УДК 517.95

Г. А. КАРАПЕТЯН

РЕГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

В работе [1] М. С. Аграновича и М. И. Вишика достаточно подробно изучены эллиптические задачи с параметром и на этой основе параболические задачи общего вида. В дальнейшем в работе [2] (см. также [3]) изучены полуэллиптические уравнения с параметром в R^n и R_+^n . В настоящей заметке доказываются теоремы существования и единственности, а также теоремы о гладкости решений для одного общего класса дифференциальных уравнений, зависящих от комплексного параметра.

§ 1. Регулярные уравнения с параметром в R^n

Обозначим через R^m m -мерное евклидово пространство, N_+^m — множество мультииндексов, т. е. m -мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами. Если $\xi \in R^m$, $\alpha \in N_+^m$, то положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_m^{\alpha_m}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_m^{\alpha_m}$, где $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, m$. Пусть $A = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\}$ набор мультииндексов.

Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона набора A назовем наименьший выпуклый многогранник $N = N(A)$, содержащий все точки набора A .

Многогранник $N \subset R^m$ с вершинами из N_+^m назовем вполне правильным, если а) N является полным многогранником, т. е. имеет вершину в начале координат R^m и отличные от начала координат вершины на каждой координатной оси R^m ; б) координаты внешних нормалей всех $(m-1)$ -мерных некоординатных граней N положительны.

Обозначим через $N^{(0)}$ внутренние точки многогранника N из N_+^m и положим $\partial' N = (N \setminus N^{(0)}) \cap N_+^m$.

Пусть $n \geq 2$ целое число. Рассмотрим в R^n линейный дифференциальный оператор $P(\lambda, D)$ с постоянными действительными коэффициентами, зависящими от комплексного параметра λ

$$P(\lambda, D) = \sum a_{\alpha^s} \lambda^{\alpha^s} D^\alpha. \quad (1.1)$$

Здесь сумма распространяется по некоторому конечному набору (P) $(n+1)$ -мерных мультииндексов $(P) = \{(a_0, \alpha) \in N_+^{n+1}, a_{\alpha^s} \neq 0\}$, $\lambda \in Q = \{\mu \in \mathbb{C}, \sigma_1 \leq \arg \mu \leq \sigma_2\}$, где σ_1, σ_2 заданные числа: $-\infty \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq -\infty$.

С каждым оператором $P(\lambda, D)$ вида (1.1) свяжем два многогранника: $(n+1)$ -мерный характеристический многогранник $M = M(P) \subset R^{n+1}$ набора (P) и n -мерный характеристический многогранник

$N = N(P) \subset R^n$ набора мультииндексов $\{\alpha\}$ таких, что $(\sigma_0, \alpha) \in (P)$ для хотя бы одного α_0 .

Предположим, что оператор $P(\lambda, D)$, определенный формулой (1.1), является регулярным в следующем смысле: если в символе оператора $P(\lambda, D)$ заменить λ на $\xi^0 \in R^1$, то существует постоянная $\kappa > 0$ такая, что для всех $\eta = (\xi_0, \xi) \in R^{n-1}$.

$$|P(\eta)| \geq \kappa \rho_M(\eta), \quad (1.2)$$

где

$$\rho_M(\eta) = \sum_{i=1}^N |\eta_i^{e^i}|,$$

а e^i ($i = 1, \dots, N$) вершины х. м. $M(P)$.

Из результатов работы [4] следует, что вершины многогранника M имеют лишь четные координаты. Обозначим через M_i проекцию многогранника M на гиперплоскость $\alpha_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$), тогда очевидно, $M_0 = N$.

Пусть $N \subset R^n$ — произвольный в. п. многогранник и $t > 0$. Положим (см. [5]), $N^t = \{t\alpha, \alpha \in N\}$. Очевидно, что для произвольных натуральных чисел t_1 и t_2 и для любого мультииндекса $\beta \in N^{t_1+t_2}$ существуют мультииндексы $\beta^j \in N^{t_j}$ ($j = 1, 2$) такие, что $\beta = \beta^1 + \beta^2$. Наконец, обозначим через $H(M, t) \equiv H(M, t, R^{n+1})$ множество измеримых функций $|u|$ с конечной нормой

$$\|u, \lambda\|_{M^t}^2 = \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in \partial^t M^t} |\lambda|^{2\alpha_0} \|D^\alpha u\|_{L_2(R^n)}^2. \quad (1.3)$$

