ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XXV, № 3, 1990 Математика

УДК 517.5

А. М. АВАКЯН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ В ОДНОМЕРНОМ И ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЯХ

1°. Введение. Обозначим через $L_p = L_p(0,1)$ и $L_p(I)$ пространство измеримых по Лебегу соответственно на $[0,1]$ и $I=[0,1]\times[0,1]$ функций $f(x)$ с обычной нормой, а через W_p и $W_p(I)$ — единичные замкнутые шары в этих пространствах. Пусть, далее, $L_p^r(0,1)$ $(r=0, 1, 2,\cdots,\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$ — множество r раз дифференцируемых функций f, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $f^{(r)}\in L_p(0,1)$, а $L_p^{r,k}$ $(r,\ k=0,1,2,\cdots)$ — множество всех функций $f(x,y)$, определенных на I таких, что $f^{(\nu,\mu)}(x,y)$ $(0\leqslant\nu<r-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant k-1)$ непрерывны на I, $f^{(r,\mu)}(x,y)\in L_p(0,1)$ $(0\leqslant\mu<k)$ для всех фиксированных y, $f^{(r,\mu)}(x,y)$ абсолютно непрерывна по y для всех фиксированных x, $f^{(\nu,k)}(x,y)\in L_p(0,1)$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$ для всех фиксированных x, $f^{(\nu,k)}(x,y)$ абсолютно непрерывна по x для всех фиксированных y и $f^{(r,k)}(x,y)\in L_p(I)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, где

$$f^{(\nu,\mu)}(x,y)=\frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu}\,\partial y^{\mu}}f(x,y),$$

причем смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

В множествах L_p^k и $L_p^{r,k}$ выделим классы

$$W_p^r=\{f: f\in L_p^r,\ f^{(r)}\in W_p\},$$

$$W_p^{r,k}=\{f: f\in L_p^{r,k},\ f^{(r,k)}\in W_p(I),\ \|f^{(\nu,k)}(1,\cdot)\|_p\leqslant$$

$$\leqslant 1\ (0\leqslant\nu\leqslant r-1),\ \|f^{(r,\mu)}(\cdot,1)\|_p\leqslant 1\ (0\leqslant\mu\leqslant k-1)\},$$

где

$$\|f^{(\nu,k)}(1,\cdot)\|_p=\left(\int_0^1|f^{(\nu,k)}(1,y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$

Наилучшие приближения классов W_p^r и $W_p^{r,k}$ $(1\leqslant p\leqslant\infty,\ r,\ k=0,1,2,\cdots;\ W_p^0=W_p,\ W_p^{0,0}=W_p(I))$ подпространствами $\mathrm{N}\subset L_q$ и $\mathfrak{N}\subset L_q(I)$ $(1\leqslant q<\infty)$ соответственно, определяются следующим образом:

$$E(W_p^r,\mathrm{N})_q=\sup_{f\in W_p^r}\inf_{g\in\mathrm{N}}\|f-g\|_q,$$

$$E(W_p^{r,k}, \mathfrak{M})_q = \sup_{f \in W_p^{r,k}} \inf_{g \in \mathfrak{M}} \|f - g\|_q.$$

Рассмотрим задачу наилучшего приближения в метриках различных пространств функций на $[0, 1]$ и I. Речь будет идти о нахождении наилучшего приближения введенных выше классов подпространствами кусочно-постоянных. Метод исследования основан на использовании соотношений двойственности и специфики пространств кусочно-постоянных.

2°. Одномерный случай. Прежде, чем перейти к основной теореме этого раздела, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть q', γ, l — произвольные положительные числа, причем $1 < q' < \infty$.*

Положим

$$A(q', \gamma) = \{ g : g \in L_{q'}^1(0, l), \int_0^l |g'(u)|^{q'} du \leqslant \gamma,$$

$$g(0) = g(l) = 0 \} \quad (1 < q' < \infty)$$

и пусть $A^0(q', \gamma)$ $(1 < q' < \infty)$ состоит из всех функций $g \in A(q', \gamma)$, которые в начале сегмента $[0, l]$ строго монотонно возрастают, потом могут принимать постоянное значение, а в конце сегмента $[0, l]$ строго монотонно убывают. Тогда

а) *Для любого $p' \in [1, \infty]$*

$$\sup_{g \in A(q', \gamma)} \|g\|_{p'} = \sup_{g \in A^0(q', \gamma)} \|g\|_{p'} \quad (1 < q' < \infty).$$

в) *Если q — число, сопряженное с q' $(1/q + 1/q' = 1)$, то*

$$\sup \{ \|g\|_\infty : g \in A(q', \gamma) \} = \frac{1}{2} l^{1/q} \gamma^{1/q'},$$

с) *Если $p' \in [1, \infty]$ и $p' \leqslant q'$, то*

$$\sup \{ \|g\|_{p'} : g \in A(q', \gamma) \} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p'+q} \right)^{1/p'} \gamma^{1/p'} l^{1/p' + 1/q},$$

если $p' \geqslant q'$, то

$$\sup \{ \|g\|_{p'} : g \in A(q', \gamma) \} \leqslant \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}} \frac{p'}{p'+q} \right)^{1/p'} \gamma^{1/q'} l^{1/p' + 1/q},$$

где q, как и прежде, число, сопряженное с q'.

Доказательство. Часть а) будет доказана, если для любой функции $g \in A(q', \gamma)$ мы сможем указать функцию $\bar{g} \in A^0(q', \gamma)$, такую, что

$$\|g\|_{p'} \leqslant \|\bar{g}\|_{p'} \quad (1 \leqslant p' \leqslant \infty).$$

Поскольку $g \in L_{q'}^1(0, l) \subset L_1^1(0, l)$, то ([1], гл. 8) $|g|$ — функция ограниченной вариации. Обозначим через $v(x)$ и $w(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ соответственно полные вариации функций $|g(t)|$ и $|g(l-t)|$ на отрезке $[0, x]$ и определим функции $p(x)$ и $q(x)$ равенствами

$$p(x) = \frac{v(x) + |g(x)|}{2}, \quad q(x) = \frac{w(x) + |g(l-x)|}{2}.$$

Ясно, что $p(0) = q(0) = 0$. Из курса математического анализа известно ([2], гл. 6), что p и q монотонно возрастают на $[0, l]$

$$|g(x)| \leqslant p(x), \ |g(l-x)| \leqslant q(x) \ (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{1}$$

причем $p(x) = \text{const}$ в тех промежутках, где $|g|$ монотонно убывает, $p(x) = |g(x)| + \text{const}$ — на остальном множестве, $q(x) = \text{const}$ там, где $|g|$ монотонно возрастает и $q(x) = |g(l-x)| + \text{const}$ — на остальном множестве. Поскольку число интервалов постоянства функций p и q не более, чем счетно, мы можем пронумеровать их. Пусть $\{(a_i, b_i)\}_i$ — все интервалы постоянства функции p, а $\{(c_j, d_j)\}_j$ — все интервалы постоянства функции q. Из вышесказанного заключаем, что

$$p'(x) = h^+(x), \ q'(l-x) = -h^-(x) \ (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{2}$$

где

$$h^+(x) = \frac{1}{2}(|(|g|')(x)| + |g|'(x)), \ h^-(x) = \frac{1}{2}(|(|g|'(x)| - |g|'(x))$$

соответственно положительная и отрицательная части производной функции $|q|$.

