ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.444

С. С. КАЗАРЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ВЕСОВЫХ РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ДЛЯ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

Введение

В 1948 г. К. И. Бабенко [1] для $\omega(x)=|x|^{\alpha}\ (-1<\alpha<p-1)$ показал справедливость интегрального неравенства

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(x)|^{p}\,\omega(x)\,dx\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^{p}\,\omega(x)\,dx,\quad p>1, \tag{1.1}$$

где $C>0$ не зависит от f и

$$\tilde{f}(x)=-v.p.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{(t-x)}{2}\,dt.$$

Затем В. Ф. Гапошкин [2] нашел достаточные условия на весовую функцию $\omega(x)$, чтобы интегральное неравенство (1.1) было справедливым для функций $f(x)\in L^{2}_{\omega}(-\pi,\pi)$.

В 1960 г. Х. Хельсон и Г. Сегё [3] получили полную характеризацию конечных положительных мер μ на $[-\pi,\pi)$, для которых неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{T}(x)|^{2}\,d\mu(x)\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|T(x)|^{2}\,d\mu(x)$$

справедливо для всех тригонометрических полиномов T, где $\tilde{T}$ гармонически сопряженная функция для полинома T.

В 1972 г. Б. Макенхаупт [4] описал все те весовые функции $\omega(x)$, для которых имеет место неравенство

$$\int_{R^{n}}[M(f,x)]^{p}\,\omega(x)\,dx\leqslant C\int_{R^{n}}|f(x)|^{p}\,\omega(x)\,dx,\quad 1<p<\infty, \tag{1.2}$$

где $C>0$ не зависит от $f(x)$ и $M(f,x)$ — максимальная функция Харди—Литтльвуда. Используя эту работу Р. Хант, Б. Макенхаупт и Р. Уиден [5] доказали следующую теорему.

Теорема А. *Пусть $\omega(x)$ — неотрицательная, 2π-периодическая измеримая функция. Неравенство* (1.1) *имеет место тогда и* *только тогда, когда весовая функция $\omega(x)$ принадлежит классу $A_p(R^1)$: существует константа $D_p > 0$ такая, что*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leqslant D_p \tag{1.3}$$

для произвольного интервала $I \subset T = [-\pi, \pi)$.

Неравенства (1.1), (1.2) играют важную роль для исследования вопросов сходимости и суммируемости системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в весовых пространствах $L^p_\omega(-\pi, \pi)$, $p > 1$. Следует отметить, что если рассматривать задачи сходимости и суммируемости системы $\{w(x)\,e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в пространствах $L^p(-\pi, \pi)$, то эти задачи эквивалентны их аналогам для системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в весовом пространстве $L^p_\omega(-\pi, \pi)$ с весом $\omega(x) = |w(x)|^p$. Однако в пространствах Орлича, где классы Орлича определяются через функцию Юнга $\Phi(t)$, подобные вопросы не эквивалентны, так как равенство $\Phi(xy) = \Phi(x)\,\Phi(y)$ в общем случае не выполняется. В связи с этим вопросы сходимости и суммируемости систем $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $\{w(x)\,e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в пространствах Орлича существенно отличаются от аналогичных задач в пространствах L^p.

Так как все необходимые определения и обозначения были даны в работе [6], то мы их не приводим. Отметим только, что пространство Орлича L^Φ_ω будет рефлексивным пространством, если функция Юнга $\Phi(t)$ вместе с сопряженной по Юнгу функцией $\Psi(t)$ удовлетворяет Δ_2 условию.

Сформулируем теорему Р. Кермана и А. Торчинского [7].

Теорема Б. *В рефлексивных пространствах Орлича следующие условия эквивалентны:*

$$\text{(а)}\qquad \int\limits_{R^1} \Phi(M(f, x))\,\omega(x)\,dx \leqslant C \int\limits_{R^n} \Phi(f(x))\,\omega(x)\,dx, \tag{1.4}$$

где константа $C > 0$ не зависит от функции $f(x)$.

(б) *Локально интегрируемая, неотрицательная функция $\omega(x)$ принадлежит классу $A_\Phi(R^n)$:*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \varepsilon\,\omega(x)\,dx\right)\varphi\left(\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon\,\omega(x)}\right)dx\right) \leqslant D_\Phi, \tag{1.5}$$

для всех кубов $Q \subset R^n$, стороны которых параллельны координатным осям n-мерного эвклидова пространства R^n, и произвольных чисел $\varepsilon > 0$.

