

УДК 517.547

Л. А. ГАЛСТЯН, В. К. ДУБОВОЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЫ ШУРА

Введение

1°. При применении методов теории аналитических J -растягивающих матриц-функций (J -теории) [1, 2] в решении различных интерполяционных задач типа проблемы моментов [3, 4] в качестве центральных объектов выступают те или иные элементарные J -растягивающие матрицы-функции. Они же появляются (в несколько иной форме) в схеме, предложенной в [5] для решения других, родственных задач.

Связь этих элементарных матриц-функций с интерполяционными проблемами настолько тесна, что всякий раз удается решить в известном смысле обратную задачу: задачу о восстановлении исходных данных интерполяционной проблемы по заданному конкретному элементарному множителю. В таких случаях принято говорить, что проблема адекватна заданному соответствующего J -элементарного множителя.

В работах [6—10] авторов настоящей статьи методами J -теории решается интерполяционная проблема Шура в следующей постановке:

Пусть $S_{p,q}$ — класс голоморфных в круге $|\zeta| < 1$ сжимающих матриц-функций $\theta(\zeta)$ размерности $p \times q$.

Даны постоянные матрицы порядка $p \times q$: $c_0, c_1, \dots, c_n$.

Требуется: 1) найти необходимые и достаточные условия, при которых существует матрица-функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, имеющая заданный отрезок ряда Тейлора:

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + \dots;$$

2) при условии разрешимости проблемы описать ее общее решение.
 Условие

$$I - C_n C_n^* \geq 0, \tag{0.1}$$

где через C_n всюду здесь обозначается матрица первых $n+1$ тейловых коэффициентов матрицы-функции $\theta(\zeta)$:

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix},$$

является критерием разрешимости проблемы Шура. Если в (0.1) выполняется строгое неравенство, задача называется невырожденной. В противном случае — вырожденной.

Вопрос об адекватности невырожденной проблемы Шура заданию растягивающего кратного множителя полного ранга решен в [6].

Иная возникает ситуация при рассмотрении вырожденной задачи.

В работе [8] по исходным данным C_n строится элементарный кратный множитель неполного ранга

$$B(\zeta) = \begin{vmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{vmatrix}, \quad \tilde{j} = \begin{vmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix},$$

посредством которого общее решение $\theta(\zeta)$ вырожденной проблемы Шура представляется в виде дробно-линейного преобразования

$$\theta(\zeta) = [a(\zeta) \omega(\zeta) + b(\zeta)] [c(\zeta) \omega(\zeta) + d(\zeta)]^{-1} \quad (0.2)$$

произвольного параметра $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$, равного на конкретном, определяемом данными задачи, подпространстве унитарной константе.

В другой работе [7] того же автора доказывается (теорема о параметризации), что произвольный j -элементарный кратный множитель $B(\zeta)$ (не обязательно полного ранга) представляется в виде

$$B(\zeta) = I + (1 - \tilde{\varepsilon}) \begin{vmatrix} \Lambda_p(\zeta) & 0 \\ 0 & \Lambda_q(\zeta) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P \\ C^* \end{vmatrix} (P - C C^*)^{j-1} [P, C] \times \\ \times \begin{vmatrix} \Lambda_p^*(1) & 0 \\ 0 & \Lambda_q^*(1) \end{vmatrix} \tilde{j}, \quad (0.3)$$

где $\Lambda_r(\zeta) = \Lambda_{r,n}(\zeta) = [I_r, \zeta I_r, \dots, \zeta^n I_r]$, ($r = p, q$),
 P — ортопроектор*, действующий в пространстве

$$E_p^{(n)} = E_p \oplus \underbrace{E_p \oplus \dots \oplus E_p}_{n+1}$$

C — сжатие, переводящее пространство

$$E_q^{(n)} = E_q \oplus E_q \oplus \dots \oplus E_q$$

в $E_p^{(n)}$ (E_r — r -мерное линейное пространство).

При этом параметры P и C , которые по матрице-функции $B(\zeta)$ определяются однозначно, удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} 1) & V_{p,n} P = P V_{p,n}^* P, \\ 2) & C V_{q,n} = P V_{p,n} C, \\ 3) & P - C C^* > 0, \text{ rang } (P - C C^*) = \text{rang } P, \end{aligned} \quad (0.4)$$

в которых

$$V = V_{r,n} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ I_r & & & \\ & & & \\ & & & I_r & 0 \end{bmatrix} \quad (r = p, q).$$

* Мы часто переходим от матричной терминологии к операторной, имея в виду стандартный ортонормированный базис.