Положим $E = [0, l] \setminus (\bigcup_i (a_i, b_i))$, $F = [0, l] \setminus (\bigcup_j (c_j, d_j))$ и определим функции $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равенствами

$$\bar{p}(x - \sum_{b_i < x} (b_i - a_i)) = p(x), \ x \in E$$

$$\bar{q}(x - \sum_{d_j < x} (d_j - c_j)) = q(x), \ x \in F.$$

Допуская некоторую вольность речи, можем сказать, что графики функций $\bar{p}$ и $\bar{q}$ получаются сжатием к оси ординат графиков p и q, причем полученные таким образом графики строго монотонно возрастают.

Нетрудно убедиться в том, что $\bar{p}$ и $\bar{q}$ определены соответственно на $[0, \alpha]$ и $[0, \beta]$, где

$$\alpha = l - \sum_i (b_i - a_i), \ \beta = \sum_j (d_j - c_j)$$

и $\alpha + \beta \leqslant l$. Теперь можем определить $\bar{g}$:

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \bar{p}(x), & \text{если } 0 \leqslant x < \alpha \\ \bar{p}(\alpha), & \text{если } \alpha \leqslant x \leqslant l - \beta \\ \bar{q}(l-x), & \text{если } l - \beta < x < l. \end{cases}$$

Наши предположения о функции g показывают, что $\bar{g}$ — абсолютно непрерывная функция, $\bar{g}(0) = \bar{g}(l) = 0$, а из (1) получаем

$$|g(x)| < \bar{g}(x), \ 0 \leqslant x < l.$$

Поэтому $\|g\|_{p'} \leqslant \|\bar{g}\|_{p'}$ и доказательство части а) будет завершено, если покажем, что $\|\bar{g}\|_{q'}^{q'} < \gamma$.

Но в силу (2)

$$\|\bar{g}\|_{q'}^{q'} = \int_0^{\theta} |p'(x)|^{q'} dx + \int_{l-\theta}^{l} |\bar{q}'(l-x)|^{q'} dx =$$

$$= \int_E (h^+(x))^{q'} dx + \int_F (h^-(x))^{q'} dx = \int_E (h^+(x) + h^-(x))^{q'} dx +$$

$$+ \int_F (h^+(x) + h^-(x))^{q'} dx = \int_0^l (h^+(x) + h^-(x))^{q'} dx =$$

$$= \| |g'| \|_{q'}^{q'} = \|g\|_{q'}^{q'} \leqslant \gamma.$$

в) Пусть функция $g \in A(q', \gamma)$ фиксирована, $h(u) = g'(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, а $h^+(u)$ и $h^-(u)$ — положительная и отрицательная части функции $g'(u)$, т. е.

$$h^+(u) = \frac{|g'(u)| + g'(u)}{2}, \quad h^-(u) = \frac{|g'(u)| - g'(u)}{2}.$$

Ясно, что $|g'(u)| = h^+(u) + h^-(u)$, $g'(u) = h^+(u) - h^-(u)$, а из условия $g(0) = g(l) = 0$ следуют равенства

$$\int_0^l h^+(u)\, du = \int_0^l h^-(u)\, du = \frac{1}{2}\int_0^l |g'(u)|\, du.$$

Поскольку для любой функции $g(x)$ из $A(q', \gamma)$ имеет место представление

$$g(x) = \int_0^x g'(u)\, du, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

то с помощью неравенства Гельдера мы можем сверху оценить величину $\|g\|_\infty$:

$$\|g\|_\infty = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |g(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} \left| \int_0^x g'(u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant l} \int_0^x h^+(u)\, du \leqslant \int_0^l h^+(u)\, gu = \frac{1}{2}\int_0^l |g'(u)|\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^l |g'(u)|^{q'} du\right)^{1/q'} \left(\int_0^l du\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2}\gamma^{1/q'} l^{1/q}.$$

Таким образом

$$\|g\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\gamma^{1/q'} l^{1/q} \tag{3}$$

и чтобы завершить в) нам необходимо построить экстремальную функцию $g_0 \in A(q', \gamma)$, для которой неравенство (3) превращается в равенство.

Легко проверить, что функция

$$g_0(x) = \begin{cases} \gamma^{1/q'} x l^{-1/q'}, & 0 \leqslant x \leqslant l/2 \\ \gamma^{1/q'} (l-x) l^{-1/q'}, & l/2 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

принадлежит классу $A(q', \gamma)$ и, кроме того

$$g_0\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} l^{1/q} \gamma^{1/q'},$$

т. е. является экстремальной.

с) В силу части а), часть с) будет доказана, если в требуемых доказательства неравенствах множество $A(q', \gamma)$ заменить множеством $A^\circ(q', \gamma)$. Сначала докажем 2-е неравенство, т. е. случай, когда $p' \leqslant q'$. Пусть $g \in A^\circ(q', \gamma)$ фиксирована и точка $c \in (0, l)$ выбрана таким образом, что g монотонно возрастает на $(0, c)$ и монотонно убывает на (c, l). Не нарушая общности считаем, что $c < l/2$, так как в противном случае рассмотрим функцию $g(l-x)$.

Определим числа γ_+ и γ_- равенствами

$$\gamma_+ = \int_0^c ((h^+(u))^{q'}\, du, \quad \gamma_- = \int_c^l (h^-(u))^{q'}\, du$$

и положим

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \gamma_+^{1/q'} x^{1/q}, & 0 \leqslant x \leqslant l/2 \\ \gamma_-^{1/q'} (l-x)^{1/q}, & l/2 < x \leqslant l. \end{cases}$$

Заметим, что $\bar{g}$ не обязана быть непрерывной. Применяя неравенство Гельдера мы можем поточечно оценить $g(x)$ на сегменте $[0, c]$:

$$g(x) = \int_0^x h^+(u)\, du \leqslant \left(\int_0^x (h^+(u))^{q'}\, du\right)^{1/q'} \left(\int_0^x du\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_+^{1/q'} x^{1/q} = \bar{g}(x) \ (0 \leqslant x \leqslant c).$$

Ввиду условия $g(x) \in A^\circ(q', \gamma)$, для любого $x \in [0, l/2]$ имеем

$$g(x) \leqslant g(c) \leqslant \gamma_+^{1/q'} c^{1/q} \leqslant \gamma_+^{1/q'} x^{1/q}, \ 0 \leqslant x \leqslant l/2.$$

А это означает, что $g(x) \leqslant \bar{g}(x)$ для любого $x \in [0, l/2]$.