Лемма 1.1. Пусть $l \geq 1$ — натуральное число и $\lambda_0 > 0$. Оператор $P(\lambda, D)$ действует ограниченным образом из $H(M, l)$ в $H(M, l-1)$. При этом существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $\lambda \in Q$: $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ и для всех $u \in H(M, l)$ справедливо неравенство

$$\|P(\lambda, D)u, \lambda\|_{M^{l-1}} \leq C \|u, \lambda\|_{M^l}. \quad (1.4)$$

Доказательство. Из равенства Парсеваля и эквивалентности ($t \in N$)

$$\rho_M^t(\lambda, \xi) = \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in \partial^t M^t} |\lambda|^{\alpha_0} |\xi|^\alpha \sim \left(\sum_{(\alpha_0, \alpha) \in \partial^t M^t} |\lambda|^{\alpha_0} |\xi|^\alpha \right)^{1/2} = \rho_M^t(\lambda, \xi)$$

следует, что норма (1.3) эквивалентна следующей норме:

$$\|u, \lambda\|_{M^t}^2 \sim \|\rho_M^t(\lambda, \xi) u\|_{L_2(R^n)}^2.$$

Отсюда, из (1.1) и из очевидных соображений имеем

$$\begin{aligned} \|P(\lambda, D)u, \lambda\|_{M^{l-1}}^2 &= \|\rho_M^{l-1}(\lambda, \xi) P(\lambda, D)u\|_{L_2(R^n)}^2 \leq \\ &\leq C \|\rho_M^l(\lambda, \xi) u\|_{L_2(R^n)}^2 \leq C \|u, \lambda\|_{M^l}^2. \end{aligned}$$

Лемма 1.1 доказана.

Теорема 1.1. Пусть оператор $P(\lambda, D)$ удовлетворяет неравенству (1.2), l — натуральное число, $\lambda_0 \neq 0$ и $f \in H(M, l-1)$. Тогда при $0 \neq \lambda \in Q$ существует одно и только одно решение $u \in H(M, l)$ уравнения $P(\lambda, D)u = f$, при этом существует постоянная $C > 0$ такая, что при $|\lambda| \geq |\lambda_0|$

$$\|u, \lambda\|_{Ml} \leq C \|f, \lambda\|_{Ml-1}. \quad (1.5)$$

Доказательство. Очевидно, единственность решения следует из неравенства (1.5). Допуская, что функция $u \in H(M, l)$ является решением уравнения $P(\lambda, D)u = f$, докажем неравенство (1.5). Применяя преобразование Фурье по x , получим

$$P(\lambda, \xi) \bar{u}(\xi) = \bar{f}(\xi).$$

Если $0 \neq \lambda \in Q$, то отсюда и из регулярности оператора $P(\lambda, D)$ имеем

$$\bar{u}(\xi) = P^{-1}(\lambda, \xi) \bar{f}(\xi).$$

Применив неравенство (1.2) в последнем равенстве, получим

$$|\bar{u}(\xi)| \leq C (\rho_M(\lambda, \xi))^{-1} |\bar{f}(\xi)|, \quad \forall \xi \in R^n.$$

Умножая обе части полученного неравенства на $\rho_M^{2l}(\lambda, \xi)$ и интегрируя его, получим

$$\begin{aligned} \|u, \lambda\|_{Ml}^2 &= \int_{R^n} \rho_M^{2l}(\lambda, \xi) |\bar{u}(\lambda, \xi)|^2 d\xi \leq \\ &\leq C \int_{R^n} \rho_M^{2l(l-1)}(\lambda, \xi) |\bar{f}(\lambda, \xi)|^2 d\xi = C \|f, \lambda\|_{Ml-1}^2 < \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает неравенство (1.5).

Докажем теперь существование решения $u \in H(M, l)$. Пусть $f \in H(M, l-1)$. Тогда, так как $\lambda \neq 0$, то из вышесказанного следует, что функция $u(x) = F^{-1}(P^{-1}(\lambda, \xi) F f)$ принадлежит классу $H(M, l)$ и является решением $P(\lambda, D)u = f$.