(в) *$\omega(x)$ принадлежит классу $A_{p_0^*}(R^n)$, где интегрирование проводится в R^n и p_0^* нижний индекс функции Юнга $\Phi(t)$.*

Если оператор $H_w(f, x)$ определить следующим образом

$$H_w(f, x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\,|w(x)|\int\limits_Q\left|\frac{f(t)}{w(t)}\right|dt, \tag{1.6}$$

где $Q \subset R^n$ — произвольный куб, стороны которого параллельны координатным осям R^n, то тогда справедлива [6]

Теорема В. *Пусть p_0^*, p_1^*, соответственно, нижний и верхний индексы $\Phi(t)$ и аналогично q_0^*, q_1^* — нижний и верхний индексы функции $\Psi(t)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(а$_0$) *Локально интегрируемая функция $w(x)$ принадлежит классу $B_\Phi(R^n)$, т. е. для произвольных кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q w\|_{L_\varepsilon^\Phi} \left\| \frac{\chi_Q}{\varepsilon w} \right\|_{L_\varepsilon^\Psi} \leqslant D_\Phi, \tag{1.7}$$

где χ_Q — характеристическая функция куба Q и $D_\Phi > 0$ не зависит от Q и ε.

(б$_0$) *$w(x)$ принадлежит классам $B_{p_0^*}(R^n)$ и $B_{p_1^*}(R^n)$, т. е. для всех кубов $Q \subset R^n$, соответственно, справедливы неравенства*

$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q w\|_{L^{p_0^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{w} \right\|_{L^{q_1^*}} < D_{p_0^*},$$
$$\frac{1}{|Q|} \|\chi_Q w\|_{L^{p_1^*}} \left\| \frac{\chi_Q}{w} \right\|_{L^{q_0^*}} \leqslant D_{p_1^*}, \tag{1.8}$$

где $D_{p_0^*} > 0$, $D_{p_1^*} > 0$ не зависят от Q.

(в$_0$) *Существует некоторая константа $C_\Phi > 0$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$\|H_w(f)\|_{L_\varepsilon^\Phi} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L_\varepsilon^\Phi}. \tag{1.9}$$

(г$_0$) *Существует некоторая константа $C_\Phi' > 0$ такая, что для произвольной функции $f \in L^\Phi$*

$$\int_{R^n} \Phi(H_w(f, x))\, dx < C_\Phi' \int_{R^n} \Phi(f(x))\, dx. \tag{1.10}$$

(д$_0$) *Существует некоторая константа $D_\Phi' > 0$ такая, что для всех кубов $Q \subset R^n$ и произвольных чисел $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q S_\Phi(\varepsilon|w(x)|)\, dx\, \varphi \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \Psi \left(\frac{1}{\varepsilon|w(x)|} \right) dx \right) \leqslant D_\Phi'. \tag{1.11}$$

(е$_0$) *Справедливы неравенства*

$$\|H_w(f)\|_{L^{p_0^*}} \leqslant C_{p_0^*} \|f\|_{L^{p_0^*}}, \quad \|H_w(f)\|_{L^{p_1^*}} \leqslant C_{p_1^*} \|f\|_{L^{p_1^*}}, \tag{1.12}$$

где $C_{p_0^*} > 0$, $C_{p_1^*} > 0$ не зависят от $f(x)$.

Используя теоремы Б, В в настоящей работе мы докажем интегральные неравенства для сопряженной функции $\tilde{f}(x)$ и функции

$$\tilde{f}_w(x) = -v.\ p.\ \frac{1}{2\pi} w(x) \int_T \frac{f(t)}{w(t)} \operatorname{ctg} \frac{(t-x)}{2}\, dt$$

при некоторых необходимых и достаточных условиях, налагаемых соответственно на весовую функцию $\omega(x)$ и функцию $w(x)$. Эти неравенства дают возможность исследовать сходимость систем $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $w(x)\, e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в рефлексивных пространствах Орлича.

§ 2. Предварительные результаты

Сформулируем те основные утверждения, которые мы будем использовать для доказательства теорем.