Аналогично, рассматривая функцию $g(l-x)$ и учитывая равенство $g'(l-x) = h^-(l-x)$, $0 \leqslant x \leqslant l/2$, получаем

$$g(l-x) = \int_0^{l-x} h^-(l-u)\, du = \int_{l-x}^l h^-(u)\, du \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{l-x}^l (h^-(u))^{q'}\, du\right)^{1/q'} \left(\int_{l-x}^l du\right)^{1/q} \leqslant \gamma_-^{1/q'} (l-x)^{1/q}.$$

Поэтому

$$g(x) \leqslant \gamma_-^{1/q'} (l-x)^{1/q} \leqslant \bar{g}(x), \; l/2 \leqslant x \leqslant l.$$

Итак, $g(x) \leqslant \tilde{g}(x)$ для любого $x \in [0, l]$ и мы можем сверху оценить $\|g\|_{p'}$:

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int_0^l (g(x))^{p'} dx \leqslant \int_0^l (\tilde{g}(x))^{p'} dx = \int_0^{l/2} \gamma_+^{p'q'} x^{p'q} dx +$$

$$+ \int_{l/2}^l \gamma_-^{p'/q'} (l-x)^{p'/q'} dx = \frac{q}{p'+q'} (\gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'}) \left(\frac{l}{2}\right)^{p'/q} + 1.$$

Но сумма $\gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'}$ $(p' \leqslant q')$ при условии $\gamma_+ + \gamma_- = \gamma$ принимает свое максимальное значение тогда, когда $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma/2$.

В самом деле, если

$$L(\gamma_+, \gamma_-) = \gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'} - \lambda\gamma_+ - \lambda\gamma_- - \lambda\gamma$$

— функция Лагранжа, то из необходимых условий экстремума

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_+} = \frac{p'}{q'} \gamma_+^{p'/q'-1} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_-} = \frac{p'}{q'} \gamma_-^{p'/q'-1} - \lambda = 0$$

заключаем, что $\gamma_+ = \gamma_- = \gamma/2$. Нетрудно проверить, что точка $(\gamma/2, \gamma/2)$, при условии $p' \leqslant q'$, является точкой максимума для суммы $\gamma_+^{p'/q'} + \gamma_-^{p'/q'}$. Следовательно

$$\|g\|_{p'}^{p'} \leqslant \frac{q}{p'+q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{p'/q'} 2 \left(\frac{l}{2}\right)^{p'/q'+1} l^{p'/q+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p'/q} \times$$

$$\times \frac{q}{p'+q} \left(\frac{1}{2}\right)^{p'/q'} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q'+1} = \frac{q}{p'+q} \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q+1},$$

$$\|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2} \gamma^{1/q'} \left(\frac{q}{p'+q}\right)^{1/p'} l^{1/q+1/p'}.$$

Для того, чтобы доказать второе неравенство части c) (случай, когда $p' > q'$), рассмотрим функцию

$$g^*(x) = \begin{cases} \gamma^{1/q'} x^{1/q}, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l/2^q \\ \dfrac{1}{2} \gamma^{1/q} l^{1/q}, & \text{при } l/2^q < x \leqslant l - l/2^q \\ \gamma^{1/q'} (l-x)^{1/q}, & \text{при } l - l/2^q < x \leqslant l. \end{cases}$$

Если $g \in A^\circ(q', \gamma)$, то для любого $x \in [0, l/2^q]$

$$g(x) = \int_0^x g'(u)\, du \leqslant \left(\int_0^x |g'(u)|^{q'} du\right)^{1/q'} \left(\int_0^x u du\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_0^l |g'(u)|^{q'}\, du \Big)^{1/q'} x^{1/q'} \leqslant \gamma^{1/q'} x^{1/q} = g^*(x),$$

т. е.

$$g(x) \leqslant g^*(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l/2^q.$$

Аналогичным образом, для любого $x \in [0,\ l/2^q]$

$$g(l-x) = \int_0^x g'(l-u)\, du \leqslant \Big(\int_0^x |g'(l-u)|^{q'}\, du \Big)^{1/q'} \Big(\int_0^x u\, du \Big)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_0^l |g'(l-u)|^{q'}\, du \Big)^{1/q'} x^{1/q} \leqslant \gamma^{1/q'} x^{1/q},$$

т. е.

$$|g(x)| \leqslant \gamma^{1/q'} (l-x)^{1/q} = g^*(x),\ x \in \Big(l\Big(1-\frac{1}{2^q}\Big),\ l \Big].$$

В силу части в)

$$g(x) \leqslant \frac{1}{2} \gamma^{1/q'} l^{1/q} = g^*(x),\ l/2^q \leqslant x \leqslant l \Big/ \Big(1-\frac{1}{2^q}\Big).$$

Таким образом, $g(x) \leqslant g^*(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ и мы можем оценить $\|g\|_{p'}$ через норму функции g^*:

$$\|g\|_{p'}^{p'} \leqslant \|g^*\|_{p'}^{p'} = 2 \Big[\int_0^{l/2^q} \gamma^{p'/q'} x^{p'/q} dx + \int_{l/2^q}^{l/2} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q}\, dx =$$

$$= 2 \Big[\frac{q}{p'+q} \gamma^{p'/q} \Big(\frac{l}{2^q}\Big)^{\frac{p'+q}{q}} + \frac{1}{2} \gamma^{p'/q'} l^{\frac{p'+q}{q}} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^q} \Big) \Big] =$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p'} \gamma^{p'/q'} l^{p'/q+1} \Big[\frac{q}{p'+q} + 1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{q-1} \Big] =$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p'} \Big(1 - \frac{p'}{2^{q-1}(p'+q)} \Big) \gamma^{p'/q'} l^{p'/q+1}.$$

Значит

$$\|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2} \Big(1 - \frac{1}{2^{q-1}} \frac{p'}{p'+q} \Big) \gamma^{1/q'} l^{1/q+1/p'}.$$

Этим доказательство леммы завершено, поскольку последнее неравенство верно для любого $g \in A^\circ(q', \gamma)$. В заключение отметим, что функции, построенные в части c) не являются экстремальными в том смысле, что они не принадлежат классу $A(q', \gamma)$.

Легко заметить, что лемма 1 остается в силе и в том случае, когда рассматриваемые в ней функции определены не на $[0, l]$, а на произвольном сегменте $[a, b]$. Поэтому мы можем сформулировать утверждение c) леммы в следующем виде.

Следствие 2. *Пусть* $\gamma > 0$ — *произвольное число,* $1 < q' < \infty$, q — *число, сопряженное с* q' *и*

$$A(q', \gamma, a, b) = \left\{ g : g \in L^1_{q'}(a, b), \int_a^b |g'(u)|^{q'} du \leqslant \gamma,\ g(a) = g(b) = 0 \right\}.$$

Тогда

$$\sup_{g \in A(q', \gamma, a, b)} \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \frac{q}{p'+q} \gamma^{p'/q'} (b-a)^{p'/q+1} \tag{4}$$

для любого $1 \leqslant p' \leqslant q'$ *и*

$$\sup_{g \in A(q', \gamma, a, b)} \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}} \frac{p'}{p'+q}\right) \gamma^{p'/q'} (b-a)^{p'/q+1} \tag{5}$$

для любого $q' < p' < \infty$.

