УДК 517.95

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. А. ГАЛСТЯН, К. А. ЯГДЖЯН

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
 ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

1. Целью настоящей работы является доказательство единственности решения задачи Коши для эллиптического оператора с вырождающимся символом. Вырождение описывается с помощью функции $\lambda \in C^n(R^n)$, такой, что $0 < \lambda^2(x) \leq 1/2$. Обозначим $NZ = \{x \in R^n \mid \lambda(x) \neq 0\}$, $Z = \{x \mid \lambda(x) = 0\}$. Предполагается, что для каждого α существует константа C_α такая, что

$$|D^\alpha \lambda(x)| \leq C_\alpha K^{|\alpha|-1}(x) (|\lambda(x)| + |\nabla \lambda(x)|), \text{ при } x \in NZ, \quad (1)$$

где $K(x) = (|\lambda(x)| + |\nabla \lambda(x)|) / |\lambda(x)|$, а также для некоторого положительного $\varepsilon < 1/2$

$$K(x) \leq C_\varepsilon |\lambda(x)|^{-\varepsilon}, \text{ при } x \in NZ. \quad (2)$$

Рассмотрим оператор ($t \in J = [-T, T], T > 0$)

$$P(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{j+|\alpha| \leq m, j < m} a_{j,\alpha}(t, x) D_x^\alpha D_t^j, \quad (3)$$

где как обычно $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, $D_t = -iD_t = -i\partial/\partial t$.

Пусть M и N — положительные постоянные. Обозначим через $Z_\varepsilon(N)$ множество $\{(x, \xi) \in R^{2n} \mid \lambda^2(x) < \xi > \geq N^2 \ln^2 < \xi >, < \xi > \geq M\}$, где $< \xi >^2 = \varepsilon^2 + |\xi|^2$.

Рассмотрим $\{\tau_l(t, x, \xi)\}_{l=1}^m$ — множество нулей полного символа оператора P , то есть корней уравнения

$$\tau^m + \sum_{j+|\alpha| \leq m, j < m} a_{j,\alpha}(t, x) \tau^{j+\alpha} = 0. \quad (4)$$

Предположим, что функции $\tau_l(t, x, \xi)$ ($l = 1, \dots, m$) удовлетворяют следующим основным условиям:

(а) существуют M, N и положительная постоянная α такие, что для всех l при $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(N)$, $t \in J$, выполнено неравенство

$$|\operatorname{Im} \tau_l(t, x, \xi)| > \alpha |\lambda(x)| < \xi >. \quad (6)$$

(в) для всех j, l , для любых α, β, k с некоторыми постоянными $\delta_1, C_{k,\alpha,\beta}$

$$|\tau_l(t, x, \xi) - \tau_j(t, x, \xi)| \geq \delta_1 |\lambda(x)| < \xi >, l \neq j, \quad (6)$$

$$|D_t^\alpha D_x^\beta \tau_l(t, x, \xi)| \leq C_{k,\alpha,\beta} |\lambda(x)| < \xi >^{1-|\alpha|} K^{|\beta|}(x) \quad (7)$$

при всех $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(N)$, $t \in J$, а при $|\beta| = 0, |\alpha| = 1$ — для всех $(x, \xi) \in Z_\varepsilon R^n$.

(с) существуют α_l, β_l , ($l = 1, \dots, m'$, где $m' < m$) такие, что $\beta_l - \alpha_l \leq \pi - \varepsilon_l > 0$, $[z_l, \beta_l] \cap [z_k, \beta_k] = \emptyset$ при $l \neq k$, и для любого τ_l ($l = 1, \dots, m$) найдется i такой, что $\arg \tau_l(t, x, \xi) \in [z_l, \beta_l]$ при всех $(x, \xi) \in Z_c(N), t \in J$.

Из предположений (а) — (с) следует, что при всех $t \in J$, $x \in NZ$, $|x| < 1$, и всех j, z , $|a| \neq 0$, выполнены неравенства (см. [1]):

$$|D_t^k D_x^\alpha a_{j, z}(t, x)| \leq C_{k, z} |\lambda(x)|^{|\alpha|} K^{|\beta|}(x) |\ln \lambda^2(x)|^{m-j-|\alpha|}, \quad (8)$$

и $a_{j, z}(t, x) = 0$ при $x \in Z$, $|z| \neq 0$. Обозначим $\bar{R}_+^{n+1} = \{(t, x) | t \geq 0\}$. Мы докажем следующую основную теорему.