Анализ, проведенный в [8—10], показывает с одной стороны, что при ортогонализации по исходным данным S_n матриц P и C существует определенный произвол. С другой стороны, произвольно заданному кратному множителю неполного ранга либо не отвечает никакая проблема Шура, либо она восстанавливается не однозначно.

Таким образом, становится очевидным, что сама проблема Шура не является задачей, структурно связанной с j -элементарным кратным множителем. Тем самым возникает необходимость в составлении новой интерполяционной задачи, находящейся, в упомянутом выше смысле, во взаимнооднозначном соответствии с j -растягивающим кратным множителем произвольного ранга.

Именно этой цели и посвящена настоящая статья.

2°. Мы исходим из конкретно заданного элементарного кратного множителя (0.3), не задаваясь вопросом, связан ли он с какой-либо задачей Шура, или нет.

Составляя дробно-линейное преобразование (0.2), с произвольным также параметром $\psi(\zeta) \in S_{p,q}$, после несложных, но утомительных вычислений* убеждаемся, что результатом преобразования (0.2) является матрица-функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, т.е. $\theta(\zeta) = \frac{a(\zeta)}{b(\zeta)}$, где $a(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots$, с которой удовлетворяют уравнению

$$PC_n = C.$$

Отсюда и из соображений, связанных с соотношениями (0.4), заключаем, что искомая задача, названная здесь *-касательной проблемой Шура, должна быть сформулирована так:

Заданы: 1) ортогональный проектор P , действующий в пространстве $E_p^{(n)}$, удовлетворяющий условию

$$P V_{p,n} = P V_{p,n} P; \quad (0.5)$$

2) оператор C , переводящий $E_q^{(n)}$ в $E_p^{(n)}$;

Требуется: 1) найти необходимые и достаточные условия, при которых в классе $S_{p,q}$ существует матрица-функция

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_n\zeta^n + \dots,$$

у которой первые $n+1$ тейлоровых коэффициентов удовлетворяют соотношению

$$PC_n = C; \quad (0.6)$$

2) при условиях разрешимости описать множество решений задачи.

Нетрудно заметить, что неравенство $P - CC^* \geq 0$ является необходимым условием для разрешимости *-касательной проблемы Шура.

В том случае, когда $\text{rang}(P - CC^*) = \text{rang} P$ проблему естественно называть невырожденной. В противном случае она вырождена.

Очевидно некоторое сходство нашей задачи с рассмотренной в [12] касательной проблемой Неванлинны-Пика. Она в некотором смысле явля-

* Эти вычисления подробно изложены в [10].

ется сопряженной к этой проблеме (чем и обусловлено придуманное нами название задачи). Но благодаря введенной здесь нормировке (напомним, в касательной задаче Неванлинны-Пика вместо ортопроектора P фигурирует относительно произвольная матрица A) мы имеем дело с задачей, на наш взгляд более естественной с точки зрения L -теории. Последнее мотивируется хотя бы тем, что именно *-касательная проблема Шура является задачей, адекватной заданию элементарного кратного множителя произвольного ранга.

Этот факт, являющийся в этой статье основным, устанавливается в конце § 2.

А § 1 посвящен критерию разрешимости *-касательной проблемы Шура. Примечательно, что этот критерий, одна сторона которого естественным образом получается в рамках L -теории, является прямым следствием теоремы Б. Сёкефальви-Надя и Ч. Фояша о дилатации коммутантов [13].

В § 2, помимо упомянутой уже теоремы об адекватности, выводится также традиционное в подходе В. П. Потапова основное матричное неравенство, позволяющее представить общее решение *-касательной задачи в форме (0.2).

§ 1

1°. Теорема 1. Для разрешимости *-касательной проблемы Шура необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) $P - CC^* \geq 0$,
- 2) $P V_{p,n} C = C V_{q,n}$.

(1.1)

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица-функция $\theta(\zeta)$ является решением нашей задачи. Тогда соответствующая ее матрица C_n будет сжатием, удовлетворяющим уравнению (0.6).

Отсюда сразу находим

$$1) P - CC^* = P - P C_n C_n^* P = P(I - C_n C_n^*) P \geq 0.$$

Так же легко проверяется выполнение условия 2), если иметь в виду перестановочность матрицы C_n с оператором $V(C_n V_{q,n} = V_{p,n} C_n)$ и свойство (0.5) ортопроектора P .