Перейдем к оценке, а в некоторых случаях нахождению наилучшего приближения классов W^1_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ подпространством кусочно постоянных. Пусть $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, $(i = 1, 2, \cdots, N)$, $\bar{\Delta} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \Delta_i$, а $S^0 = S^0(\Delta)$ — пространство кусочно-постоянных относительно этого разбиения:

$$S^0 = \{s(x) : s(x) = \text{const на } (x_{i-1}, x_i)\ i = 1, 2, \cdots, N\}.$$

Известно (см., например, [3], § 3.5), что для любых $p, q \in [1, \infty]$

$$E(W^1_p, S^0)_q = \sup \{ \|g\|_{q'} : g \in W^1_{q'}(S^0)_0 \}, \tag{6}$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$, а

$$W^1_{q'}(S^0)_0 = \{g : g \in W^1_{q'},\ g(x_i) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, N\}.$$

Теорема 3. *Допустим, что* $p, q \in [1, \infty)$, *а* p' *и* q' *числа, сопряженные с* p *и* q *соответственно. Тогда*

а) *Для любого* $1 < p < \infty$ *и* $q = \infty$

$$E(W^1_p, S^0)_\infty = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{1/p'}.$$

в) *Если* $p = 1$, $1 < q < \infty$, *то*

$$E(W^1_1, S^0)_q = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^{1/q}.$$

с) *Если* $q = 1$, $1 < p < \infty$, *то*

$$E(W^1_p, S^0)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \left(\sum_{i=1}^N \Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'} \bar{\Delta}.$$

В частности, если Δ^* — *равномерное разбиение, т. е. узлы разбиения* Δ^* *определяются формулой* $x_i^* = i/N$, $i = 0, 1, \cdots, N$, *то*

$$E(W_p^1,\ S_N^0)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+p'}\right)^{1/p'}\frac{1}{N},$$

где S_N^0 — пространство кусочно-постоянных относительно этого разбиения.

d) *Если* $1 < q < \infty$, *а* $p \leqslant q$, *то*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\bar{\Delta}^{1/p'+1/q} \leqslant E(W_p^1,\ S^0)_q \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{q-1}}\,\frac{p'}{p'+q}\right)^{1/p'}\bar{\Delta}^{1/p'+1/q}.$$

e) *Если* $1 < q < \infty$ *и* $p > q$, *то*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'} \leqslant E(W_p^1,\ S^0)_q \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+q}\right)^{1/p'}\bar{\Delta},$$

а в случае равномерного разбиения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\frac{1}{N} \leqslant E(W_p^1,\ S^0)_q \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a}{p'+q}\right)^{1/p'}\frac{1}{N}.$$

f) *Если* $p = \infty$, $1 < q < \infty$, *то*

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^2 \leqslant E(W_\infty^1,\ S^0)_q \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{q}{q+1}\,\bar{\Delta}.$$

В частности, когда $\Delta = \Delta^*$ *— равномерное разбиение, то*

$$\frac{1}{4N} \leqslant E(W_\infty^1,\ S_N^0)_q \leqslant \frac{q}{1+q}\,\frac{1}{2N}.$$

Замечание. Разумеется, что в случае равномерного разбиения пункты a), b), c) не перестают быть верными, если в этих пунктах $\bar{\Delta}$ заменить числом $1/N$. Если $E(W_p^1,\ S^0)_q$ рассматривать как функцию от переменных p и q, то результаты, приведенные в теореме, удобно написать в виде квадратной таблицы с вершинами $(1, 1)$, $(1, \infty)$, (∞, ∞), $(\infty, 1)$, по горизонтали которого меняется p, а по вертикали — q. Например, в случае равномерного разбиения Δ^* таблица принимает вид:

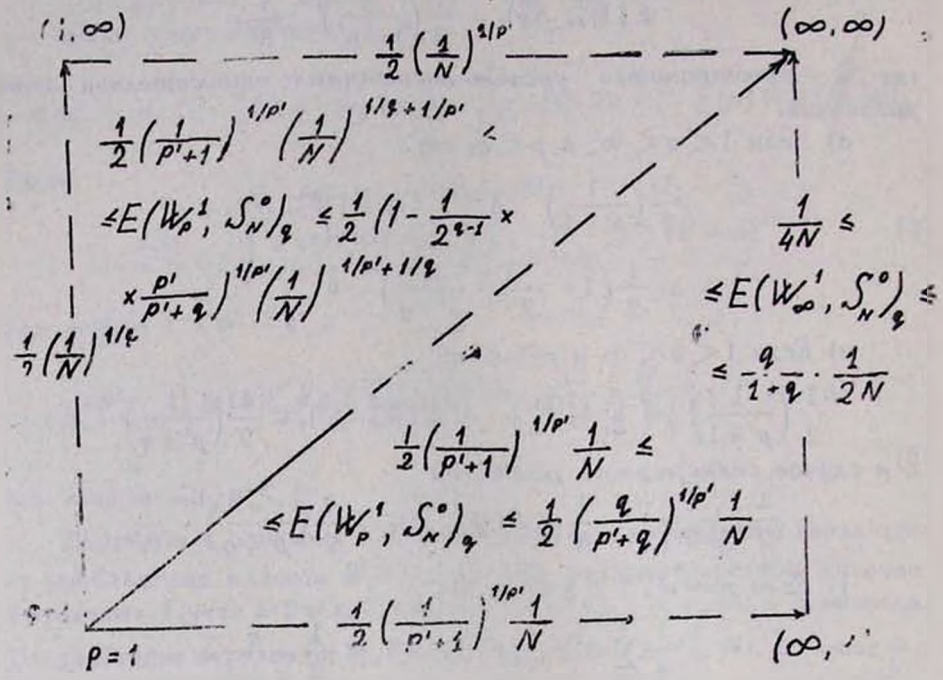
В монографии [4] (гл. 6) показано, что в треугольнике с вершинами $(1, 1)$, $(1, \infty)$, (∞, ∞) (случай, когда $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$) для произвольного разбиения Δ имеет место оценка

$$E(W_p^1,\ S^0)_q \leqslant \frac{1}{2}\,\bar{\Delta}^{1/p'+1/q},$$

причем точность установлена лишь в случае $p = \infty$, $q = \infty$. Когда $\Delta = \Delta^*$ — разбиение равномерное, $N = 2n$ — число четное, в [5] через нормы сплайнов Эйлера сверху оценены величины $E(W_1^1,\ S_{2n}^0)_q$ и $E(W_p^1,\ S_{2n}^0)_\infty$. В частности доказано, что

$$E(W_\infty^1,\ S_{2n}^0)_\infty \leqslant \frac{1}{4n} = \frac{1}{2N},\quad E(W_\infty^1,\ S_{2n}^0)_1 \leqslant \frac{1}{8n} = \frac{1}{4N},$$

$$E(W_1^1,\ S_{2n}^0)_1 \leqslant \frac{1}{4n} = \frac{1}{2N}.$$



$$E(W_1^1, S_{2n}^0)_1 \leqslant \frac{1}{4n} = \frac{1}{2N}.$$

Из теоремы видно, что приведенные выше оценки сверху на самом деле являются точными.