Теорема. Существует открытая окрестность U' начала координат в R^{n+1} такая, что если $u \in C^\infty(U)$, $\text{supp } u \subset \bar{R}_+^{n+1}$, удовлетворяет уравнению $Pu = 0$ в U , то $u \equiv 0$ в $U' \subset U$.

Для оператора (3) в случае, когда в правой части (8) отсутствует $|\ln \lambda^2(x)|$ теорема единственности анонсирована в работе [2], а случай вырождения по временной переменной рассмотрен в работе [3].

2. Как обычно, осуществив преобразование Хольмгрена $s = t + |x|^2$, $y = x$, получаем уравнение для новой неизвестной функции $v(s, y)$ $\text{supp } v \subset \{s \geq 0, |y|^2 \leq s\}$, причем, как нетрудно убедиться, преобразованный оператор удовлетворяет тем же условиям, что и первоначальный оператор P . Поэтому можно с самого начала считать, что $\text{supp } u \subset \{t > 0, |x|^2 \leq t\}$.

Пусть J компакт в R^1 , $t \in J$, и пусть $S_{\rho, \delta}^m$ — обычные классы символов.

Определение. (см. [1]). Пусть m_1, m_2, m_3 — действительные числа. Через $S_{\rho, \delta} [m_1, m_2, m_3]$ обозначим пространство всех функций $a(t, x, \xi) \in C^\infty(J \times R_x^n \times R_\xi^n)$ таких, что для некоторых ρ_1, δ_1, m

$$a \in C_t^m(J; S_{\rho_1, \delta_1}^m(R_x^n \times R_\xi^n)) \quad (9)$$

и для каждого k, α, β существуют положительные постоянные $C_{k, \alpha, \beta}$ такие, что для всех $t \in J$, $(x, \xi) \in Z_c(N)$ верно неравенство

$$|D_t^k D_x^\alpha D_\xi^\beta a(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} |\lambda(x)|^{m_2} K^{m_3 + |\beta|}(x). \quad (10)$$

Пусть теперь $x(z)$ — функция из $C^\infty(R^1)$ такая, что $0 \leq x(z) \leq 1$, $x(z) = 1$ при $|z| \leq 8T/10$ и $x(z) = 0$ при $|z| \geq 9T/10$.

Выберем постоянные d_l, c_l ($c_l > 0$), $l = 1, \dots, m$ такие, что $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m$, следующим образом. Если $\arg \tau_l \in [z_l, \beta_l]$, то и $d_l \in [\alpha_l, \beta_l]$, и если $\arg \tau_l$ и $\arg \tau_j$ попадают в один и тот же сегмент $[\alpha_l, \beta_l]$, то $d_l = d_j$, причем $c_l < c_j$ при $|z_l| < |z_j|$. Отметим, что в силу (а) — (с) такой выбор возможен.

Построим функции

$$h(x, \xi) = x \left(\frac{\lambda^2(x) \langle \xi \rangle^2}{N^2 \ln^2 \langle \xi \rangle} \right) \ln \langle \xi \rangle + |\cdot(x)| \langle \xi \rangle \left(1 - x \left(\frac{\lambda^2(x) \langle \xi \rangle^2}{N^2 \ln^2 \langle \xi \rangle} \right) \right),$$

$$\varphi_l(t, x, \xi) = c_l e^{id_l t} \ln \langle \xi \rangle x \left(\frac{\lambda^2(x) \langle \xi \rangle^2}{N^2 \ln^2 \langle \xi \rangle} \right) +$$

$$+ \tau_i(t, x, \xi) \left(1 - x \left(\frac{\lambda^2(x) < \xi >^2}{N^2 \ln^2 < \xi >} \right) \right).$$

Ясно, что $h(x, \xi)$, $\varphi_i(t, x, \xi) \in S[1, 1, 0]$. Пусть $H(x, D_x)$ — диагональный матричный ПДО с элементами $H_{ij} = \delta_{ij} h^{m-1}(x, D_x)$, $i, j = 1, \dots, m$, а $H^*(x, D_x)$ — его параметрикс. Если вектор $(u, D_1 u, \dots, D^{m-1} u)$ обозначить через U , а вектор $H(x, D_x)U$ через V_1 , то уравнение $Pu = 0$ можно переписать в виде системы

$$D_t V_1 + A(t, x, D_x) V_1 + RU = 0, \tag{11}$$

где $R \in C^\infty(J; S^{-\infty})$, а $A(t, x, \xi) \in S[1, 1, 0]$.