§ 2. Регулярные уравнения в R_+^n , зависящие от параметра

Пусть K — вполне правильный характеристический многогранник R_+^n . В $R_+^n = \{x \in R^n; x_n > 0\}$ рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, зависящий от компактного параметра $\lambda \in Q$

$$P(\lambda, D) = D_n^{2m} + \sum_{(\alpha, \alpha') \in K} a_{\alpha, \alpha'} \lambda^{\alpha} D^{\alpha'}, \quad (2.1)$$

где

$$\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in N_+^{n-1}.$$

Обозначим через M многогранник, соответствующий оператору $P(\lambda, D)$. Пусть оператор (2.1) регулярен в смысле § 1, т. е. удовлетворяет неравенству (1.2). Из неравенства (1.2) следует, что при

$n > 1$ для любых фиксированных $\lambda \in R$, $\xi \in R^{n-1}$, $|\lambda| + |\xi| \neq 0$ многочлен (по τ) $P(\lambda, \xi, \tau)$ не имеет действительных корней, при этом число корней с положительными (отрацательными) мнимыми частями $\tau^+(\lambda, \xi')$ ($\tau^-(\lambda, \xi')$) равно m . Положим

$$P^\pm(\lambda, \xi', \tau) = \prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^\pm(\lambda, \xi')) = \sum_{\rho=0}^m a_\rho^\pm(\lambda, \xi') \tau^{m-\rho},$$

$$P_j^+(\lambda, \xi', \tau) = \sum_{\rho=0}^j a_\rho^+(\lambda, \xi') \tau^{j-\rho}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Каждому оператору (2.1) сопоставим m граничных операторов. Пусть $t_j \in R^1$, $j = 1, \dots, m$, положим

$$B_j(\lambda, D) = D_n^{r_j} + \sum_{(\alpha, \alpha' \in K^j)} b_{\alpha, \alpha'}^{(j)} \lambda^{\alpha, \alpha'} D^{\alpha, \alpha'}$$

где $r_j = \begin{cases} 2mt_j, & \text{если оно целое число} \\ 0, & \text{если } 2mt_j \text{ нецелое число.} \end{cases}$

Рассмотрим следующую граничную задачу

$$P(\lambda, D) u(\lambda, x) = f(\lambda, x), \quad x_n > 0, \quad (2.2)$$

$$B_j(\lambda, D) u(\lambda, x)|_{x_n=0} = \varphi_j(\lambda, x'), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где $x' \in R^{n-1}$, f, φ_j ($j = 1, \dots, m$) — заданные функции, а принадлежность их некоторым классам объясняется ниже.

Для разрешимости задачи (2.2), (2.3) на операторы $P(\lambda, D)$, $B_j(\lambda, D)$ ($j = 1, \dots, m$) наложим условия типа условий Шапиро—Лопатинского (Ш—Л), именно будем считать, что для любых фиксированных $\lambda, \xi', |\lambda| + |\xi'| \neq 0$ полиномы (по τ) $B_1(\lambda, \xi', \tau), \dots, B_m(\lambda, \xi', \tau)$ линейно независимы по модулю полинома $P^+(\lambda, \xi', \tau)$, т. е. если обозначить

$$B_j(\lambda, \xi', \tau) \equiv \sum_{k=1}^m b_{jk}(\xi', \lambda) \tau^{k-1} \equiv B_j(\lambda, \xi', \tau) \pmod{P^+},$$

то для любых $\lambda, \xi', |\lambda| + |\xi'| \neq 0$

$$d(\lambda, \xi') = \det \|b_{jk}(\lambda, \xi')\| \neq 0.$$

Лемма 2.1 (см. [6]). *Существуют многочлены по τ $N_k(\lambda, \xi', \tau)$ ($k = 1, \dots, m$) такие, что*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_k(\lambda, \xi', \tau) B_j(\lambda, \xi', \tau)}{P^+(\lambda, \xi', \tau)} d\tau = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Пусть t — произвольное натуральное число. Будем говорить, что $f \in H(M, t, R_+^n)$, если конечна следующая норма:

$$\|f\|_{M,t}^2 = \sum_{(\alpha, \alpha' \in M^t)} |f^{\alpha, \alpha'}|^2 \|D^{\alpha, \alpha'}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Для любого вещественного s обозначим через $H(K, s, R^{n-1})$ множество обобщенных функций $u \in S'(K^{n-1})$, преобразование Фурье каждой из которых является измеримой функцией с конечной нормой

$$\|u, u\|_{(K, \xi)}^2 = \int_{R^{n-1}} |\bar{u}(\lambda, \xi')|^2 \rho_K^2(\lambda, \xi') d\xi',$$