Доказательство теоремы 3. а) Сначала предположим, что $p = 1$, $q = \infty$ ($p' = \infty$, $q' = 1$). В силу (6)

$$E(W_1^1, S^0)_\infty = \sup \|g\|_\infty : g \in W_1^1,\ g(x_i) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, N\}.$$

Зафиксируем функцию $g \in W_1^1(S^0)_0$ и положим

$$M = \max_{0 \le x \le 1} |g(x)| = \|g\|_\infty.$$

Существует точка $c \in [0, 1]$ (предположим из интервала (x_{i-1}, x_i)) такая, что $M = |g_0(c)|$. Ввиду того, что $g(x_{i-1}) = g(x_i) = 0$ заключаем

$$M = \left| \int_{x_{i-1}}^{c} g'(u)\, du \right| = \left| \int_{c}^{x_i} g'(u)\, du \right|.$$

Повтому

$$2M = \left| \int_{x_{i-1}}^{c} g'(u)\, du \right| + \left| \int_{c}^{x_i} g'(u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_{i-1}}^{c} |g'(u)|\, du + \int_{c}^{x_i} |g'(u)|\, du = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\, du \leqslant 1$$

а, значит, $\|g\|_\infty \leqslant 1/2$ ($g \in W_1^1(S^0))_0$).

Функция

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} (1/x_1)\,x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant x_1/2 \\ (1/x_1)\,(1-x), & \text{если } x_1/2 \leqslant x \leqslant x_1 \\ 0, & \text{если } x_1 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

принадлежит множеству $W_1^1(S^0)_0$, и кроме того

$$\|\bar{g}\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $E(W_1^1, S^0)_\infty = 1/2$.

Пусть теперь $1 < p \leqslant \infty$, $q = \infty$ $(1 \leqslant p' < \infty,\ q' = 1)$ и $g \in W_1^1(S^0)_0$. Определим числа γ_i равенствами

$$\gamma_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\,du,\quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Тогда из условия $\|g'\|_1 \leqslant 1$ имеем $\sum_{i=1}^{N} \gamma_i \leqslant 1$, а из ортогональности функции g' к подпространству S^0 следует, что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} h_i^+(u)\,du = \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\,du = \frac{\gamma_i}{2},\quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

где h_i^+ — положительная часть сужения функции g' на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Поскольку на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$

$$g(x) = \int_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\,du,\quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,$$

то

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'}\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \int_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\,du \right|^{p'} dx \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} h_i^+(u)\,du \right)^{p'} dx =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\,du \right) dx \leqslant \frac{1}{2^{p'}}\,\gamma_i^{p'}\,\Delta_i.$$

Поэтому

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'}\,dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \bar{\Delta}_i \sum_{i=1}^{N} \gamma_i^{p'}.$$

Но $\gamma_1^{p'} + \gamma_2^{p'} + \cdots + \gamma_N^{p'} \leqslant 1$, ибо $\sum_{i=1}^{N} \gamma_i \leqslant 1$ и $p' > 1$. Следовательно

$$E(W_p^1, S^0)_\infty = \sup_{g \in W_1^1(S^0)_0} \|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2}\,\bar{\Delta}^{1/p'} \quad (1 < p \leqslant \infty).$$

Чтобы построить экстремальную функцию, для которой последнее неравенство превращается в равенство, выберем индекс j, при котором $\overline{\Delta} = x_j - x_{j-1}$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ положим

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} (1/2\varepsilon)(x - x_{j-1}), & \text{если } x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j-1} + \varepsilon \\ 1/2, & \text{если } x_{j-1} + \varepsilon \leqslant x \leqslant x_j - \varepsilon \\ (1/2\varepsilon)(x_j - x), & \text{если } x_j - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_j \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} [x_{j-1}, x_j]. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $g_\varepsilon(x) \in W_1^1(S^0)_0$ для любого $\varepsilon > 0$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon\|_{p'} = \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} dx \right)^{1/p'} = \frac{1}{2} \overline{\Delta}^{1/p'}.$$

Этим часть а) теоремы 3 доказана.

в) Если $p = 1$, $1 < q < \infty$ и $g \in W_q^1(S^0)_0$ $(1/q' + 1/q = 1)$, то определим числа γ_i следующим образом:

$$\gamma_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|^{q'} du, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Ясно, что $\sum \gamma_i \leqslant 1$. Чтобы сверху оценить $\max |g(x)|$ на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ применим неравенство Гельдера:

$$\max_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} |g(x)| = \max_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} \left| \int_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\, du \right| \leqslant \max_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} \int_{x_{i-1}}^{x}$$

$$h^+(u)\, du \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} h_i^+(u)\, du = \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|^{q'} du \right)^{1/q'} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} du \right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2} \gamma_i^{1/q} \Delta_i^{1/q}.$$

Таким образом

$$\max_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} |g(x)| \leqslant \frac{1}{2} \gamma_i^{1/q'} \Delta_i^{1/q},$$

а значит, $\|g\|_\infty \leqslant (1/2)\, \overline{\Delta}^{1/q}$, ибо $\gamma_i \leqslant 1$ для любого i.

Функция

$$g_0(x) = \begin{cases} \overline{\Delta}^{-1/q'} (x - x_{j-1}) & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j-1} \dfrac{\Delta}{2} \\ \overline{\Delta}^{-1/q'} (x_j - x), & x_{j-1} + \dfrac{\overline{\Delta}}{2} \leqslant x \leqslant x_j \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

(j — индекс, при котором $x_j - x_{j-1} = \bar{\Delta}$) принадлежит классу $W_{q'}^1(S^0)_0$ и, кроме того

$$|g|_- = g\left(x_{j-1} + \frac{\bar{\Delta}}{2}\right) = \frac{1}{2}\bar{\Delta}^{1/q}.$$

Следовательно

$$E(W_1^1, S^0)_q = \frac{1}{2}\bar{\Delta}^{1/q} \quad (1 < q < \infty),$$

и часть в) доказана.

с) Пусть теперь $q = 1$ ($q' = \infty$), $1 < p \leqslant \infty$ и $g \in W_\infty^1(S^0)_0$, т. е. $|g|_\infty \leqslant 1$ и $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \cdots, N$.