Составим по системе $\{\varphi_k(t, x, \xi)/h(x, \xi)\}_1^m$ матрицу Вандермонда $M^*(t, x, \xi)$, и пусть $M(t, x, D_x)$ — параметрикс для $M^*(t, x, D_x)$ (см. [1]), тогда вектор $W = M(t, x, D_x) V_1$ будет решением системы $LW + R_1 U = 0$, где $LW = D_t W + D(t, x, D_x) W + B(t, x, D_x) W$, причем $D(t, x, D_x)$ — оператор с диагональным символом с элементами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, а $R(t, x, D_x) \in C^\infty(J; \Psi^{-\infty})$. Относительно оператора $B(t, x, D_x)$ можно сказать, что $B(t, x, \xi) \in S[0, 0, 0]$ и при всех $(x, \xi) \in Z_\epsilon(2N)$, $t \in J$, для произвольных k, α, β

$$|D_t^k D_x^\alpha D_x^\beta B(t, x, \xi)| \leq C_{k, \alpha, \beta} < \xi >^{-|\alpha| + |\beta|} \ln < \xi >. \tag{12}$$

3. Как обычно, в доказательстве теоремы используется следующее неравенство карлемановского типа (см. [4]):

$$\rho \iint e^{\rho(T-t)^2} |V|^2 dxdt \leq C \iint e^{\rho(T-t)^2} |GV|^2 dxdt, \tag{13}$$

здесь ρ — некоторое достаточно большое положительное число,

$$G = \frac{\partial}{\partial t} + iD(t, x, B_x) + iB_1(t, x, D_x),$$

$$B_1(t, x, \xi) = \left(1 - x \left(\frac{\lambda^2(x) < \xi >^2}{N^2 \ln^2 < \xi >} \right) \right) B(t, x, \xi), \quad V(x) = x(t) W.$$

Отметим, что V имеет компактный носитель, лежащий в $R^n \times [0, T]$, а GV — компактный носитель, лежащий в $R^n \times [\delta T/10, T]$.

Осуществим замену $V(t, x) = V_0(t, x) \exp(-\rho(T-t)^2/2)$. Тогда (13) перейдет в

$$\rho \iint |V_0|^2 dxdt \leq C \iint \left| \frac{\partial V_0}{\partial t} + \rho(T-t) V_0 + iD V_0 + iB_1 V_0 \right|^2 dxdt. \tag{14}$$

Разложим операторы в правой части (14) в сумму их самосопряженных и кососопряженных частей: $iD = D^+ + D^-$, $iB = B^+ + B^-$. Интегрируя по частям, учитывая то, что $V_0(t, x)$ — функция с компактным по x носителем, получаем

$$\iint \left| \frac{\partial V_0}{\partial t} + \rho(T-t) V_0 + D^+ V_0 + D^- V_0 + B^+ V_0 + B^- V_0 \right|^2 dxdt =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint \left| \frac{\partial V_0}{\partial t} + D^- V_0 + B^- V_0 \right|^2 dx dt + \iint \left| \rho(T-t) V_0 + D^+ V_0 + \right. \\
&\quad \left. + B^+ V_0 \right|^2 dt dx + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \left(\left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (D^+ + B^+) + [D^+ + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + B^+, D^- + B^-] \right\} V_0, V_0 \right)_0 dt, \quad (15)
\end{aligned}$$

где $(,)_0$ — скалярное произведение в $L_2(R^n)$.