Для функции Юнга $\Phi(t)$ имеют место следующие свойства (см. [8], стр. 25, 37, 98)

$$C^{-1}\, t\,\varphi(t) \leqslant \Phi(t) \leqslant C\, t\,\varphi(t), \tag{2.1}$$

$$t < \Phi^{-1}(t)\, \Psi^{-1}(t) \leqslant 2t. \tag{2.2}$$

Для функции

$$\overline{S}_\Phi(\lambda) = \sup_{t>0} \frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(t)}$$

справедлива следующая (см. [9], стр. 35)

Лемма А. *Функция* $\overline{S}_\Phi(\lambda)$ *ограничена на каждом компактном множестве и существуют числа* p_0 *и* p_1 $(p_0 \leqslant p_1)$

$$\overline{S}_\Phi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})), \tag{2.3}$$

при $\lambda \to 0$, *или* $\lambda \to \infty$.

Для нижнего и верхнего индексов функции Юнга $\Phi(t)$ имеем $p_0^* = \sup p_0$, $p_1^* = \inf p_1$. Из леммы А вытекает, что при $p_0 < p_0^*$ и $p_1 > p_1^*$

$$S_\Phi(\lambda) = o(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})). \tag{2.4}$$

Из определения функции $\overline{S}_\Phi(\lambda)$ следует, что существует такая константа $C > 0$, что

$$\Phi(\lambda t) \leqslant C \max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})\, \Phi(t),\quad p_0 \leqslant p_1. \tag{2.5}$$

В этом случае, следуя работе [9], будем писать $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1)$ или, чтобы фиксировать константу, запишем $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$. Если справедливо условие (2.4), то Φ имеет p_0^+ нижний тип и p_1^- верхний тип, что запишем в следующем виде: $\Phi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-)$.

Определение 1. Положительная функция ρ называется псевдовогнутой, если существует эквивалентная ей вогнутая функция $\varphi(t)$.

Справедливы следующие утверждения (см. [9]).

Лемма Б. *Функция* $\rho(t)$ *псевдовогнута тогда и только тогда, когда* $\rho \in \Lambda(0, 1)$, *т. е.*

$$\rho(\lambda t) \leqslant C \max(1, \lambda)\, \rho(t). \tag{2.6}$$

Множество тех функций ρ, для которых выполняется неравенство (2.6) обозначается через $\gamma(C)$. Множество функций ρ, для которых выполняется условие (2.4) при $p_0 = 0$ и $p_1 = 1$, обозначим через $\gamma^{+-}(C)$.

Лемма В. *Если $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$, то существует такая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$, что $\psi \in \Lambda(p_0, p_1, 1)$.*

Лемма Г. *Если $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1)$ и $p_0 > 0$, то $\Phi^{-1} \in \Lambda(p_1^{-1}, p_0^{-1})$.*

Лемма Д. *Пусть $\Phi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1 - p_0})$. Тогда $\Phi \in \Lambda(p_0, p_1, C)$ в том и только в том случае, когда $\sigma \in \gamma(C)$.*

Лемма Е. *Пусть $\Phi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1 - p_0})$ и $\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}} \rho(t^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}})$. Тогда для того чтобы $\sigma(t) \in \gamma(C)$ необходимо и достаточно, чтобы $\rho(t) \in \gamma(C)$.*

Заметим, что вышеприведенные леммы справедливы также для положительной, непрерывной, строго возрастающей функции $\psi(t)$, определенной на положительной полупрямой и удовлетворяющей Δ_2 условию. Если

$$\overline{S}_\psi(\lambda) = O(\max(\lambda^{p_0}, \lambda^{p_1})),$$

то мы будем говорить, что ψ имеет нижний тип p_0 и верхний тип p_1. Для таких функций ψ справедливы следующие леммы (см. [6]).

Лемма Ж. *Пусть $\psi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1 - p_0})$ и $\psi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p_1}} \rho(t^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}})$. Тогда $\sigma(t) \in \gamma^{+-}(1)$ в том и только в том случае, когда $\rho(t) \in \gamma^{+-}(1)$.*

Лемма З. *Пусть $\psi(t) = t^{p_0} \sigma(t^{p_1 - p_0})$. Тогда $\psi \in \Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$ в том и только в том случае, когда $\sigma \in \gamma^{+-}(1)$.*

Пусть $L_\mu^\psi(G)$ — пространство измеримых функций $u(x)$, для которых

$$\int_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu < \infty, \quad a > 0.$$

Для $L_\mu^\psi(G)$ справедливо следующее утверждение (см. [9]).