Рассмотрим функцию

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} x - x_{i-1}, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i-1} + \Delta_i/2 \\ x_i - x, & \text{если } x_{i-1} + \Delta_i/2 \leqslant x \leqslant x_i \end{cases}$$

и покажем, что $|g(x)| \leqslant \bar{g}(x)$ на любом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, \cdots, N$. В самом деле, если $x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + \Delta_i/2]$, то

$$|g(x)| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x} g'(u)\,du\right| \leqslant |g|_\infty \int_{x_{i-1}}^{x} du < x - x_{i-1} = \bar{g}(x).$$

Если же $x_{i-1} \leqslant t < \Delta_i/2 + x_{i-1}$, то

$$|g(x_{i-1} + x_i) - t| = \left|\int_{x_{i-1}}^{t} -g'(u)\,du\right| \leqslant t - x_{i-1}.$$

Положив $x = x_{i-1} + x_i - t$ будем иметь $x \in [x_{i-1} + \Delta_i/2, x_i]$ и

$$g(x) \leqslant x_i - x = \bar{g}(x), \quad x_{i-1} + \Delta_i/2 \leqslant x \leqslant x_i.$$

Таким образом, $|g(x)| \leqslant \bar{g}(x)$ $(0 \leqslant x < 1)$, а значит, $|g|_{p'} \leqslant |\bar{g}|_{p'}$ для любого $p' \in [1, \infty]$. Поскольку $\bar{g} \in W_-^1(S^0)_0$, то на основании (6) можем утверждать

$$E(W_p^1, S^0)_1 = |\bar{g}|_{p'}.$$

Но

$$|\bar{g}|_{p'}^{p'} = \int_0^1 (\bar{g}(x))^{p'}\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\bar{g}(x))^{p'}\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\Delta_i/2} (x - x_{i-1})^{p'}\,dx = \sum_{i=1}^{N} 2 \int_0^{\Delta_i/2} t^{p'}\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{p'+1} \frac{1}{p'+1} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{p'+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \frac{1}{p'+1} \bar{\Delta}^{p'} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} \frac{1}{p'+1} \bar{\Delta}^{p'}.$$

Поэтому

$$E(W_p^1,\ S^0)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^{p'+1}\right)^{1/p'} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\bar{\Delta}.$$

Когда же разбиение $\Delta = \Delta^*$ равномерное, то $\Delta_i = 1/N$ для любого $i = 1, 2, \cdots, N$ и

$$E(W_p^1,\ S_N^0)_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\frac{1}{N}.$$

Часть c) доказана.

Пусть теперь $1 < p,\ q < \infty$ и $g \in W_{q'}^1(S^0)_0$. Определим числа γ_i равенствами

$$\gamma_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g'(u)|^{q'}\,du,\quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Ясно, что $\sum \gamma_i \leqslant 1$. Так как $g \in W_{q'}^1(S^0)_0$, то сужение функции g на сегмент $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ является функцией из класса $A(q', \gamma_i, x_{i-1}, x_i)$ (см. следствие 2) и мы можем воспользоваться неравенствами (4) и (5).

d) Если $p < q$ $(p' > q')$, то в силу (5)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'}\,dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'}\left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\,\frac{p'}{p'+q}\right)\Delta_i^{p'/q+1},\quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Просуммировав последнее неравенство по i, получаем

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int_0^1 |g(x)|^{p'}\,dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'}\left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\,\frac{p'}{p'+q}\right)\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^{p'/q'}\,\Delta_i^{p'/q+1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'}\left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\,\frac{p'}{p'+q}\right)\bar{\Delta}^{p'/q+1}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i^{p'/q'}.$$

Но $\sum \gamma_i^{p'/q'} \leqslant 1$, поскольку $\sum \gamma_i \leqslant 1$ и $p' > q'$. Поэтому, в силу (6)

$$E(W_p^1,\ S^0)_q = \sup_{g \in W_{q'}^1(S^0)_0} \|g\|_{p'} <$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\,\frac{p'}{p'+q}\right)^{1/p'}\bar{\Delta}^{1/p'+1/q}\quad (1 < p < q < \infty).$$

Чтобы получить оценку снизу, положим

$$g_0(x) = \begin{cases} \bar{\Delta}^{-1/q}(x - x_{j-1}), & \text{если } x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_{j-1} + \bar{\Delta}/2 \\ \bar{\Delta}^{-1/q}(x_j - x), & \text{если } x_{j-1} + \bar{\Delta}/2 \leqslant x < x_j \\ 0, & \text{если } x \in [x_{j-1}, x_j], \end{cases}$$

где индекс j выбран из условия $x_j - x_{j-1} = \bar{\Delta}$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что $g_0(x) \in W_{q'}^1(S^0)_0$. С другой стороны

$$\|g_0\|_{p'} = \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} (g(x))^{p'} dx \right)^{1/p'} = \left(2 \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1}+\bar{\Delta}/2} \bar{\Delta}^{-p'/q'} (x - x_{j-1})^{p'} dx \right)^{1/p'} =$$

$$= 2^{1/p'} \bar{\Delta}^{-1/q'} \left(\int_0^{\bar{\Delta}/2} t^{p'} dt \right)^{1/p'} = 2^{1/p'} \bar{\Delta}^{-1/q'} \left(\frac{1}{p'+1} \right)^{1/p'} \left(\frac{\bar{\Delta}}{2} \right)^{1+1/p'} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p'+1} \right)^{1/p'} \bar{\Delta}^{1/p'+1/q},$$

а значит

$$E(W_p^1, S^0)_q \geqslant \|g_0\|_{p'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+p'} \right)^{1/p'} \bar{\Delta}^{1/p'+1/q}.$$

е) Если $p \geqslant q$ $(p' \leqslant q')$, то на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, N$ мы можем воспользоваться оценкой (4), которая при указанных выше обозначениях запишется в следующем виде:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'} dx \leqslant \left(\frac{1}{2} \right)^{p'} \frac{q}{p'+q} \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q}, \quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

Суммируя по i, получаем

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int_0^1 |g(x)|^{p'} dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)|^{p'} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} \right)^{p'} \frac{q}{p'+q} \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q'}.$$

Поскольку $0 < p'/q' \leqslant 1$, то в силу неравенства Иенсена (см. [1], с. 62)

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q'} = \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \frac{\Delta_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q'}}{\Delta_i^{p'/q'}} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{p'} \Delta_i^{1-p'/q'} \leqslant \bar{\Delta}^{-p'} \sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1-p'/q'} \leqslant$$

$$\leqslant \bar{\Delta}^{-p'} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p'}{q'} \gamma_i + \left(1 - \frac{p'}{q'} \right) \Delta_i \right) \leqslant \bar{\Delta}^{-p'} \left(\frac{p'}{q'} + 1 - \frac{p'}{q'} \right) = \bar{\Delta}^{-p'}.$$

Следовательно

$$E(W_p^1, S^0)_q = \sup_{g \in W_{q'}^1(S^0)_0} \|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p'+q} \right)^{1/p'} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i=1}^N \gamma_i^{p'/q'} \Delta_i^{1+p'/q} \right)^{1/p'} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{q}{p'+q} \right)^{1/p'} \bar{\Delta}$$

Академия наук Армянской ССР Фундаментальная библ.

Этим правые части неравенств пункта e) доказаны, ибо в случае равномерного разбиения $\bar{\Delta}=1/N$.