А тогда

$$\rho_K^2(\lambda, \xi') = \sum_{(\sigma, \alpha) \in K} |\lambda_j^{2\sigma} \xi^{\alpha}|^2.$$

Лемма 2.2. Для любого j ; $0 \leq j \leq 2m-1$ отображение $u \rightarrow D_n^j(u_0, (x', x_n), u) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$ ограниченным образом распространяется по непрерывности из $H(M, 1, R_+^n)$ в $H(K, 1 - \frac{1}{2m} - \frac{1}{4m}, R^{n-1})$,

где через $C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$ обозначено множество бесконечно дифференцируемых в $\bar{R}_+^n$ функций, равных нулю вне некоторого компакта из $\bar{R}_+^n$.

Доказательство получается из доказательства леммы 2.2 работы [7] для случая $\delta=0$, $\rho_N(\xi) = \rho_M(\lambda, \xi')$.

С задачей (2.2), (2.3) свяжем оператор

$$Au = \{P(\lambda, D)u, B_1(\lambda, D)u|_{x_n=t}, \dots, B_m(\lambda, D)u|_{x_n=0}\}.$$

Тогда справедлива следующая

Лемма 2.3. Пусть $l \geq l_0 = \max(1, t_j + \frac{1}{4m})$ целое число. Тогда оператор A действует ограниченным образом из $H(M, l, R_+^n)$ в $H(M, l-1, R_+^n) \times \prod_{j=1}^m H(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})$ и имеет место неравенство

$$\|f, \mathcal{A}u\|_{H(M, l-1, R_+^n)} + \sum_{j=1}^m \|f, \mathcal{B}_j u\|_{H(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})} \leq C \|f, u\|_{H(M, l, R_+^n)}, \quad (2.4)$$

где C — не зависящее от u, f, ν_j, λ постоянное число.

Доказательство. Сперва покажем, что

$$A: H(M, l, R_+^n) \rightarrow H(M, l-1, R_+^n) \times \prod_{j=1}^m H(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}).$$

Если $u \in H(M, l, R_+^n)$, то продолжим u по Хестенсу на все пространство R^n так, чтобы продолженная функция $u_0 \in H(M, l, R^n)$ и

$$\|f, u_0\|_{H(M, l, R^n)} \leq C \|f, u\|_{H(M, l, R_+^n)}.$$

Тогда из результатов § 1 имеем

$$\begin{aligned} \|f, P(\lambda, D)u_0\|_{H(M, l-1, R^n)} &\leq C \|f, u_0\|_{H(M, l-1, R^n)} \leq \\ &\leq C \|f, u_0\|_{H(M, l, R^n)} \leq C \|f, u\|_{H(M, l, R_+^n)}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\|f, P(\lambda, D)u\|_{H(M, l-1, R_+^n)} \leq C \|f, u\|_{H(M, l, R_+^n)}. \quad (2.5)$$

Покажем, что для любого $t_j \in R^+$

$$B_j(\lambda, D)u|_{x_n=0} \in H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right),$$

если $u \in H(M, l, R_+^n)$.

Если $u \in H(M, l, R_+^n)$, то из леммы 2.3 следует, что $D_n^{2l} u|_{x_n=0} \in H\left(K, l - \frac{\alpha_n}{2m} - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \| \cdot, B_j(\lambda, D)u|_{x_n=0} \|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} \\ & \leq C \left(\| \cdot, D_n^{2l} u|_{x_n=0} \|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} \right) + \\ & + \sum_{(\alpha_n, \alpha) \in K} |\lambda|^{\alpha_n} \| \cdot, D^{\alpha} u|_{x_n=0} \|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)}. \end{aligned}$$