Лемма И. *Если положительная, непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$ имеет конечный верхний тип и положительный нижний тип, то пространство $L_\mu^\psi(G)$ является квазибанаховым пространством с квазинормой*

$$\|u\|_{L_\mu^\psi(G)} = \inf\left\{a > 0 : \int_G \psi\left(\frac{|u(x)|}{a}\right) d\mu \leqslant 1\right\}.$$

Определение 2. Оператор F называется сублинейным, если

$$F(f_1 + f_2) \leqslant Ff_1 + Ff_2.$$

При доказательстве основного результата нам необходима следующая теорема (см. [9]).

Теорема Г. *Пусть $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ — положительные, непрерывные, строго возрастающие функции, имеющие конечный верхний тип и положительный нижний тип. Пусть F—линейный непрерывный оператор, или сублинейный непрерывный оператор, для которого выполняются следующие неравенства :*

$$\|Ff\|_{L_\mu^{\psi_0}} \leqslant C_{\psi_0}\|f\|_{L_\mu^{\psi_0}}, \quad \|Ff\|_{L_\mu^{\psi_1}} \leqslant C_{\psi_1}\|f\|_{L_\mu^{\psi_1}},$$

где $C_{\psi_0}>0$, $C_{\psi_1}>0$ не зависят от f.

Тогда если $\psi^{-1}=\psi_0^{-1}\rho(\psi_1^{-1}/\psi_0^{-1})$, где $\rho\in\gamma^{+-}(1)$, то существует такая константа $C_\psi>0$, что

$$\|Ff\|_{L_\mu^\psi} \leqslant C_\psi\|f\|_{L_\mu^\psi}.$$

Для дальнейших рассуждений нам нужны также следующие утверждения (см. [7], [10]).

Лемма К. *Если $\omega(x)\in A_\Phi(R^n)$, то $\omega(x)\in A_r(R^n)$, $r>p_0^*$.*

Лемма Л. *Пусть $\omega(x)\in A_p(R^n)$. Тогда существует такое число $\delta>0$, что $\omega(x)$ принадлежит классу $A_{p-\delta}(R^n)$.*

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Теорема 1. *Пусть $\omega(x)$ — 2π-периодическая измеримая функция. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а$_1$) *Функция $\omega(x)$ принадлежит классу $B_\Phi(R^1)$, т. е. для всех интервалов $I\subset T$ и произвольных чисел $\varepsilon>0$*

$$\frac{1}{|I|}\|\chi_I\,\omega\|_{L_1^\Phi(T)}\cdot\left\|\frac{\chi_I}{\varepsilon\,\omega}\right\|_{L_1^{\tilde\Phi}(T)} \leqslant D_\Phi,$$

где χ_I — характеристическая функция интервала I.

(б$_1$) *Для произвольного $\varepsilon>0$ функция $\tilde f_\omega(x)$ удовлетворяет условию*

$$\|\tilde f_\omega\|_{L_1^\Phi(T)} \leqslant C_\Phi\|f\|_{L_1^\Phi(T)},$$

где $C_\Phi>0$ не зависит от функции $f(x)$.

(в$_1$) *Существует некоторая константа $C_\Phi^*>0$, не зависящая от $f(x)$ такая, что*

$$\int_T \Phi(\tilde f_\omega(x))\,dx \leqslant C_\Phi^*\int_T \Phi(f(x))\,dx.$$

Доказательство. Докажем импликацию (а$_1$)$\Rightarrow$(б$_1$). Согласно теореме В из условия (а$_1$) следует, что существуют числа $D_{p_0^*}>0$, $D_{p_1^*}>0$ такие, что для любого интервала $I\subset T$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{|I|}\|\chi_I w\|_{L^{p_0^*}}\left\|\frac{\chi_I}{w}\right\|_{L^{q_1^*}}\leqslant D_{p_0^*},\tag{3.1}$$

$$\frac{1}{|I|}\|\chi_I w\|_{L^{p_1^*}}\left\|\frac{\chi_I}{w}\right\|_{L^{q_0^*}}\leqslant D_{p_1^*},\tag{3.2}$$

где p_0^*, p_1^*, соответственно, нижний и верхний индексы функции Юнга $\Phi(t)$, а q_0^*, q_1^* — нижний и верхний индексы дополнительной к $\Phi(t)$ функции $\Psi(t)$.