Чтобы получить оценки снизу, рассмотрим функцию g, определенную в e). Тогда

$$\|\bar{g}\|_{q'}^{q'}=\sum_{l=1}^{N}\int_{x_{l-1}}^{x_l}|\bar{g}'(x)|^{q'}\,dx=\sum_{l=1}^{N}\int_{x_{l-1}}^{x_l}dx=\sum_{l=1}^{N}\Delta_l=1,$$

т. е. $\bar{g}\in W_{q'}^1(S^0)_0$. С другой стороны

$$\|\bar{g}\|_{p'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\left(\sum_{l=1}^{N}\Delta_l^{p'+1}\right)^{1/p'},$$

откуда видно, что

$$E(W_p^1,\ S^0)_q\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\left(\sum_{l=1}^{N}\Delta_l^{p'+1}\right)^{1/p'}.$$

Когда Δ — равномерное разбиение, то $\Delta_l=1/N$, $i=1,\ 2,\cdots,\ N$ и сумма, стоящая в последнем неравенстве, равна $1/N$.

f) Допустим, что $p=\infty$ $(p'=1)$ и $1<q<\infty$. Тогда для любой функции $g\in W_{q'}^1(S^0)_0$, в силу e)

$$\|g\|_1=\lim_{p'\to 1}\|g\|_{p'}\leqslant\frac{1}{2N}\lim_{p'\to 1}\left(\frac{q}{p'+q}\right)^{1/p'}=\frac{1}{2N}\,\frac{q}{1+q},$$

т. е.

$$E(W_\infty^1,\ S^0)_q=\sup_{g\in W_{q'}^1(S^0)_0}\|g\|_1\leqslant\frac{1}{2N}\,\frac{q}{1+q}.$$

С другой стороны, для функции g (которая принадлежит классам $W_{q'}^1(S^0)_0$ при любом q'), рассмотренной в пункте c) теоремы 3, имеем, что

$$E(W_\infty^1,\ S^0)_q\geqslant\|g\|_1=\lim_{p'\to 1}\|\bar{g}\|_{p'}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p'\to 1}\left(\frac{1}{p'+1}\right)^{1/p'}\left(\sum_{l=1}^{N}\Delta_l^{p'+1}\right)^{1/p'}=\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{N}\Delta_l^2.$$

В частности, при равномерном разбиении $\Delta=\Delta^*$

$$E(W_\infty^1,\ S_\Delta^0)_q\geqslant\|g\|_1=\frac{1}{4N}.$$

Итак, оба неравенства пункта f) установлены. В наших расжуждениях мы существенно воспользовались тем, что $\|g\|_{p'}\to\|g\|_1$ при $p'\to 1$ для произвольной непрерывной функции g. Докажам этот факт.

Пусть p_n' — произвольная сходящаяся к 1 последовательность и

$$g_n(x)=|g(x)|^{p_n'},\quad n=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

Тогда $g_n(x)\to|g(x)|$ для любого x и по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 |g(x)|^{p_n'}\,dx \to \int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

Следовательно

$$\|g\|_{p_n'} = \left(\int_0^1 |g(x)|^{p_n'}\,dx\right)^{1/p_n'} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 |g(x)|\,dx\right)^{1/p_n'} = \|g\|_1.$$

Таким образом, $\|g\|_{p_n'} \to \|g\|_1$ для любой последовательности p_n', которая сходится к единице, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3 завершено.

3°. Двумерный случай. Пусть m, n—натуральные числа,

$$\Delta_1 = \left\{\frac{i}{n} : i = 0, 1, \cdots, n\right\},\ \Delta_2 = \left\{\frac{j}{m} : j = 0, 1, \cdots, m\right\}$$

— одномерные равномерные разбиения, $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, $\Delta_{i,j} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right] (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$ и S_0 — пространство кусочно-постоянных относительно разбиения Δ квадрата I, т. е.

$$S_0 = \{s(x, y) : s(x, y) = \text{const на } \Delta_{ij}\}.$$

Через S_0^x и S_0^y обозначим пространства кусочно-постоянных функций одной переменной относительно Δ_1 и Δ_2 соответственно.

Рассмотрим класс $W_p^{1,1}$, определенный во введении и найдем наилучшее приближение этого класса пространством кусочно-постоянных в метрике L_∞. Как в одномерном случае, здесь мы тоже воспользуемся общими соотношениями двойственности для двух переменных, приведенными в [6]. В нашем частном случае там (с. 41) установлено, что

$$E(W_p^{1,1}, S_0)_\infty = \sup_{g \in W_p^{1,1}(S_0)_0} \{\|g\|_{p'} + \|g(\cdot, 1)\|_{p'} + \|g(1, \cdot)\|_{p'}\}, \qquad (7)$$

где

$$W_1^{1,1}(S_0)_0 = \{g \in L_1^{1,1} : \|g^{(1,1)}\|_1 \leqslant 1,\ g^{(1,1)} \perp S_0,\ g(x, 0) =$$

$$= g(0, y) = 0,\ g(x, 1) \in W_1^1(S_0^x)_0,\ g(1, y) \in W_1^1(S_0^y)_0\},$$

$$W_1^1(S_0^x)_0 = \{g \in L_1^1(0, 1) : \|g'\|_1 \leqslant 1,\ g(i/n) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$W_1^1(S_0)_0 = \{g \in L_1^1(0, 1) : \|g'\|_1 \leqslant 1,\ g(j/m) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m\},$$

а $g^{(1,1)} \perp S_0$ означает, что $\int_{\Delta_{ij}} \int g^{(1,1)}(u, v)\,du\,dv = 0,$

$$i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m.$$

Отметим, что из определения множества $L_1^{1,1}$ и из условий $g(0, y) = g(x, 0) = 0$ следует, что каждая функция $g \in W_1^{1,1}(S_0)_0$ допускает представление

$$g(x, y) = \int_0^x \int_0^y g^{(1,1)}(u, v)\,du\,dv,\ (x, y) \in I.$$

Теорема 4. *Для любого* $p \in [1, \infty]$

$$E(W_p^{1,1}, S_0)_\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'}, \quad (8)$$

где p' *— число, сопряженное с* p.