Для доказательства (14) теперь уже достаточно показать, что с некоторой постоянной $\kappa > 1$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&- \kappa \int_0^T \left(\left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (D^+ + B^+) + [D^+ + B^+, D^- + B^-] \right\} V_0, V_0 \right)_0 dt < \\
&\leq \int_0^T \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} + D^- + B^- \right) V_0 \right\|^2 dt + \int_0^T \left\| \left(\rho(T-t) + D^+ + B^+ \right) V_0 \right\|^2 dt + \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \int_0^T \|V_0\|^2 dt. \quad (16)
\end{aligned}$$

Докажем (16). Обозначим через B_2 оператор $-\frac{\partial}{\partial t} (D^+ + B^+) + [D^+ + B^+, D^- + B^-]$, тогда $\sigma(B_2) \in S[1, 1, 0]$. С другой стороны, согласно свойствам символов операторов B_1 и D при $(x, \xi) \in Z_n(N)$, $t \in J$ имеем $B_2(t, x, \xi) \equiv 0$, а при $(x, \xi) \in Z_e(N)$ с некоторой постоянной C_1

$$\|B_2(t, x, \xi)\| \leq C_1 |\cdot(x)| < \xi >. \quad (17)$$

По предположению (5) с некоторой постоянной $d_1 > 0$ имеем

$$|D^+(t, x, \xi)| \geq d_1 |\cdot(x)| < \xi > \text{ при } (x, \xi) \in Z_e(N), t \in J. \quad (18)$$

Обычным образом с помощью символического исчисления ПДО (см., например, доказательство леммы 6.2, [5]) показывается, что существуют постоянная $C_2 > 0$ и ПДО T такие, что

$$\begin{aligned}
&C_2^2 D^+(t, x, D_x) D^+(t, x, D_x) - B_2^*(t, x, D_x) B_2(t, x, D_x) - \\
&\quad - T^*(t, x, D_x) T(t, x, D_x) \in C^\infty(J; \Psi^{-\infty}(R^n)). \quad (19)
\end{aligned}$$

Повтому с $R \in C^\infty(J; \Psi^{-\infty}(R^n))$ имеем $\|B_2 V_0\|^2 \leq C_2^2 \|D^+ V_0\|^2 + \|R V_0\|^2$.

Итак

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T (B_2 V_0, V_0)_0 dt \right| \leq C_2 \int_0^T \|D^+ V_0\| \|V_0\| dt + C_3 \int_0^T \|V_0\|^2 dt < \\
&< C_2 \int_0^T \|D^+ V_0 + B^+ V_0 + \rho(T-t) V_0\| \|V_0\| dt + C_2 \int_0^T \|B^+ V_0\| \|V_0\| dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + (\rho T + C_3) \int_0^T \|V_0\|^p dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \|D^+ V_0 + B^+ V_0 + \rho(T-t) V_0\|^2 dt + \\
 + \left(T + \frac{C_4}{\rho}\right) \int_0^T \|V_0\|^p dt
 \end{aligned} \tag{20}$$

и для завершения доказательства (14) достаточно взять T и C_4/ρ достаточно малыми. Итак, (13) доказано.

4. Пусть Q — матричный ПДО, являющийся решением следующей задачи

$$\begin{aligned}
 Q_t + (iD + iB)Q - Q(iD + iB_1) + i(B - B_1) \in C_t^r(J; \Psi^{-\infty}), \tag{21} \\
 Q|_{t=0} = 0. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Докажем, что такой Q существует. Для этого заметим, в первую очередь, что $Q(t, x, \xi) = 0$ при $(x, \xi) \in Z_\varepsilon(2N)$. Поэтому, если мы перепишем (21), (22) в виде

$$\begin{aligned}
 Q_t + R(t)Q + QR_1(t) + R_0(t) \in C_t^r(\Psi^{-\infty}), \tag{23} \\
 Q|_{t=0} = 0, \tag{24}
 \end{aligned}$$

то $R(t), R_1(t), R_0(t)$ удовлетворяют условиям следующего предложения.