Из теоремы А и условий (3.1), (3.2) следует, что существуют числа $C_{p_0^*}>0$, $C_{p_1^*}>0$, для которых выполняются неравенства

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_0^*}(T)}\leqslant C_{p_0^*}\|f\|_{L^{p_0^*}(T)},\tag{3.3}$$

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_1^*}(T)}\leqslant C_{p_1^*}\|f\|_{L^{p_1^*}(T)}.\tag{3.4}$$

И наоборот, из теоремы А и условий (3.3), (3.4) следуют неравенства (3.1), (3.2) для любых интервалов $I\subset T$.

Отсюда и из лемм К и Л следует существование таких чисел $p_0<p_0^*$ и $p_1>p_1^*$, что

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_0}(T)}\leqslant C_{p_0}\|f\|_{L^{p_0}(T)},\tag{3.5}$$

$$\|\tilde{f}_w\|_{L^{p_1}(T)}\leqslant C_{p_1}\|f\|_{L^{p_1}(T)}.\tag{3.6}$$

Так как p_0^* и p_1^*, соответственно, являются нижним и верхним индексами для Φ, то согласно лемме А для выбранных p_0 и p_1 получаем $\Phi\in\Lambda(p_0^+, p_1^-, C)$. Отсюда в силу леммы В существует такая непрерывная, строго возрастающая функция $\psi(t)$, эквивалентная $\Phi(t)$, что $\psi\in\Lambda(p_0^+, p_1^-, 1)$. Из лемм Ж и З вытекает, что если $\psi^{-1}(t)$ представить в виде $\psi^{-1}(t)=t^{\frac{1}{p_1}}\rho\left(t^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}\right)$, то $\rho\in\gamma^{+-}(1)$. Таким образом, $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Г. На основании этой теоремы и из (3.5), (3.6) получаем, что для произвольного $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{f}_w\|_{L_\varepsilon^{\psi}(T)}\leqslant C_\psi\|f\|_{L_\varepsilon^{\psi}(T)},$$

где $C_\psi>0$ не зависит от $f(x)$.

Согласно неравенству Иенсена для функции Юнга (см. [8], стр. 18) и из эквивалентности функций Φ и ψ находим, что для некоторого $C>1$

$$\Phi\left(\frac{1}{C}t\right)\leqslant\psi(t)\leqslant\Phi(Ct).\tag{3.7}$$

Так как

$$\|u\|_{L_\varepsilon^\Psi(T)} = \inf\left\{K > 0:\ \int_T \Psi\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\varepsilon\,dx \leqslant 1\right\}$$

и

$$\frac{1}{C}\|u\|_{L_{(T)}^\Phi} = \inf\left\{K > 0:\ \int_T \Phi\left(\frac{1}{C}\frac{|u(x)|}{K}\right)\varepsilon\,dx \leqslant 1\right\},$$

то согласно (3.7) получаем

$$\frac{1}{C}\|u\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \leqslant \|u\|_{L_\varepsilon^\Psi(T)}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|u\|_{L_\varepsilon^\Psi(T)} \leqslant C\|u\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Таким образом, отсюда получаем

$$\|\bar{f}_w\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)} \leqslant C_\Phi\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Импликация $(а_1) \Rightarrow (б_1)$ доказана. Докажем импликацию $(б_1) \Rightarrow (а_1)$. При $|t - x| < 1$ существует такая постоянная $C' > 0$, что

$$\frac{1}{C'}(t - x) < 2\,\mathrm{tg}\,\frac{(t - x)}{2} < C'(t - x). \tag{3.8}$$

Пусть $I_0 \subset T$ — произвольный интервал такой, что $|I_0| < 1$. Допустим, что I_1 и I_2 половины интервала I_0. Пусть функция f равна нулю вне I_1 и $f(x)\,w(x) \geqslant 0$. Тогда

$$|\bar{f}_w(x)| \geqslant C\left(\frac{1}{|I_1|}|w(x)|\int_{I_1}\frac{f(t)}{w(t)}\,dt\right)\chi_{I_2}(x). \tag{3.9}$$

Поэтому из условия $(б_1)$ получаем

$$\left(\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}\frac{f(t)}{w(t)}\,dt\right)\|\chi_{I_2} w\|_{L_\varepsilon^\Phi} \leqslant C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}. \tag{3.10}$$