Достаточность. Воспользуемся теоремой 11.2.3 из [13] (стр. 81).

Выберем в ней

$$T = P V_{p,n} \Delta P, H = \Delta P \subset E_p^{(c)}, T' = V_{q,n}, H' = E_q^{(n)},$$

$$X = \hat{C} : E_q^{(n)} \rightarrow \Delta P.$$

В связи с последним обозначением заметим, что хотя в задаче матрица C задана как отображение $E_q^{(n)}$ в $E_p^{(n)}$, из условия 1) $P - CC^* \geq 0$ следует однако, что $\Delta C \subset \Delta P$, и следовательно C можно рассматривать как оператор $\hat{C}$ из H' в $H = \Delta P$.

Требуемое в используемой теореме соотношение $TX = XT'$ эквивалентно условию 2) $P V_{p, n} C = C V_{q, n}$.

Далее, чтобы придать необходимую форму утверждению упомянутой теоремы, нужно построить минимальные изометрические дилатации U_+ и U'_+ сжатий T и T' соответственно.

Обозначим

$$\widehat{E}_p = \text{пр}_{E_p^{(n)}} \Delta P (E_p^{(0)} = E_p)$$

и составим бесконечную ортогональную сумму

$$K_+ = \widehat{E}_p^{(-)} = \widehat{E}_p \oplus \widehat{E}_p \oplus \dots$$

Сформулируем теперь лемму, доказательство которой будет дано в конце этого параграфа.

Лемма. Пространство K_+ является пространством минимальной изометрической дилатации U_+ сжатия $T = P V_{p, n} | \Delta P$.

Сам оператор U_+ совпадает с односторонним сдвигом $\widehat{V}_p$, с блуждающим порождающим подпространством, совпадающим с $\widehat{E}_p$.

Проще строится минимальная изометрическая дилатация U'_+ сжатия $T' = V_{q, n}$.

Непосредственно проверяется, что

$$K'_+ = E_q^{(-)} = E_q \oplus E_q \oplus \dots$$

а U'_+ совпадает с односторонним сдвигом $V_{q, n}$ с блуждающим порождающим подпространством E_q .

Согласно указанной здесь теореме существует сжатие Y , отображающее K'_+ в K_+ , удовлетворяющее соотношению

$$U_+ Y = Y U'_+ \quad (1.2)$$

и такое, что

$$X = P_+ Y | H', \quad (1.3)$$

где P_+ — ортопроектор из K_+ на $H = \Delta P$.

Имея в виду матричную структуру односторонних сдвигов V_+ и V'_+ , соответствующую разложениям пространств K_+ и K'_+ , сжатие Y , обладающее свойством (1.2), можно отождествить с бесконечной матрицей всех тейлоровых коэффициентов некоторой сжимающей голоморфной матрицы-функции $\widehat{\theta}(\zeta)^*$ размерности $\delta_T \times q$, где δ_T — кратность одностороннего сдвига U_+ .

Далее обозначим

$$\widehat{P} = P_+ | \widehat{E}_p^{(n)} (\widehat{E}_p^{(n)} = \widehat{E}_p \oplus \widehat{E}_p \oplus \dots \oplus \widehat{E}_p)$$

* См. [6], замечание на стр. 206.

и пусть $\hat{C}_n$ — матрица первых $n + 1$ тейлоровых коэффициентов матрицы-функции $\hat{\theta}(\zeta)$. Из рассуждений, проводимых ниже, при доказательстве леммы, следует включение $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(n)}$.

Тогда из (1.3) легко находим

$$\hat{P} \hat{C}_n = \hat{C}. \quad (1.4)$$

Нам остаётся дополнить нулями матрицу $\hat{P}$ до ортопроектора P и матрицу $\hat{C}_n$ до матрицы коэффициентов C_n , соответствующей некоторой матрице-функции $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$. В итоге из (1.4) получим требуемое соотношение (0.6).

Теорема доказана.

2°. Перейдем теперь к доказательству использованной в теореме 1 леммы.

Чтобы убедиться, что оператор $U_+ = \hat{V}_{p,-}$ является минимальной изометрической дилатацией сжатия $T = P V_{p,n} | \Delta P$, достаточно проверить выполнение следующих трёх условий:

- 1) $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(-)}$;
- 2) $T^n = P_- \hat{V}_{p,-}^n | \Delta P (\Delta P_- = \Delta P)$;
- 3) $\bar{V} (\hat{V}_{p,-}^s | \Delta P) = \hat{E}_p^{(-)} = K_+$.

