \partial((\tilde{E})^0 \setminus E)$. В частности, функция

$$u = \begin{cases} f, & \text{на } E \\ \varphi, & \text{на } \tilde{E} \setminus E \end{cases}$$

принадлежит классу $H(\tilde{E})$. Согласно теореме 3, $\varphi \in H_D(\tilde{E})$, что, очевидно, влечет $f = \varphi|_E \in H_D(E)$.

Необходимость. Предположим, что функция $f \in H_D(E)$ и $\{B_n\}$ — произвольное исчерпание области D компактными областями. Не нарушая общности можем считать, что функция f непрерывно продолжена на $\partial G_n \cap B_n$; $n \geq 1$ и неотрицательна. Для произвольного компакта $K \subset D$ возьмем компакт $\tilde{K} \subset D$ такой, что $K \subset (\tilde{K})^0$. Обозначим $Q_n = G_n \cup (M^{(n-1)} \cap \tilde{K})$ и заметим, что все точки $\zeta \in \partial Q_n \cap K$ являются регулярными в Q_n , так как принадлежат невырожденным граничным континуумам ($n \geq 1$ — произвольно фиксировано).

По условию существует гармоническая в D функция U такая, что

$$\|f - U\|_E < 1.$$

Для некоторого (ограниченного) продолжения на ∂Q_n ограниченной на ∂Q_n функции $f - U$ существует решение задачи Дирихле в Q_n . Обозначив это решение V_n , заметим, что функция $W_n = U + V_n$ — гармоническая в Q_n и совпадает с f в регулярных точках ∂Q_n . Для $m > n$ таких, что $\tilde{K} \subset B_m$, имеем $\partial Q_n \setminus B_m = \partial G_n \setminus B_m$, причем согласно условию с), для достаточно больших m все точки $\zeta \in \partial Q_n \setminus B_m$ — регулярные. На основании леммы 2 можем утверждать, что

$$W_n(z) = \int_{\partial Q} f d\mu'_z = \int_{\partial Q_n \cap B_m} + \int_{\partial Q_n \setminus B_m}, \quad (10)$$

где $d\mu'_z$ — гармоническая мера на ∂Q_n в Q_n . В каждой точке $\zeta \in \partial Q_n \cap K$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in Q_n} W_n(z) = \tilde{f}(\zeta). \quad (11)$$

В силу упомянутой леммы 2 работы [11], согласно (11) имеем, что W_n ограничена в некоторой окрестности каждой точки $\zeta \in \partial Q_n \cap K$. Из-за компактности K отсюда следует, что W_n ограничена на $K \cap Q_n$. Из равномерной на $K \cap Q_n$ ограниченности W_n и первого слагаемого правой части в (10), следует равномерная ограниченность второго на $K \cap Q_n$, и тем более на $K \cap G_n$. Это замечание завершает доказательство необходимости, так как по принципу расширения $d\mu'_z \geq d\mu_z$ на ∂G_n и учитывая, что f неотрицательна, получаем оценку (1).

Недавно П. М. Готье любезно прислал нам рукопись, посвященную решению упомянутой задачи Л. А. Рубеля, в которой приводится доказательство пункта с) $\Rightarrow$ b) теоремы 1, без явной формулировки этого утверждения, в случае, когда $L' = \emptyset$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 14. I. 1988

Ա. Ա. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ. Մոտաճարարյուն հարմոնիկ ֆունկցիաներով հարթ տիրույթների փակ ենթաշաղկապությունների վրա (ամփոփում)

Նկարագրված են հարթ տիրույթի ոչ-կոմպակտ փակ ենթաշաղկապությունները, որոնց վրա տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիաներով հավասարաչափ մոտարկվում են բազմություն վրա անընդհատ, ներսում հարմոնիկ, իսկ եզրի վրա սահմանափակ ֆունկցիաները: Ապացուցվում է, որ այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի արագություն, որ եթե բազմության վրա անընդհատ, ներսում հարմոնիկ ֆունկցիան բազմության եզրի վրա աճում է ոչ ավելի արագ, քան նշված արագությունը, ապա այն նույնպես մոտարկելի է: Նկարագրված բազմությունների համար տրվում է նրանց եզրի հարմոնիկ չափի տերմիններով ինտեգրալային հայտանիշ, որը բնութագրում է բազմության վրա հավասարաչափ մոտարկվող ֆունկցիաների դասը:

A. A. NERSESYAN. Approximation by harmonic functions on closed subsets of planar domains (summary)

The paper describes non-compact closed subsets of planar domains where the functions which are continuous on a subset, harmonic in its interior and bounded on its boundary can be uniformly approximated by functions harmonic in the domain. It is proved that for such sets a speed can be pointed out such that the functions continuous on a set harmonic in its interior and increasing no faster than the noted speed on the boundary are also approximable. In terms of harmonic measure on the boundary an integral criterion is proposed, characterizing the class of approximable functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Шагинян. О равномерной и касательной гармонической аппроксимации непрерывных функций на произвольных совокупностях. Матем. заметки 9, № 2, 1971, 131—142.
2. P. M. Gauthier, M. Coldstein, W. H. Oo. Uniform approximation on unbounded sets by harmonic functions with logarithmic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., 261, 1. 1980, 169—183.
3. M. Labreche. De l'approximation harmonique uniforme, These. Univ. de Montreal 1982.
4. А. А. Нерсисян. Гармоническая аппроксимация и решение одной задачи Л. А. Рубеля, ДАН Арм.ССР, 84, № 3, 1987, 104—106.
5. А. А. Нерсисян. О функциях, аппроксимируемых гармоническими функциями на некомпактных подмножествах плоскости, Тезисы докладов. Всесоюзный симпозиум по теории приближения функций, Уфа, 1987.
6. М. В. Келдыш. Избранные труды, Математика, «Наука», М., 1985.
7. Р. Ш. Саакян. Об одном обобщении принципа максимума, Изв. АН Арм.ССР, серия матем., 22, № 1, 1987, 94—101.
8. М. Брело. Основы классической теории потенциала, «Мир», М., 1964.
9. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, «Мир», М., 1973.
10. A. Stray. Approximation by analytic functions which are uniformly continuous on a subset of their domain of definition, Amer. Journ. Math., 99, 4, 1977, 788—800.
11. N. A. Arakellian, P. M. Gaatlar. On tangential approximation by holomorphic functions, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 17, № 6, 1982, 419—441.