Подставляя в (3.10) $f(t) = \chi_{I_1}(t)\,w(t)$ находим

$$\|\chi_{I_2} w\|_{L_\varepsilon^\Phi} \leqslant C\|\chi_{I_1} w\|_{L_\varepsilon^\Phi}. \tag{3.11}$$

Анналогично получаем, что

$$\|\chi_{I_1} w\|_{L_\varepsilon^\Phi} \leqslant C\|\chi_{I_2} w\|_{L_\varepsilon^\Phi}. \tag{3.12}$$

Из (3.10)—(3.12) имеем

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1} w\|_{L_\varepsilon^\Phi}\int_{I_1}\frac{1}{\varepsilon}\frac{f(t)}{w(t)}\,\varepsilon\,dt \leqslant C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1} w\|_{L_z^\Phi} \sup_{\|f\|_{L_z^\Phi}=1} \int_{I_1} \frac{1}{z\,w(t)} f(t)\, z\, dt \leqslant C$$

и, тем самым, импликация $(б_1) \Rightarrow (а_1)$ доказана.

Докажем импликацию $(а_1) \Rightarrow (в_1)$. Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| > \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| \leqslant \lambda, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| \leqslant \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Из соотношений (3.1)—(3,2) и лемм К, Л вытекает, что существуют такие числа $r_1 < p_0^*$ и $r_2 > p_1^*$, что $|w(x)|^{r_1}$ принадлежит калссу $A_{r_1}(R^1)$ и $|w(x)|^{r_2}$ принадлежит классу $A_{r_2}(R^1)$. Поэтому в силу теоремы А имеем

$$\int_T |\widetilde{f}_{1w}(x)|^{r_1}\, dx \leqslant C_{r_1} \int_T |f_1(x)|^{r_1}\, dx,$$

$$\int_T |\widetilde{f}_{2w}(x)|^{r_2}\, dx \leqslant C_{r_2} \int_T |f_2(x)|^{r_2}\, dx.$$

Следовательно

$$|\{|\widetilde{f}_{1w}(x)| > \lambda\}| \leqslant C_{r_1} \frac{1}{\lambda^{r_1}} \int_T |f_1(x)|^{r_1}\, dx, \tag{3.13}$$

$$|\{|\widetilde{f}_{2w}(x)| > \lambda\}| \leqslant C_{r_2} \frac{1}{\lambda^{r_2}} \int_T |f_2(x)|^{r_2}\, dx. \tag{3.14}$$

Для функции $\widetilde{f}_w$ используя свойство (2.1) функции Юнга получаем

$$\int_T \Phi(|\widetilde{f}_w(x)|)\, dx \leqslant C \int_0^\infty |\{|\widetilde{f}_w(x)| > \lambda\}| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda. \tag{3.15}$$

Так как

$$\{|\widetilde{f}_w(x)| > \lambda\} \subset \left\{|\widetilde{f}_{1w}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|\widetilde{f}_{2w}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\},$$

то из (3.13)—(3.15) находим

$$\int_0^\infty |\{|\widetilde{f}_w(x)| > \lambda\}| \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda \leqslant 2^{r_1} C_{r_1} \int_T |f(x)|^{r_1} \times$$

$$\times \left(\int_0^{|f(x)|} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}}\, d\lambda \right) dx + 2^{r_2} C_{r_2} \int_T |f(x)|^{r_2} \left(\int_{|f(x)|}^\infty \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}}\, d\lambda \right) dx. \tag{3.16}$$

Пусть $r=\dfrac{r_1+p_0^*}{2}$ и $r'=\dfrac{r_2+p_1^*}{2}$, тогда из (3.16) и (2.5) следует

$$\int_T |f(x)|^{r_1}\left(\int_0^{|f(x)|}\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_1+1}}\,d\lambda\right)dx\leqslant C\int_T |f(x)|^{r_1-r}\times$$

$$\times\left(\int_0^{|f(x)|}\lambda^{r-r_1-1}\,d\lambda\right)\Phi(|f(x)|)\,dx\leqslant C_r\int_T\Phi(f(x))\,dx.$$

Подобным образом получаем

$$\int_T |f(x)|^{r_2}\left(\int_{|f(x)|}^{\infty}\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^{r_2+1}}\,d\lambda\right)dx\leqslant C_{r'}\int_T\Phi(f(x))\,dx.$$

Отсюда и из (3.15), (3.16) вытекает справедливость импликации $(\text{а}_1)\Rightarrow(\text{в}_1)$.