Предложение 1. Пусть $R(t), R_1(t), R_0(t)$ — матричные ПДО с символами $r(t, x, \xi), r_1(t, x, \xi), r_0(t, x, \xi)$ соответственно. Предположим, что с некоторыми постоянными p, K, m, ρ, δ ($0 < \delta < \rho \leq 1$), для любых α, β с некоторыми положительными постоянными $C_{\alpha, \beta}, C_0$, при всех $t \in [0, T], x \in R^n, \xi \in R^n, \langle \xi \rangle \geq M$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
 |D_\xi^\alpha D_x^\beta r(t, x, \xi)| + |D_\xi^\alpha D_x^\beta r_1(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} g(t, \xi), \tag{25} \\
 |D_\xi^\alpha D_x^\beta r_0(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{\rho - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} g(t, \xi), \tag{26}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^T g(\tau, \xi) d\tau \leq K \ln \langle \xi \rangle, \quad g(t, \xi) \leq C_0 \langle \xi \rangle^m. \tag{27}$$

Тогда существует решение $Q(t)$ задачи (23), (24) с символом $q(t, x, \xi)$, удовлетворяющим при всех $t \in [0, T], x \in R^n, \xi \in R^n, \langle \xi \rangle \geq M$, неравенствам

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta q(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{K + \rho - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} (\ln \langle \xi \rangle)^{|\alpha| + \beta|} \tag{28}$$

и, следовательно, принадлежащим классу $C_t([0, T]; \bigcap_{0 < \alpha < 1} S_{\rho, \delta}^{K + \rho + \alpha}(C_t^1([0, T]; \bigcap_{0 < \alpha < 1} S_{\rho, \delta}^{K + \rho + m + \alpha}))$. Это решение единственно по mod $C_t^1([0, T], S^{-\infty})$.

Покажем, далее, что у операторов $I + Q(t)$ существует параметрикс. Действительно, таковым, как следует из предложения 1, будет оператор $I + Q^*(t)$, где $Q^*(t)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned}
 Q_t^* + (iD + iB_1)Q^* - Q^*(iD + iB) + i(B_1 - B) \in C_t^r(\Psi^{-\infty}), \tag{29} \\
 Q^*|_{t=0} = 0. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Перейдем к завершению доказательства теоремы. Пусть $Q^*(t)$ — решение (29), (30). Рассмотрим функцию $V(t) = \chi(t)(I + Q^*(t))W(t)$, где $W = MHU$. Тогда

$$GV = \chi_t(I + Q^*(t))W(t) + \chi(t)R_2 U, \quad (31)$$

где $R_2 \in C_1^-(J; \Psi^{-\infty})$. Применим к $V(t)$ неравенство (13)

$$\begin{aligned} \rho \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|V(t)\|_0^2 dt &\leq C \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|\chi_t(t)(I + Q^*(t))W(t)\|_0^2 dt + \\ &+ C \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|\chi(t)R_2 U\|_0^2 dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, что в соответствии с выбором V с некоторой постоянной $s > 0$ при достаточно малом T , имеем

$$\chi(t)\|U(t)\|_{-s} \leq C\|V(t)\|_0. \quad (33)$$

Так что

$$\chi(t)\|R_2(t)U(t)\|_0 \leq C\|V(t)\|_0. \quad (34)$$

Из (34) при достаточно больших ρ получаем

$$\rho \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|V(t)\|_0^2 dt \leq C \int_0^T e^{\rho(T-t)^2} \|\chi_t(t)(I + Q^*(t))W(t)\|_0^2 dt, \quad (35)$$

откуда

$$e^{\rho T^{1/4}} \int_0^{T/2} \|V(t)\|_0^2 dt \leq C e^{\rho T^{1/25}} \int_{T/5}^T \|(I + Q^*(t))W(t)\|_0^2 dt. \quad (36)$$

Из последнего неравенства, устремляя $\rho \rightarrow \infty$ получаем $V(t) = 0$ в $L_2(R^n)$ при $0 \leq t \leq T/2$, так что $U(t) = 0$ в $H_{-s}(R^n)$ при тех же t .

Межвузовский научный центр
по прикладным проблемам
математики

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 11. X. 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Н. Ягджян. Fundamental solution for the Cauchy problem for the hyperbolic equation with multiple characteristics, Acta. Math. Hung. 1990. v. 52.
2. Н. Урья. Uniqueness for the Characteristic Cauchy problem and the Applications Tokyo journal of Mathematics, v. 5, № 1, 1982. 117—137.
3. S. Nakane. Uniqueness and Non-uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate Type II, Proc. Jap. Acad., 59, ser. A, 1983. 318—320.
4. Ф. Трев. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, т. 1, М., «Мир», 1984.
5. М. Тейлор. Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1985.