Доказательство. Пусть функция $g \in W_1^{1,1}(S_0)_0$ фиксирована. Поскольку $g(x, 1) \in W_1^1(S_0^x)_0$, а $g(1, y) \in W_1^1(S_0^y)_0$, то в силу пункта а) теоремы 3

$$\|g_x^1(\cdot, 1)\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'}, \quad \|g(1, \cdot)\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'}. \quad (9)$$

Докажем, что

$$\|g\|_{p'} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Определим функции $h_{i,j}(u, v)$ и числа γ_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, m)$ следующим образом:

$$h_{i,j}(u, v) = \begin{cases} g^{(1,1)}(u, v), & \text{если } (u, v) \in \Delta_{ij} \\ 0, & \text{если } (u, v) \overline{\in} \Delta_{ij}, \end{cases}$$

$$\gamma_{ij} = \iint\limits_{\Delta_{ij}} |g^{(1,1)}(u, v)|\, du dv = \iint\limits_{\Delta_{ij}} |h_{ij}(u, v)|\, du dv.$$

Очевидно, что $\sum\limits_{ij} \gamma_{ij} \leqslant 1$ (здесь и в дальнейшем вместо суммы $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}$ напишем $\sum\limits_{ij}$) и

$$g^{(1,1)}(u, v) = \sum_{ij} h_{ij}(u, v), \quad (u, v) \in I.$$

Если

$$h_{ij}^+ = \frac{1}{2}(|h_{ij}| + h_{ij}), h_{ij}^-(u, v) = \frac{1}{2}(|h_{ij}| - h_{ij})$$

соответственно положительная и отрицательная части функции $h_{ij}(u, v)$, то

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}} h_{ij}(u, v)\, du dv - \iint\limits_{\Delta_{ij}} h_{ij}^-(u, v)\, du dv = \iint\limits_{\Delta_{ij}} h_{ij}(u, v)\, du dv = 0,$$

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}} h_{ij}^+(u, v)\, du dv + \iint\limits_{\Delta_{ij}} h_{ij}^-(u, v)\, du dv = \iint\limits_{\Delta_{ij}} |h_{ij}(u, v)|\, du dv = \gamma_{ij}.$$

Из последних равенств имеем, что

$$\iint\limits_{\Delta_{ij}} h_{ij}(u, v)\, du dv = \iint\limits_{\Delta_{ij}} h_{ij}^-(u, v)\, du dv = \frac{\gamma_{ij}}{2}$$

для любых $i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m$.

Положим

$$E_{ij}=\left|\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right|\times\left|\frac{j-1}{m},1\right|\cup\left|\frac{i}{n},1\right|\times\left|\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}\right|,$$

$$H_{ij}(x,y)=\int_0^x\int_0^y h_{ij}(u,v)\,du\,dv\ (1\leqslant i\leqslant n;\ 1\leqslant j\leqslant m).$$

Нетрудно видеть, что $H_{ij}(x,y)\equiv 0$ вне множества E, а во всех точках (x,y) множестаа E

$$H_{ij}(x,y)\leqslant\int_0^x\int_0^y h_{ij}(u,v)\,du\,dv=\frac{\gamma_{ij}}{2},\ (x,y)\in E.$$

Теперь можем оценить $\|g\|_{p'}$:

$$\|g(x,y)\|_{p'}=\left\|\int_0^x\int_0^y g^{(1,1)}(u,v)\,du\,dv\right\|_{p'}=$$

$$=\left\|\sum_{ij}\int_0^x\int_0^y h_{ij}(u,v)\,du\,dv\right\|_{p'}=\left\|\sum_{ij}H_{ij}(x,y)\right\|_{p'}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{ij}\|H_{ij}(x,y)\|_{p'}\leqslant\sum_{ij}\left(\iint\limits_{E_{ij}}\left(\frac{\gamma_{ij}}{2}\right)^{p'}dx\,dy\right)^{1/p'}=$$

$$=\sum_{ij}\frac{\gamma_{ij}}{2}\left(\frac{m+n-i-j+1}{mn}\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'}\sum_{ij}\gamma_{ij}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Таким образом

$$\|g\|_{p'}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'},$$

а из (7) и (9) следует, что

$$E(W_p^{1,1},S_0)_\infty\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'}+\frac{1}{2}\left(\frac{m+n-1}{mn}\right)^{1/p'},\quad(10)$$

т. е. левая часть (8) не больше его правой части.

Чтобы доказать обратное неравенство для достаточно малых $\varepsilon>0$ рассмотрим функцию

$$h_\varepsilon(u,v)=\begin{cases}1/2\varepsilon^2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\varepsilon,\ 0\leqslant y\leqslant\varepsilon\\ -1/2\varepsilon^2, & \text{если } 1/n-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1/n,\\ & \quad 1/m-\varepsilon\leqslant y\leqslant 1/m,\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

и положим

$$g_\varepsilon(x, y) = \int_0^x \int_0^y h_\varepsilon(u, v)\, du dv.$$

Ясно, что $g_\varepsilon \in W_1^{1,1}(S_0)_0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Так как

$$g_\varepsilon(x, 1) = \begin{cases} x/2\varepsilon, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon \\ 1/2, & \text{если } \varepsilon \leqslant x \leqslant 1/n - \varepsilon \\ (1/2\varepsilon)(1/n - x), & \text{если } 1/n - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0, & \text{если } 1/n \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

то легко проверить, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon(\cdot, 1)\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'}.$$

Аналогично

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon(1, \cdot)\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'}.$$

Непосредственной проверкой можно убдеиться в том, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|g_\varepsilon\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{2}\left(\frac{m + n - 1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Таким образом, для любого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|g_\varepsilon\|_{p'}^{p'} + \|g_\varepsilon(\cdot, 1)\|_{p'}^{p'} + \|g_\varepsilon(1, \cdot)\|_{p'}^{p'} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{m + n - 1}{mn}\right)^{1/p'} - \delta.$$

Но $g_\varepsilon(x, y) \in W_1^{1,1}(S_0)_0$, поэтому

$$E(W_p^{1,1}, S_0)_\infty \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{1/p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{m + n - 1}{mn}\right)^{1/p'}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (10), получаем (8). Теорема 4 доказана.

В заключение отметим, что утверждение теоремы 4 в случае $p = \infty$ ($p' = 1$) ранее было получено автором в работе [6].

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5. II. 1987

Ա. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆ. Առաջին կարգի սահմանափակ ածանցյալ ունեցող մեկ և երկու փոփոխականի ֆունկցիաների դասերի լավագույն մոտարկումը կոոր առ կոոր հաստատուններով *(ամփոփում)*

Հոդվածում ճշգրիտ գնահատականներ են ստացվել Սոբոլևյան դասերը կամայական L_q տարածությյան մեջ կոոր առ կոոր հաստատուններով մոտարկելու դեպքում։ Որոշ ճշգրիտ գնահատականներ ընդհանրացվել են երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար։

A. M. AVAKIAN. *On the best approximation of functions with bounded first derivative by piecewise constants in one and two dimensions* (summary)

In the paper exact error bounds are obtained in arbitrary L_q spaces, when Sobolev classes are approximated by piecewise constants. Some exact estimates are generalized for functions of two variables.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Rudin.* Real and complex analysis, New York, Mc. GRAW—HILL,
2. *У. Рудин.* Основы математического анализа, М., Мир, 1976, 319 с.
3. *Н. П. Корнейчук.* Сплайны в теории приближения, М., Наука, 1984, 352 с.
4. *L. L. Schumaker.* Spline functioos: Basic theory, New York, J. Wieley &Sons., 1981
5. *Н. П. Корнейчук.* О наилучшем приближении на отрезке классов функций с ограниченной r-й производной конечномерными подпространствами, Укр. матем. журн., 31, № 1, 1979, 23—31.
6. *А. М. Авакян.* Двойственные соотношения для некоторых классов функций двух переменных, Киев, Ин-т математики АН УССР, препринт 83. 41. 1983, 44 с.