Докажем импликацию $(\text{в}_1)\Rightarrow(\text{б}_1)$. В силу неравенства Иенсена для выпуклой функции, условие (в_1) можно записать в следующем виде:

$$\int_T\Phi\left(\frac{\tilde f_w(x)}{C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}}\right)\varepsilon\,dx\leqslant\int_T\Phi\left(\frac{Cf(x)}{C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}}\right)\varepsilon\,dx.$$

Следовательно

$$\int_T\Phi\left(\frac{\tilde f_w(x)}{C\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}}\right)\varepsilon\,dx\leqslant 1. \tag{3.17}$$

Используя определение нормы в пространстве Орлича из (3.17) получаем

$$\|\tilde f_w(x)\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}\leqslant C'_\Phi\|f\|_{L_\varepsilon^\Phi(T)}.$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Теорема 2. *Пусть $\omega(x)$—2π-периодическая, неотрицательная, измеримая функция. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(а_2) *Весовая функция $\omega(x)$ принадлежит классу $A_\Phi(R^1)$, т. е. для всех интервалов $I\subset T$ и произвольных чисел $\varepsilon>0$*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I\varepsilon\,\omega(x)\,dx\right)\varphi\left(\frac{1}{|I|}\int_I\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon\omega(x)}\right)dx\right)\leqslant D_\Phi.$$

(б_2) *Существует некоторая константа $C_\Phi>0$; не зависящая от $f(x)$ такая, что для произвольного $\varepsilon>0$ сопряженная функция $\tilde f(x)$ удовлетворяет условию*

$$\|\tilde f\|_{L_{\varepsilon\omega}^\Phi(T)}\leqslant C_\Phi\|f\|_{L_{\varepsilon\omega}^\Phi(T)}.$$

(в$_2$) *Существует некоторая константа $C'_\Phi > 0$, не зависящая от $f(x)$ такая, что*

$$\int_T \Phi(\tilde{f}(x))\,\omega(x)\,dx \leqslant C'_\Phi \int_T \Phi(f(x))\,\omega(x)\,dx.$$

Доказательство. Справедливость импликации (а$_2$)$\Rightarrow$(б$_2$) следует из теоремы Б и лемм К, Л по той же схеме рассуждений, что и при доказательстве импликации (а$_1$)$\Rightarrow$(б$_1$) теоремы 1.

Докажем импликацию (б$_2$)$\Rightarrow$(а$_2$). Возьмем произвольный интервал $I_0 \subset T$ и пусть $|I_0| < 1$. Обозначим через I_1 и I_2 половины интервала I_0. Пусть неотрицательная функция $f(x)$ равна нулю вне I_1. Тогда используя неравенство (3.8) получаем

$$|\tilde{f}(x)| \geqslant C\left(\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1} f(t)\,dt\right)\chi_{I_2}(x),$$

где $\chi_{I_2}(x)$ — характеристическая функция интервала I_2. При $f(t) = \chi_{I_1}(t)$ имеем

$$\|\chi_{I_2}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}} \leqslant C\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}}.$$

Поменяв местами интервалы I_1 и I_2 таким же способом получаем

$$\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}} \leqslant C\|\chi_{I_2}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}} \int_{I_1} f(t)\,dt \leqslant C\|f\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}(I_1)}. \tag{3.18}$$

Выберем функцию $f(x)$, определенную на I_1 так, чтобы $\|f\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}(I_1)} = 1$ и

$$\int_{I_1} f(t)\,dt = \left\|\frac{\chi_{I_1}}{\varepsilon\omega}\right\|_{L^\Psi_{\varepsilon\omega}}.$$

Тогда из соотношения (3.18) находим

$$\frac{1}{|I_1|}\|\chi_{I_1}\|_{L^\Phi_{\varepsilon\omega}} \left\|\frac{\chi_{I_1}}{\varepsilon\omega}\right\|_{L^\Psi_{\varepsilon\omega}} \leqslant C. \tag{3.19}$$

Проводя аналогичные выкладки, что и при доказательстве теоремы Б, из соотношения (3.19) получаем, что $\omega(x) \in A_\Phi(R^1)$.