Оценим слагаемые по отдельности. Из леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} & \| \cdot, D_n^{2l} u|_{x_n=0} \|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} = \\ & \int_{R^{n-1}} |D_n^{2l} \bar{u}(\lambda, \xi', 0)|_{\rho_K}^{2\left(l-t_j - \frac{1}{4m}\right)}(\lambda, \xi') d\xi' \leq \infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для второго слагаемого получим

$$\begin{aligned} & \sum_{(\alpha_n, \alpha) \in K} |\lambda|^{\alpha_n} \| \cdot, D^{\alpha} u|_{x_n=0} \|_{H\left(K, l-t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)} = \\ & = \sum_{(\alpha_n, \alpha) \in K} |\lambda|^{\alpha_n} \left(\int_{R^{n-1}} \xi'^{2\alpha'} |\bar{u}(\lambda, \xi', 0)|_{\rho_K}^{2\left(l-t_j - \frac{1}{4m}\right)}(\lambda, \xi') d\xi' \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \sum_{(\alpha_n, \alpha) \in K} \left(\int_{R^{n-1}} \rho_K^{2\left(l - \frac{1}{4m}\right)}(\lambda, \xi') |\bar{u}(\lambda, \xi', 0)|^2 \frac{(|\lambda|^{2\alpha_n} \xi'^{2\alpha'})^{l_j}}{\rho_K^{2l_j}(\lambda, \xi')} d\xi' \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left(\int_{R^{n-1}} |\bar{u}(\lambda, \xi', 0)|_{\rho_K}^{2\left(l - \frac{1}{4m}\right)}(\lambda, \xi') d\xi' \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Докажем неравенство (2.4). Из неравенств (2.5)–(2.7) следует, что лемма 2.3 будет доказана, если покажем, что при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \rho_K^{2\left(l-t - \frac{1}{4m}\right)}(\lambda, \xi') |D^{2lm} \bar{u}(\lambda, \xi', 0)|^2 \leq C \left(\int_0^{\bar{1}} \rho_K^{2l}(\lambda, \xi') |\bar{u}(\lambda, \xi', x_n)|^2 dx_n + \right. \\ & \left. + \int_0^{\bar{1}} |D^{2lm} \bar{u}(\lambda, \xi', x_n)|^2 dx_n \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Неравенство (2.8) при $\lambda = 1$ доказано в работе [7], лемма 2.2. Для произвольного λ доказывается аналогичными соображениями. Лемма 2.3 доказана.

Наша дальнейшая цель доказать неравенство, обратное неравенству (2.4). Отсюда в частности будет следовать существование и единственность решения задачи (2.2), (2.3).

Для этого сперва решим задачу (2.2), (2.3) с $f \equiv 0$,

где

$$\varphi_j \in H\left(\mathbb{K}, l - t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right), j = 1, \dots, m.$$

После преобразования Фурье по переменной x' , задача (2.2), (2.3) (при $f \equiv 0$) примет вид

$$P(\lambda, \xi', D_n) \bar{u}(\lambda, \xi', x_n) = 0, x_n > 0, \quad (2.9)$$

$$B_j(\lambda, \xi', D_n) \bar{u}(\lambda, \xi', x_n)|_{x_n=0} = \bar{\varphi}_j, j = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

Вместе с задачей (2.9), (2.10) рассмотрим следующие задачи:

$$P\left(\lambda, \xi', \frac{1}{i} \frac{d}{dx_n}\right) \tilde{u}_k(\lambda, \xi', x_n) = 0, x_n > 0, \quad (2.11)_k$$

$$B_j\left(\lambda, \xi', \frac{1}{i} \frac{d}{dx_n}\right) \tilde{u}_k(\lambda, \xi', x_n)|_{x_n=0} = \delta_{j,k}, j, k = 1, \dots, m. \quad (2.12)_k$$

Из леммы 2.1 следует, что ограниченными решениями задач (2.11)_k, (2.12)_k ($k = 1, \dots, m$) являются функции

$$\tilde{u}_k(\lambda, \xi', x_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{e^{i\tau x_n} N_k(\lambda, \xi', \tau)}{P^+(\lambda, \xi', \tau)} d\tau, k = 1, \dots, m, \quad (2.13)_k$$

где γ^+ — контур в верхней полуплоскости, охватывающий все корни многочлена $P^+(\lambda, \xi', \tau)$.