1) Заметим сначала, что подпространство ΔP , как это следует из свойства (0.5) ортопроектора P , инвариантно относительно оператора $V_{p,n}$. Выберем произвольный вектор $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \Delta P \subset E_p^{(n)}$.

По определению пространства $\hat{E}_p$ имеем: $f_0 \in \hat{E}_p$.

Но $V_{p,n}^k f = (f_k, \dots, f_n, 0, \dots, 0) \in \Delta P$, следовательно $f_k \in \hat{E}_n$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Отсюда следует: $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \hat{E}_p \oplus \hat{E}_p \oplus \dots \oplus E_p = \hat{E}_p^{(n)}$, так что $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(n)} \subset \hat{E}_p^{(-)}$.

Рассмотрим пространство $E_p^{(-)} = E_p \oplus E_p \oplus \dots$, и в нем односторонний сдвиг $V_{p,-}$ с блуждающим порождающим подпространством E_p . Ясно, что $\hat{E}_p^{(-)}$ является подпространством в $E_p^{(\infty)}$. Так же легко усматривается, что оно приводит оператор $V_{p,-}$ к интересующему нас одностороннему сдвигу $\hat{V}_{p,-} : \hat{V}_{p,-} = V_{p,-} | \hat{E}_p^{(-)}$.

Из этого и из того, что $\Delta P \subset \hat{E}_p^{(-)}$ следует:

$$\hat{P}_- \hat{V}_{p,-}^n | \Delta P = P_- V_{p,-}^n | \Delta P, \quad (1.5)$$

где

$$P_- = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (E_p^{(-)} = E_p^{(n)} \oplus E_p^{(n)+}, \Delta P_- = \Delta P).$$

Заметив ещё, что $P_{-} V_{p, n} | \Delta P = P V_{p, n} | \Delta P = T$, из (1.5) находим

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{-} \widehat{V}_{p, n}^s | \Delta P &= P_{-} V_{p, n} \cdot P_{-} V_{p, n} \cdot \dots \cdot P_{-} V_{p, n} | \Delta P = \\ &= P V_{p, n} \cdot P V_{p, n} \cdot \dots \cdot P V_{p, n} | \Delta P = T^n. \end{aligned}$$

Остается проверить выполнение третьего условия.

3) Так как $\Delta P \subset \widehat{E}_p^{(\infty)}$, то

$$\bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right) \subset \widehat{E}_p^{(\infty)}.$$

Чтобы доказать обратное включение, достаточно убедиться, что

$$\widehat{E}_p \subset \bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right).$$

Пусть $f_0 \in \widehat{E}_p$. Из определения пространства $\widehat{E}_p$ и из того, что $\Delta P \subset \widehat{E}_p^{(n)}$, следует существование векторов $f_1, \dots, f_n$ из $\widehat{E}_p$ таких, что $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in \Delta P$.

Но тогда, ввиду инвариантности ΔP относительно $V_{p, n}^*$, имеем

$$g = (f_1, \dots, f_n, 0) = V_{p, n}^*(f_0, f_1, \dots, f_n) \in \Delta P.$$

Представляя f_0 в виде $f_0 = (f_0, 0, \dots, 0) = (f_0, f_1, \dots, f_n) - (0, f_1, \dots, f_n) = f - \widehat{V}_{p, n} g$, $f \in \Delta P$, $g \in \Delta P$, находим

$$f_0 \in (\Delta P) \vee \left(\widehat{V}_{p, n} \Delta P \right) \subset \bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right),$$

или, что то же самое, $\widehat{E}_p \subset \bigvee_{s=0} \left(\widehat{V}_{p, n}^s \Delta P \right)$.

Лемма доказана.

§ 2

Займемся теперь вопросом об описании множества решений нашей задачи.

1°. Теорема 2. Для того, чтобы голоморфная матрица-функция $\theta(\zeta)$ порядка $p \times q$ была решением *-касательной проблемы Шура, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла неравенству

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} A & B \\ B^* & C \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} P - CC^* \cdot \frac{1}{\zeta} \left\{ P \begin{bmatrix} \theta(\zeta) & & \\ & \dots & \theta(\zeta) \end{bmatrix} - C \right\} \Lambda_{q, n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & \frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{vmatrix} \geq 0. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица-функция

$$\theta(\zeta) = c_0 + c_1 \zeta + \dots + c_n \zeta^n + \dots$$

является решением задачи.