Справедливость импликаций (а$_2$)$\Rightarrow$(в$_2$) и (в$_2$)$\Rightarrow$(б$_2$) доказываются точно так же, как и соответствующие импликации из теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

В заметке [11] сформулирована также следующая теорема, которая является следствием теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $w(x)$—2π-периодическая измеримая функция и*

$$S_{w,n}(f, x) = \frac{1}{\pi} w(x) \int_T \frac{f(t)}{w(t)} \cdot \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{(t-x)}{2}} dt.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

($а_1$) $w(x)$ *принадлежит классу* $B_\Phi(R^1)$.

($б_3$) *Существует некоторая константа* $C_\Phi > 0$ *такая, что*

$$\|S_{w,n}(f)\|_{L_2^\Phi(T)} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L_2^\Phi(T)} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

($в_3$) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi > 0$ *такая, что*

$$\int_T \Phi(S_{w,n}(f, x))\, dx \leqslant C'_\Phi \int_T \Phi(f(x))\, dx \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

(г3) *Имеет место соотношение*

$$\int_T \Phi(|f(x) - S_{w,n}(f, x)|)\, dx \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Из теоремы 2 следует справедливость следующего результата.

Теорема 4. *Пусть* $\omega(x)$—неотрицательная, 2π-*периодическая измеримая функция и*

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{(t-x)}{2}} dt.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

($а_2$) $\omega(x)$ *принадлежит классу* $A_\Phi(R^1)$.

($б_4$) *Существует некорая константа* $C_\Phi > 0$ *такая, что*

$$\|S_n(f)\|_{L_{\Phi,\omega}(T)} \leqslant C_\Phi \|f\|_{L_{\Phi,\omega}(T)} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

($в_4$) *Существует некоторая константа* $C'_\Phi > 0$ *такая, что*

$$\int_T \Phi(S_n(f, x))\, \omega(x)\, dx \leqslant C'_\Phi \int_T \Phi(f(x))\, \omega(x)\, dx \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

($г_4$) *Имеет место соотношение*

$$\int_T \Phi(|f(x) - S_n(f, x)|)\, \omega(x)\, dx \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии АН Армянской ССР

Поступила 13. XI. 1987

Ս. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Ինտեգրալային անհավասարություններ համալուծ ֆունկցիայի համար Օռլիչի կշռային ռեֆլեքսիվ տարածություններում (*ամփոփում*)

Հոդվածում կշռային ֆունկցիայի համար որոշվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում համալուծ $\tilde{f}(x)$ *և* $\tilde{f}_w(x)$ *ֆունկցիաների համար տեղի ունեն հետևյալ ինտեգրալային անհավասարությունները՝*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}(x))\,\omega(x)\,dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\,\omega(x)\,dx;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}_w(x))\,dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\,dx:$$

S. S. KAZARIAN. *Integral inequalities in Orlicz reflexive weighted spaces for the conjugate function* (summary)

The paper suggests necessary and sufficient conditions on weight functions under which the following integral inequalities for the conjugate functions $\tilde{f}(x)$ and $\tilde{f}_w(x)$ hold:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}(x))\,\omega(x)\,dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\,\omega(x)\,dx;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\tilde{f}_w(x))\,dx \leqslant C_\Phi \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x))\,dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. И. Бабенко*. О сопряженной функции. ДАН СССР, 62, 1948, 157—160.
2. *В. Ф. Гапошкин*. Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях, Мат. сб., 46, 1958, 359—372.
3. *H. Helson, G. Jsego*. A problem in prediction theory, Annali di Math. Pura ed Applicate, 4, 51, 1960, 107—138.
4. *B. Muckenhoupt*. Weighted norm inequalites for the Hardy maximal function, TAMS, 165, 1972, 207—226.
5. *R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden*. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, TAMS, 176, 1973, 227—251.
6. *С. С. Казарян*. Неравенства в пространствах Орлича для одной максимальной функции, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 22, № 4, 1987, 358—377.
7. *R. Kerman, A. Torchinsky*. Integral inequalites withs weights for the Hardy maximal functions, Studia Math, 71, 1982, 277—284.
8. *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий*. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
9. *I. Gustavson, I. Peetre*. Interpolation of Orlicz spaces, Studia Nath., 60, 1977, 33—59,
10. *R. Coifman, C. Fefferman*. Weighted rorm inequalities for the maximal functions and singular integrals, Studia Math., 54, 1974, 221—237.
11. *С. С. Казарян*. Некоторые вопросы сходимости и суммируемости в рефлексивных пространствах Орлича, ДАН Арм.ССР, 85, № 1, 1987.