Тогда очевидно решение задачи (2.9), (2.10) задается формулой

$$\tilde{u}(\lambda, \xi', x_n) = \sum_{j=1}^m \tilde{\varphi}_j \tilde{u}_j(\lambda, \xi', x_n), \quad (2.14)$$

т. е. решения $\tilde{u}_1(\lambda, \xi', x_n), \dots, \tilde{u}_m(\lambda, \xi', x_n)$ образуют базис в множестве ограниченных решений задачи (2.9), (2.10).

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия (1.2) и (Ш-Л). Тогда при ненулевых $\lambda \in Q$ и для любых функций $f \in H(M, l-1, R_+^n)$, $\varphi_j \in H\left(\mathbb{K}, l - t_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1}\right)$, $j = 1, \dots, m$, существует одно и только одно решение и задачи (2.2), (2.3), принадлежащее классу $H(M, l, R_+^n)$. При этом для $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ ($\lambda_0 \neq 0$ произвольное число) существует постоянная $C > 0$, не зависящая от $\lambda, u, f, \varphi_j, j = 1, \dots, m$, для которой имеет место неравенство

$$\|\lambda, u\|_{H(M, l, R_+^n)} \leq C \left(\|\lambda, \Pi_{H(M, l-1, R_+^n)}\| + \sum_{j=1}^m \|\lambda, \varphi_j\|_{H(k, l-j, \frac{1}{4m})} R^{n-1} \right). \quad (2.15)$$

Доказательство. Сперва покажем, что общий случай сводится к случаю $f \equiv 0$.

Продолжим функции u, f на R^n по Хестенсу. Тогда решение уравнения:

$$P(\lambda, D) u_0 = f_0$$

(где u_0, f_0 продолжения функций u, f в R^n по результатам § 1 будет:

$$u_0 = F^{-1} P^{-1}(\lambda, \xi) F f_0, \lambda \in Q, \lambda \neq 0.$$

Так как $u_0 \in H(M, l, R^n)$, то его сужение на R_+^n : $u \in H(M, l, R_+^n)$ и: при $|\lambda| \geq \rho$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\lambda, u\|_{H(M, l, R_+^n)} &\leq \|\lambda, u_0\|_{H(M, l, R^n)} \leq \\ &\leq C \|\lambda, f_0\|_{H(M, l-1, R^n)} \leq C \|\lambda, \Pi_{H(M, l-1, R_+^n)}\|. \end{aligned}$$

Положим $u = u_0 + u_1$, где u_1 решение задачи

$$P(\lambda, D) u_1 = 0, x_n > 0,$$

$$B_j(\lambda, D) u_1|_{x_n=0} = \varphi_j - B_j(\lambda, D) u_0|_{x_n=0}.$$

Пусть $\varphi_{0j} \equiv B_j(\lambda, D) u_0|_{x_n=0}$.

Если допустим, что уже доказана оценка

$$\|\lambda, u_1\|_{H(M, l, R_+^n)} \leq C \sum_{j=1}^m \|\lambda, \varphi_j - \varphi_{0j}\|_{H(k, l-j, \frac{1}{4m})} R^{n-1},$$

то отсюда для решения u имеем

$$\begin{aligned} \|\lambda, u\|_{H(M, l, R_+^n)} &\leq \|\lambda, u_0\|_{H(M, l, R_+^n)} + \|\lambda, u_1\|_{H(M, l, R_+^n)} \leq \\ &\leq C \|\lambda, \Pi_{H(M, l-1, R_+^n)}\| + C \sum_{j=1}^m \|\lambda, \varphi_j\|_{H(k, l-j, \frac{1}{4m})} R^{n-1} + \\ &+ C \sum_{j=1}^m \|\lambda, \varphi_{0j}\|_{H(k, l-j, \frac{1}{4m})} R^{n-1}. \end{aligned}$$

Но так как по лемме 2.3

$$\|\lambda, \varphi_{0j}\|_{H(k, l-j, \frac{1}{4m})} R^{n-1} \leq \|\lambda, u_0\|_{H(M, l, R^n)} \leq C \|\lambda, \Pi_{H(M, l-1, R_+^n)}\|$$

то теорема 2.1 доказана. Следовательно общий случай сводится к случаю $f \equiv 0$.