Составим интерполяционную задачу Шура с исходными данными, совпадающими с коэффициентами $c_0, c_1, \dots, c_n$ матрицы-функции $\theta(\zeta)$.

Записав основное матричное неравенство проблемы Шура [8] и умножив его слева и справа на эрмитовую матрицу

$$T = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

с учетом (0.6) получим неравенство (2.1).

Остается заметить, что матрица-функция $\theta(\zeta)$, заведомо являющаяся решением составленной нами задачи Шура, удовлетворяет упомянутому матричному неравенству, а вместе с ним и неравенству (2.1).

Достаточность. Пусть теперь голоморфная матрица-функция $\theta(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (2.1).

Из неотрицательности блока C следует принадлежность $\theta(\zeta)$ классу $S_{p,q}$.

Далее, при стремлении ζ к нулю, блоки A и C остаются ограниченными. Отсюда следует, что для выполнения неравенства (2.1) должен быть ограниченным также блок B .

Преобразуем блок B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\zeta} \left\{ F \begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ \vdots \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix} - C \right\} \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} P \begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ \vdots \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix} \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} P \begin{bmatrix} \theta(\zeta) \\ \vdots \\ \theta(\zeta) \\ \frac{\theta(\zeta)}{\zeta^n} \end{bmatrix} - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} \cdot P \left[\frac{c_0 + \varphi_0(\zeta)}{c_n + \frac{c_{n-1}}{\zeta} + \dots + \frac{c_0}{\zeta^n} + \varphi_n(\zeta)} \right] - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} P C_n \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} C \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \\ &= \frac{1}{\zeta} (P C_n - C) \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) + \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta}. \end{aligned}$$

В последнем выражении матрица-функция

$$\Phi(\zeta) = \begin{bmatrix} \varphi_n(\zeta) \\ \vdots \\ \varphi_m(\zeta) \end{bmatrix}$$

голоморфна и удовлетворяет условию $\Phi(0) = 0$. Из этого легко следует, что для ограниченности блока B при сколь угодно малых ζ необходимо выполнение условия

$$P C_n - C = 0.$$

Это означает, что $\theta(\zeta)$ является решением *-касательной задачи Шура.

Теорема доказана.

Неравенство (2.1) по традиции назовем основным матричным неравенством задачи.

Параллельно с основным в схеме В. П. Потапова рассматривается также дуальное матричное неравенство. В случае нашей задачи оно приобретает такой вид:

$$\left[\begin{array}{c|c} P - CC^* & \left\{ P - C \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta) \\ \vdots \\ \theta^*(\zeta) \end{bmatrix} \right\} \Delta_{p,n}(\zeta) \\ \hline * & \frac{I - \theta(\zeta) \theta^*(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right] \geq 0.$$

Решая каждое из них мы получим исчерпывающее описание совокупности решений *-касательной проблемы.

2°. Ввиду полной аналогичности рассуждений ограничимся лишь рассмотрением неравенства (2.1).

Ниже решается это неравенство при предположении

$$\text{rang}(P - CC^*) = \text{rang } P, \quad (2.3)$$

то есть при условии невырожденности задачи*.

При решении неравенства (2.1) используются рассуждения, проводимые в [8].

Разложению пространства $E_p^{(n)}$ на ортогональную сумму

$$E_p^{(n)} = \Delta P \oplus \Delta P^\perp$$

соответствуют матричные представления

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P - CC^* = \begin{bmatrix} I - \hat{C}\hat{C}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

(в связи с представлением C вспомним включение $\Delta C \subset \Delta P$).

Отметим, что из (2.3) следует невырожденность блока $I - \hat{C}\hat{C}^*$.

В соответствии с представлениями (2.4) неравенство (2.1) принимает вид

* Вырожденной задаче будет посвящена отдельная работа.

$$\left[\begin{array}{c|c} \left| \begin{array}{cc} I - \widehat{C}\widehat{C}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right| & \frac{1}{\zeta} \left| \begin{array}{c} I \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \right| \left\{ \Lambda_{p,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \theta(\zeta) - \left| \begin{array}{c} \widehat{C} \\ 0 \end{array} \right| \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} \\ \hline * & \frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right] \geq 0.$$

Последнее равносильно неравенству

$$\left| \begin{array}{cc} A & B \\ B^* & C \end{array} \right| =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I - \widehat{C}\widehat{C}^* & \frac{1}{\zeta} [I, 0] \left\{ \Lambda_{p,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \theta(\zeta) - \left| \begin{array}{c} \widehat{C} \\ 0 \end{array} \right| \Lambda_{q,n}^* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right\} \\ \hline * & \frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right] \geq 0,$$

из которого, применением леммы о неотрицательной блок-матрице [2], получаем неравенство

$$\frac{I - \theta^*(\zeta) \theta(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} - B^* (I - \widehat{C}\widehat{C}^*)^{-1} B \geq 0,$$

совпадающее, как это легко заметить, с неравенством (10.22) работы [8]. Используя теперь лемму 10.2 из той же работы и принимая во внимание также теорему 2 настоящей статьи, получаем:

Теорема 3. *Общее решение $\theta(\zeta)$ невырожденной $*$ -касательной проблемы Шура представляется в виде дробно-линейного преобразования (0.2) произвольного параметра $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$, матрица коэффициентов которого является j -растягивающим элементарным кратным множителем, совпадающим с (0.3).*

3°. Сопоставляя эту теорему упомянутой во введении теоремой о параметризации [7], приходим к основному результату данной статьи:

Теорема 4 (об адекватности). *Невырожденная $*$ -касательная проблема Шура является задачей, адекватной заданию j -растягивающего элементарного кратного множителя произвольного ранга.*

Ереванский государственный
университет

Поступила 15. IX. 1987

Լ. Հ. ԳԱԼՏՅԱՆ, Վ. Կ. ԴՈՒԲՈՎՈՅ. Շուրի ինտերպոլյացիոն խնդրի մի ընդհանրացման մասին (ամփոփում)

Ինչպես ցույց է տրված հեղինակների այլ աշխատանքներում, Շուրի դասական ինտերպոլյացիոն խնդիրը, որը լուծվում է j -տեսակի կարևորագույն օբյեկտներից մեկի՝ տարրական բազմապատիկ արտադրիչի օգնությամբ, այնուհանդերձ իր կառուցվածքով լիովին չի համապատասխանում վերջինիս:

Հոգնվածով առաջարկված է մի նոր խնդիր՝ Շուրի $*$ -շեղափող խնդիրը, որը հանդիսանում է Շուրի խնդրի ընդհանրացումը և որը որոշակի իմաստով տարրական բազմապատիկ արտադրիչի հետ զտնվում է անմիջական փոխմիարժեք կապի մեջ:

L. A. GALSTIAN, V. C. DUBOVOI. *On a generalization of interpolation problem of Shur (summary)*

In the article a new problem, which is called by the authors the Shur *-tangential problem, is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Потапов. Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, 4, 1955, 125—236.
2. А. В. Ефимов, В. П. Потапов. J -растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей, УМН, XXVII, вып. 1 (169), 1973.
3. И. В. Ковалишина, В. П. Потапов. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН Арм.ССР, LIX, № 1, 1974, 17—22.
4. И. В. Ковалишина. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 47, 1983, 455—457.
5. В. М. Адамян, Д. Э. Аров, М. Г. Крейн. Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VI, №№ 2—3, 1971, 87—112.
6. Л. А. Галстян. Аналитические j -растягивающие матрицы-функции и проблема Шура, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 3, 1977, 205—228.
7. В. К. Дубовой. Параметризация элементарного кратного множителя неполного ранга, Сб. науч. тр. Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов, Киев: Наукова думка, 1983, 54—68.
8. В. К. Дубовой. Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций, Теория функций, функц. анализ и их прил., вып. 42, 1984, 46—57.
9. Л. А. Галстян, В. К. Дубовой. О пошаговом процессе в вырожденной проблеме Шура, Рукопись деп. Арм.НИИТИ, № 27, АР-85, 1985, 42 с.
10. Л. А. Галстян. Аналитические j -растягивающие матрицы-функции и проблема Шура, Кандидатская диссертация, Ереван, 1985.
11. И. Шур. (Schur J.) Über Potenzreihen, die im Innern der Einheitskreise beschränkt sind I, II, Journ. f. Math., 147, 1916, 205—232; 148, 122—145.
12. И. П. Федчина. Касательная проблема Неванлинны-Пика с кратными точками, ДАН Арм.ССР, LXI, № 4, 1975, 214—218.
13. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Мвп, 1970.