Так как решение задачи (2.9), (2.10) задается формулой (2.14), то решение задачи (2.2), (2.3) будет иметь вид (при $f \equiv 0$)

$$u(\lambda, x) = F_{\xi'}^{-1} \left| \sum_{j=1}^m \tilde{\varphi}_j(\lambda, \xi') \tilde{u}_j(\lambda, \xi', x_n) \right|. \quad (2.16)$$

Оценим слагаемые в равенстве (2.16) по отдельности. Так как

$$|\tilde{\varphi}_j^+(\lambda, \xi')| \sim \rho_k^{1/2 m}(\lambda, \xi'), j = 1, \dots, m, \quad (2.17)$$

от то из представления (2.13), следует, что для любого $k: k=1, \dots, 2m$

$$|D_n^k \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)| \leq C(\rho_K(\lambda, \xi'))^{\frac{k}{2m} - l_j} \times \exp \left\{ -C_0 t (\rho_K(\lambda, \xi'))^{\left(\frac{1}{2m}\right)} \right\}.$$

Отсюда, интегрируя по t , получим

$$\left(\int_0^{\infty} |D_n^k \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C \rho_K^{\frac{k}{2m} - l_j}(\lambda, \xi') \left(\int_0^{\infty} \exp \left\{ -C_0 t \rho_K^{\frac{1}{2m}}(\lambda, \xi') \right\} dt \right)^{1/2} \leq C(\rho_K(\lambda, \xi'))^{\frac{k}{2m} - l_j - \frac{1}{4m}}.$$

Следовательно

$$\left(\sum_{(\lambda, \xi') \in \Theta^* M^l} \lambda^{2\alpha} \xi'^{2\alpha'} \int_0^{\infty} |\tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^{\infty} |D_n^{2m} \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C(\rho_K(\lambda, \xi'))^{l_j - \frac{1}{2m}}.$$

Умножая полученное неравенство на $|F\varphi_j|^2$ и интегрируя по ξ' , получим

$$\| \lambda, F\xi'^{-1} \{ \tilde{u}_j(\lambda, \xi', t) \} \|_{H(M, l, R_+^n)} \leq C \| \lambda, \varphi_j \|_{H(K, l - l_j - \frac{1}{4m}, R^{n-1})},$$

что и доказывает неравенство (2.15).

Для доказательства существования решения задачи (2.2), (2.3) надо положить

$$u = R_0 f + \sum_{j=1}^m R_j (\varphi_j - B_j(\lambda, D) R_0 f|_{x_n=0}),$$

где $R_0 f = F^{-1} P^{-1}(\lambda, \xi) F f$, $R_j \varphi = F^{-1} \{ F \varphi_j \tilde{u}_j \}$.

Легко доказать, что $u \in H(M, l, R_+^n)$. Теорема 2.1 доказана.

Ереванский государственный университет

Поступила 1. X. 1987

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ. Պարամետրից կախված սեգուլյար հավասարումներ (ամփոփում)

Աշխատանքում պարամետրից կախված սեգուլյար հավասարումների համար ապացուցվում են գոյություն և միակություն, ինչպես նաև սղորկության վերաբերյալ թեորեմներ R^n -ում և R_+^n -ում կիսատարածության դեպքում ուսումնասիրվում է ընդհանուր եզրային պայմաններով խնդիր:

G. A. KARAPETIAN. Regular equations with a parameter (summary)

Theorems of existence and uniqueness of solutions as well as on their smoothness are proved for a class of hyperelliptical equations in R^n and R_+^n . For R_+^n the notion of a regular equation with general initial conditions is introduced which provides the necessary framework for the study.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Агранович, М. И. Вишик. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 1964, XIX, № 3 (117), 1964, 33—157.
2. С. В. Успенский, Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкин. Теоремы вложения и их приложения к дифференциальным уравнениям, М., «Наука», 1983.
3. F. Ornela. Problem quazi-ellitici nel semispazio dipendenti da un parametro, Rend Accad. naz. sci fis e mat. Soc. naz sci cett e artr., Napoli, 50, № 2, 1983, 301—318.
4. В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Тр. МИАН СССР, т. 91, 1967, 58—81.
5. E. Pohkopen. Ein hypoelliptisches Dirichlet problem, Comm. Phys. Mat., 48, № 3, 1978, 131—143.
6. С. Азмон, А. Дузлис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
7. Г. А. Карапетян. Об одном классе вырождающихся регулярных уравнений в полупространстве, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XXI, № 5, 1986, 471—487.